RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

Sull'espressione differenziale : $p(x,y)dx+q(x,y)dy$ nell'ambito delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto all'altra variabile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 25 (1956), p. 303-306

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__303_0>

SULL' ESPRESSIONE DIFFERENZIALE: $p(x, y)dx + q(x, y)dy$ NELL' AMBITO DELLE FUNZIONI MISURABILI RISPETTO AD UNA E CONTINUE RISPETTO ALL' ALTRA VARIABILE

Nota (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

In questa breve Nota, quale conseguenza immediata di un teorema di G. Scorza Dragoni [1]) dimostro che:

Se le funzioni, reali di variabili reali, $p(x, y)$, $q(x, y)$ *sono definite nel rettangolo* $R = \mathfrak{J} \times J$, $(\mathfrak{J} = a \leq x \leq b\,;\ J = c \leq \leq y \leq d)$ *e la* $p(x, y)$ *è misurabile rispetto ad* x, *continua rispetto ad* y *e maggiorata, in modulo, da una funzione* $P(x)$ *sommabile in* $\mathfrak{J}$, *mentre* $q(x, y)$ *è continua rispetto ad* x, *misurabile rispetto ad* y *e maggiorata, in modulo, da una funzione* $Q(y)$ *sommabile in* J, *allora, condizione necessaria e sufficiente affinchè l'espressione*

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy \tag{1}$$

sia il differenziale totale (almeno) a prescindere in $\mathfrak{J}$ *da una*

(*) Pervenuta in Redazione il 10 aprile 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara

1) G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XII, pp. 55-61 (1952).

porzione di misura nulla indipendente da y e in J da una porzione di misura nulla indipendente da x, di una $F(x, y)$ [2]*), assolutamente continua rispetto alle singole variabili separatamente, è che per ogni punto (x, y) di R sussista la*

$$(2) \qquad \int_a^x \{ p(\xi, y) - p(\xi, c) \} d\xi = \int_c^y \{ q(x, \eta) - q(a, \eta) \} d\eta .$$

Dalla (2) segue

$$(3) \qquad \int_a^x p(\xi, y) d\xi + \int_c^y q(a, \eta) d\eta = \int_c^y q(x, \eta) d\eta + \int_a^x p(\xi, c) d\xi$$

e allora posto

$$(4) \qquad F(x, y) = \int_a^x p(\xi, y) d\xi + \int_c^y q(a, \eta) d\eta ,$$

$$(5) \qquad F(x, y) = \int_c^y q(x, \eta) d\eta + \int_a^x p(\xi, c) d\xi ,$$

di guisa che $F(x, y)$ è assolutamente continua rispetto alle singole variabili separatamente, dalla (4), a norma del teorema di G. Scorza Dragoni, cit. in [1]), segue la

$$(6) \qquad F'_x(x, y) = p(x, y),$$

almeno se si prescinde in $\mathfrak{J}$ da una porzione di misura nulla indipendente da y, e dalla (5) segue la

$$(7) \qquad F'_y(x, y) = q(x, y),$$

almeno se si prescinde in J da una porzione di misura nulla indipendente da x.

---

[2]) Diciamo che in un punto (x_0, y_0) di R l'espressione (1) è il differenziale totale di una $F(x, y)$ se sussistono le

$$F_x'(x_0, y_0) = p(x_0, y_0) \quad , \quad F_y'(x_0, y_0) = q(x_0, y_0) .$$

Viceversa, dalle (6) e (7), soddisfatte, rispettivamente, (almeno) a prescindere in $\mathfrak{J}$ da una porzione di misura nulla indipendente da y e in J da una porzione di misura nulla indipendente da x, e dall'assoluta continuità della $F(x, y)$ rispetto alle singole variabili, seguono, rispettivamente, le

$$F(x, y) = F(a, y) + \int_a^x p(\xi, y)d\xi, \tag{8}$$

$$F(x, y) = F(x, c) + \int_c^y q(x, \eta)\, d\eta. \tag{9}$$

Da queste si deducono, rispettivamente, le

$$F(x, c) = F(a, c) + \int_a^x p(\xi, c)d\xi, \tag{10}$$

$$F(a, y) = F(a, c) + \int_c^y q(a, \eta)d\eta, \tag{11}$$

che, sostituite, rispettivamente, in (9) e (8), porgono la (3) e quindi la (2). Così la proporzione enunciata è provata.

Naturalmente *se si vuole che la* (1) *sia il differenziale totale di una $F(x, y)$ in tutti i punti di R, non vi è che da ammettere, oltre alle ipotesi dichiarate, la continuità di $p(x, y)$ rispetto ad x e di $q(x, y)$ rispetto ad y* [3]).

---

[3]) Da questo teorema si può dedurre, col medesimo ragionamento usato da F. CAFIERO [*Sulle condizioni sufficienti per l'olomorfia di una funzione*, Ricerche di Matematica, vol. II (1953), pp. 58-77, pag. 60] la seguente proposizione, indicata da CAFIERO stesso: *Data la funzione della variabile complessa z, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, dove u e v sono limitate e continue rispetto alle variabili separatamente nel rettangolo R, si supponga*:

$$\int_{FR^*} f(z)dz = 0$$

per ogni rettangolo R^* coi lati paralleli agli assi interno a R. La funzione $f(z)$ è allora olomorfa nell'interno di R. L'ipotesi della limita-

È ovvio poi che *se invece della sola continuità di* $p(x, y)$ *rispetto ad* y, *e di* $q(x, y)$, *rispetto ad* x, *si suppone l'assoluta continuità, allora la condizione espressa dalla* (2) *diventa*

$$\int_a^x d\xi \int_c^y p'_y(\xi, \eta)d\eta = \int_c^y d\eta \int_a^x q'_x(\xi, \eta)d\xi \quad {}^{4}). \tag{12}$$

---

tezza delle u e v può essere sostituita con quella che esse siano maggiorate, in modulo e da una funzione della sola variabile x sommabile in $\mathfrak{J}$ e da una funzione della sola variabile y sommabile in J. Anche quest'ultima circostanza, volendo, si può ottenere con gli stessi mezzi usati da CAFIERO nel passo citato.

[4]) È il caso di ricordare che, a norma di un interessante esempio indicato da TOLSTOFF [*Sur la différentielle totale*, Recueil Mathem., T. 9 (1941), pp. 461-468], non è possibile sostituire la (12) con la

$$p_y'(x, y) = q_x'(x, y), \tag{12 bis}$$

nemmeno se si suppone, ulteriormente, che la (12 bis) sia soddisfatta ovunque in R e che $p_y'(x, y)$ e $q_x'(x, y)$ siano continue rispetto alle singole variabili separatamente.