RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURO PAGNI

Sulla derivazione negli insiemi astratti delle funzioni a variazione limitata integrabili secondo Burkill

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 25 (1956), p. 279-302

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__279_0>

SULLA DERIVAZIONE NEGLI INSIEMI ASTRATTI DELLE FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA INTEGRABILI SECONDO BURKILL

Memoria (*) *di* MAURO PAGNI (*a Modena*) (**)

La presente Memoria è uno studio sulla derivazione delle funzioni reali dipendenti da un insieme astratto.

L'argomento è stato oggetto di numerosi recenti Lavori [1]) nei quali viene compiutamente trattato solo il caso delle funzioni additive a variazione limitata, limitandosi la quasi totalità dei lavori relativi a funzioni non additive a considerare funzioni d'intervallo negli spazi euclidei.

Qui verranno prese in esame le funzioni integrabili secondo Burkill.

Si perverrà a considerare tali funzioni introducendo negli insieme astratti un opportuna definizione di integrale che, come si vedrà, è nel caso degli spazi euclidei più generale di quella originariamente introdotta da Burkill [2] per le funzioni d'intervallo.

La classe delle funzioni integrabili secondo Burkill a variazione limitata, per la quale daremo una teoria della deriva-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 22 dicembre 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico Università, Modena.

(**) Sull'argomento lo scrivente ha tenuto una comunicazione al V Congresso dell'U.M.I. tenutosi a Pavia in data 6-12 ott. 1955.

1) Vedasi la Bibliografia che trovasi alla fine, in particolare: [4], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [14], [15], [17], [18], [24].

zione, viene a contenere anche quelle funzioni non additive che hanno avuto sin ora numerose ed importanti applicazioni nelle teorie dell'integrazione, della lunghezza di una curva e dell'area delle superficie.

Nel presente Lavoro si assume come derivata di una funzione integrabile secondo Burkill rispetto ad una assegnata misura la derivata del suo integrale di Burkill, prendendo come derivata di questo ultimo, che è una funzione additiva, quella introdotta da G. Fichera [7], [8] per le funzioni additive.

Questo condurrà ad impiegare, ed in modo essenziale, la teoria della derivazione di G. Fichera.

A conforto della definizione di derivata qui introdotta, che non è consueta, stanno i raffronti fatti nel corso della Memoria per vaste classi di funzioni che stabiliscono l'equivalenza (nel senso della teoria della misura) della anzidetta derivata con altre possibili derivate. Per le funzioni d'intervallo $F(I)$ in uno spazio euclideo, la derivata come è qui definita coincide quasi ovunque con quella ottenuta come limite del rapporto $\dfrac{F(I)}{\tau(I)}$ (essendo $\tau(I)$ la misura di I) quando I tende ad un punto x con qualunque fissato parametro di regolarità o su un sistema di reticoli.

Questo ultimo fatto permette di ottenere generalizzandoli vari resultati, dovuti a Banach [1], Burkill [3], Kempisty [12] e Saks [21], sulla derivazione delle funzioni d'intervallo negli spazi euclidei.

Desidero infine ringraziare i Proff.ri G. Fichera e E. Magenes per le proficue conversazioni avute sull'argomento del presente Lavoro.

1. - Premesse relative alla teoria della derivazione delle funzioni additive a variazione limitata.

In questo primo numero riporteremo la definizione di derivata data da G. Fichera [7], [8] per le funzioni additive a variazione limitata dipendenti da un insieme astratto e quella parte della teoria della derivazione delle anzidette funzioni che ci servirà in modo essenziale nel seguito [2]).

Sia $\{I\}$ una famiglia elementare di insiemi astratti [3]). In $\{I\}$ sia definita la misura non negativa $\mu(I)$ [4]). Sia $F(I)$ un'arbitraria funzione reale non negativa ed additiva definita in $\{I\}$.

Fissato I_0 in $\{I\}$, indichiamo con $\theta[F, I_0]$ la classe di tutte le funzioni reali $f(x)$ definite in I_0 che godono delle seguenti proprietà:

a) ogni $f(x)$ è non negativa e μ-sommabile in I_0 [5]);

b) assegnato comunque in $\{I\}$ l'insieme I contenuto in I_0, si ha:

$$\int_I f(x)d\mu \leq F(I).$$

La classe $\theta[F, I_0]$ è non vuota contenendo la funzione

---

2) Per quanto riportato in questo numero rimandiamo a G. Fichera [7], [8] a cui è dovuta la teoria della derivazione qui esposta.

3) *Famiglia elementare* o *semi anello* è una famiglia di insiemi $\{I\}$ che verifichi le seguenti condizioni: 1) è chiusa rispetto al prodotto, cioè contenendo due insiemi, ne contiene anche l'intersezione; 2) se I' ed I'' sono due suoi insiemi ed $I' \subset I''$ esistono un numero finito n ed insiemi di essa $I_1, I_3, \dots, I_n$ a due a due disgiunti tali che, posto $I_0 = I'$ si abbia $I'' = \sum_{k=0}^{n}{}^{\cdot} I_k$ (scrivendo $\sum_{k=0}^{n}{}^{\cdot} I_k$ o $I_0 \dot{+} I_1 \dot{+} \dots \dot{+} I_n$ intendiamo che gli insiemi I_k sono a due a due disgiunti) ed inoltre che qualunque sia $0 \leq h \leq n$ l'insieme $\sum_{k=0}^{h}{}^{\cdot} I_k$ appartenga alla famiglia $\{I\}$.

4) Diremo misura ogni funzione $\mu(I)$ *completamente additiva e a variazione limitata* definita in $\{I\}$. Una funzione $\alpha(I)$ definita in $\{I\}$ verrà detta *additiva* (*completamente additiva*) in $\{I\}$ se $I = \sum_{k=1}^{n}{}^{\cdot} I_k$, ($I = \sum_{k}{}^{\cdot} I_k$ con gli I_k anche in infinità numerabile) con gli I_k insiemi di $\{I\}$, implica $\alpha(I) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(I_k)$ $(\alpha(I) = \sum_{k}{}^{\cdot} \alpha(I_k))$.

5) Per la definizione di funzione μ-sommabile e di integrale qui usate vedasi G. Fichera [8], [7].

identicamente nulla in I_0. Si consideri il funzionale

$$J_{I_0}(f) = \int_{I_0} f(x) d\mu$$

per ogni $f(x)$ della classe $\theta[F, I_0]$.

Se $J_{I_0}(f)$ è dotato di massimo in detta classe, diremo che $F(I)$ è *μ-derivabile sull'insieme* I_0 e diremo *μ-derivata* la funzione $F'(x) \equiv \dfrac{dF}{d\mu}$ che dà il massimo di $J_{I_0}(f)$ in $\theta[F, I_0]$.

Vale il seguente teorema [6])

I. *Se $F(I)$ è μ-derivabile su I_0, lo è altresì su ogni insieme I di $\{I\}$ in esso contenuto e se $F'(x)$ è la sua μ-derivata su I_0 essa è tale anche su I. La μ-derivata di $F(I)$ è determinata a meno della addizione di una funzione μ-equivalente a zero* [7]).

Supponiamo ora che $F(I)$ sia additiva e a variazione limitata (AVL) in $\{I\}$. Denotate rispettivamente con $p_F(I)$, $q_F(I)$ la variazione positiva e la variazione negativa della $F(I)$; diremo che $F(I)$ è *μ-derivabile su* I_0 se sono tali le funzioni (non negative additive) $p_F(I)$, $q_F(I)$. Definiamo la *μ-derivata* $F'(x)$ di $F(I)$ su I_0 ponendo:

$$F'(x) = p'_F(x) - q'_F(x)$$

dove $p'_F(x)$, $q'_F(x)$ sono rispettivamente le μ-derivate di p_F e q_F. Sussiste il seguente teorema

II. *Se $F(I)$ è AVL in $\{I\}$, essa è μ-derivabile su ogni insieme I_0 di $\{I\}$.*

---

[6]) Per la dimostrazione di questo teorema e degli altri teoremi di questo numerò vedasi G. Fichera [7], [8].

[7]) Cioè nulla in tutti i punti di I_0 tranne quelli di un insieme N (appartenente alla famiglia totalmente additiva minima $\{B\}$ che contiene $\{I\}$) tale che $\mu(N) = 0$. Si tenga presente che una misura μ definita in $\{I\}$ può pensarsi prolungata nella famiglia totalmente additiva minima $\{B\}$ che la contiene; vedasi G. Fichera [7], [8].

Diremo che la funzione $F(I)$ AVL in $\{I\}$ è *μ-assolutamente continua* (μAC) se, fissato comunque I_0 in $\{I\}$, ad ogni $\varepsilon > 0$ può farsi corrispondere un $\sigma_\varepsilon > 0$ tale che per ogni insieme $P = \sum_{k=1}^{n}{}^{\cdot} I_k$ (n intero qualunque e con gli I_k insiemi di $\{I\}$) contenuto in I_0 e verificante la condizione $\mu(P) < \sigma_\varepsilon$ si ha $\left| \sum_{k=1}^{n} F(I_k) \right| < \varepsilon$.

Vale il seguente teorema di *Lebesgue-Radon-Nicodym*.

III. *Condizione necessaria e sufficiente perchè, per la funzione AVL $F(I)$ definita in $\{I\}$, fissato comunque I_0 in $\{I\}$, riesca per ogni $I \subset I_0$:*

$$F(I) = \int_I f(x) d\mu$$

con $f(x)$ μ-sommabile in I_0, è che $F(I)$ sia μ-AC. In tal caso la $f(x)$, che è determinata a meno della addizione di una funzione μ-equivalente a zero, coincide in I_0 con $F'(x)$.

Diremo che la funzione AVL $F(I)$ è *μ-singolare* sull'insieme I_0 di $\{I\}$ se la sua μ-derivata su I_0 è μ-equivalente a zero. Vale allora il seguente teorema *della decomposizione di Lebesgue di una funzione AVL*:

IV. *Se $F(I)$ è AVL, fissato I_0 in $\{I\}$, per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0, sussiste la decomposizione*

$$F(I) = F^*(I) + \int_I F'(x) d\mu$$

con $F^*(I)$ μ-singolare su I_0.

Riportiamo infine il seguente teorema

V. *La trasformazione che ad ogni funzione AVL definita nella famiglia elementare $\{I\}$ fa corrispondere — per ogni fissato I_0 di $\{I\}$ — la sua μ-derivata su I_0 è lineare.*

OSSERVAZIONE.

La teoria della derivazione di una funzione $F(I)$ AVL qui riportata si può generalizzare considerando una misura di segno variabile. Fissato I_0 in $\{I\}$ e considerata la decomposizione di Hahn di I_0, relativa alla misura μ, $I_0 = I_0^+ \dot{+} I_0^-$ si definisca la μ-derivata $F'(x) \equiv \dfrac{dF}{d\mu}$ su I_0 ponendo

$$F' = \begin{cases} \dfrac{dF}{dv_\mu} & \text{nei punti di } I_0^+ \\ -\dfrac{dF}{dv_\mu} & \text{nei punti di } I_0^-. \end{cases}$$

Non è allora difficile con questa definizione estendere i teoremi dati in questo numero al caso di una misura μ di segno variabile.

2. - Definizione e prime proprietà dell'integrale di Burkill negli spazi astratti.

Sia $\{I\}$ una famiglia elementare di insiemi astratti ed $F(I)$ una funzione reale definita in $\{I\}$. Preso l'insieme I di $\{I\}$ indichiamo con δ_1 una sua *decomposizione* [8]) in un numero finito $n(\geq 1)$ di insieme di $\{I\}$, cioè $I = \dot{\sum\limits_{k=1}^{n}} I_k$ e consideriamo la variabile $\sigma_F(\delta_1) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(I_k)$. Ordiniamo le decomposizioni δ_1 di I in modo da dire seguente δ' a δ_1, se ogni insieme I'_k che interviene nella δ' è contenuto in qualche I_k della δ_1. È immediato verificare che l'insieme di tutte le δ_1 è un insieme ordinato secondo Moore e Picone. Denotiamo simbolicamente tale ordinamento scrivendo $\delta_1 \rightarrow I$ ed indichiamo con

$$l' = \lim_{\delta_1 \rightarrow I}{}' \sigma_F(\delta_1) \qquad (l'' = \lim_{\delta_1 \rightarrow I}{}'' \sigma_F(\delta_1))$$

il minimo (il massimo) limite della variabile ordinata $\sigma_F(\delta_1)$.

---

8) Diciamo che si è *decomposto* un insieme U negli insiemi $U_1, U_2, \ldots U_n$ (essendo gli U_k in numero discreto) quando U viene riguardato come somma degli U_k e tali insiemi sono a due a due disgiunti; diciamo anche che questi insiemi costituiscono una *decomposizione* di U.

Definiamo come *l'integrale inferiore* (*superiore*) *di Burkill della* $F(I)$ *nell'insieme* I *il* $\lim'_{\delta_1 \to I} \sigma_F(\delta_1)$ ($\lim''_{\delta_1 \to I} \sigma_F(\delta_1)$) che indichiamo con $\underline{\int}_{I} F$ $\left(\overline{\int}_{I} F\right)$.

Diciamo poi che la funzione $F(I)$ è *integrabile secondo Burkill in* I se l' ed l'' sono uguali e finiti e diciamo *integrale di Burkill* della $F(I)$ in I il loro valore comune che indichiamo con $\int_I F$.

Nel caso degli spazi euclidei l'integrale qui definito non coincide con quello originariamente definito da J. C. Burkill [2]; un raffronto fra le due definizioni verrà fatto nel n. 9 della presente Memoria.

Sono d'immediata dimostrazione i seguenti teoremi

VI. *Se* $F(I)$ *è additiva in* $\{I\}$, *esiste per ogni* I *di* $\{I\}$ $\int_I F$ *ed è* $F(I) = \int_I F$.

VII. *Se esiste* $\int_I F$ *detta* c *una qualunque costante reale riesce*

$$\int_I cF = c \int_I F.$$

VIII. *Se per ogni* I *di* $\{I\}$ *è* $F(I) \geq 0$ *è pure* $\underline{\int}_{I} F \geq 0$.

IX. *Per ogni* I *di* $\{I\}$ *si ha* $\left|\underline{\int}_{I} F\right| \leq \overline{\int}_{I} |F|$, $\left|\overline{\int}_{I} F\right| \leq \overline{\int}_{I} |F|$.

X. *Se* $F(I) = F_1(I) + F_2(I)$ *allora*

$$\underline{\int}_{I} F_1 + \underline{\int}_{I} F_2 \leq \underline{\int}_{I} F \leq \underline{\int}_{I} F_1 + \overline{\int}_{I} F_2 \leq \overline{\int}_{I} F \leq \overline{\int}_{I} F_1 + \overline{\int}_{I} F_2$$

e quindi se $\int_I F_1$ *ed* $\int_I F_2$ *esistono, esiste* $\int_I F$ *e riesce*

$$\int_I F = \int_I F_1 + \int_I F_2.$$

Sussiste il seguente teorema

XI. *Se* $I = I_1 \dot{+} I_2$ *ed esiste* $\int_I F$ *esistono anche* $\int_{I_1} F$, $\int_{I_2} F$ *e riesce* $\int_I F = \int_{I_1} F + \int_{I_2} F$.

Siano δ una generica decomposizione di I in un numero finito d'insiemi di $\{I\}$ e δ_{12} una generica decomposizione di I, in un numero finito di insiemi di $\{I\}$ seguente, nell'ordinamento $\delta \to I$, alla decomposizione $I = I_1 + I_2$. È allora immediato verificare che

$$\lim_{\delta \to I}{}' \sigma_F(\delta) = \lim_{\delta_{12} \to I}{}' \sigma_F(\delta_{12}) \quad , \quad \lim_{\delta \to I}{}'' \sigma_F(\delta) = \lim_{\delta_{12} \to I}{}'' \sigma_F(\delta_{12}).$$

D'altra parte dette δ_1 e δ_2 generiche decomposizioni rispettivamente di I_1 ed I_2 ed osservato che le δ_1 e δ_2 sono fra loro indipendenti si ha

$$\lim_{\delta_1 \to I_1}{}' \sigma_F(\delta_1) + \lim_{\delta_2 \to I_2}{}' \sigma_F(\delta_2) = \lim_{\delta_{12} \to I}{}' \sigma_F(\delta_{12}) ;$$

$$\lim_{\delta_1 \to I_1}{}'' \sigma_F(\delta_1) + \lim_{\delta_2 \to I_2}{}'' \sigma_F(\delta_2) = \lim_{\delta_{12} \to I}{}'' \sigma_F(\delta_{12}).$$

E in definitiva

$$\lim_{\delta \to I}{}' \sigma_F(\delta) = \lim_{\delta_1 \to I}{}' \sigma_F(\delta_1) + \lim_{\delta_2 \to I}{}' \sigma_F(\delta_2),$$

$$\lim_{\delta \to I}{}'' \sigma_F(\delta) = \lim_{\delta_1 \to I_1}{}'' \sigma_F(\delta_1) + \lim_{\delta_2 \to I_2}{}'' \sigma_F(\delta_2)$$

e da qui, per l'ipotesi fatte, l'asserto.

Dalla definizione di famiglia elementare e dal teor. XI segue

XII. *Se* $F(I)$ *è integrabile secondo Burkill nell'insieme* I_0 *di* $\{I\}$ *lo è pure in ogni insieme di* $\{I\}$ *contenuto in* I_0.

3. - Funzioni *VL* ed integrali di Burkill di funzioni *VL*.

Sia $F\{I\}$ una funzione reale definita nella famiglia elementare $\{I\}$.

Chiameremo *variazione totale* della $F(I)$ nell'insieme I di $\{I\}$, l'integrale superiore $\overline{\int_I} |F|$. Diremo che la $F(I)$ è *a variazione limitata* (più brevemente è VL) in $\{I\}$ se per ogni I di $\{I\}$ è finito $\overline{\int_I} |F|$ [9]).

Sussiste il seguente teorema

XIII. *Se $F(I)$ è VL in $\{I\}$, posto $\overline{G}(I) = \overline{\int_I} F$ $(\underline{G}(I) = \underline{\int_I} F)$, la funzione $\overline{G}(I)$ $(\underline{G}(I))$ è AVL.*

Dal teor. IX si ha che per ogni I di $\{I\}$ $-\overline{\int_I}|F| \leq \overline{\int_I} F \leq \overline{\int_I}|F|$.

Ciò osservato, dalle relazioni stabilite nel corso della dimostrazione del teorema XI, se $I = I_1 + I_2$ riesce $\overline{G}(I) = \overline{G}(I_1) + \overline{G}(I_2)$, cioè $\overline{G}(I)$ è additiva. Sia infine $I = \sum_{k=}^{n} I_k$ una generica decomposizione di I in un numero finito di insiemi I_k di $\{I\}$. Per ogni I_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ si ha $-\overline{\int_{I_k}} |F| \leq$ $\leq \overline{G}(I_k) \leq \overline{\int_{I_k}} |F|$ e in definitiva $\sum_{k=1}^{n} |\overline{G}(I_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \overline{\int_{I_k}} |F| = \overline{\int_I} |F|$.

Si procede in modo analogo per stabilire la tesi nel caso di $\underline{G}(I)$.

Corollario immediato del teor. XIII è il seguente teorema

XIV. *Se $F(I)$ è VL ed integrabile secondo Burkill in $\{I\}$, posto $G(I) = \int_I F$ la funzione $G(I)$ è AVL.*

---

9) Detta δ_I una generica decomposizione di I in un numero finito d'insiemi di $\{I\}$ e posto $\sigma_{|F|}(\delta_I) = \sum_{k=1}^{n} |F(I_k)|$ si indichi con $v_F(I)$ l'estremo superiore di $\sigma_{|F|}(\delta_I)$ al variare di δ_I. E' allora immediato verificare che per ogni I di $\{I\}$ riesce $v_F(I) \leqq \overline{\int_I} |F|$ e che vale il il segno uguale se la $F(I)$è additiva in $\{I\}$. Cioè per le funzioni additive la definizione ora data coincide con quella solita.

4. - Derivazione delle funzioni *VL* integrabili secondo Burkill.

Sia $\{I\}$ una famiglia elementare di insiemi astratti. In $\{I\}$ sia definita la misura non negativa $\mu(I)$. Sia $F(I)$ un'arbitraria funzione reale integrabile secondo Burkill e *VL* in $\{I\}$. Fissato I_0 in $\{I\}$ diremo che la $F(I)$ *è derivabile rispetto alla misura* μ (*μ-derivabile*) sull'insieme I_0 se tale riesce secondo la definizione del n. 1 la funzione (*AVL*) $G(I) = \int\limits_I F$ e diremo *μ-derivata* della $F(I)$ su I_0 la funzione reale $F'_B(x) \equiv G'(x)$, essendo $G'(x)$ la μ-derivata della funzione $G(I)$ *AVL* come è stata definita nel n. 1 [10]).

È conseguenza immediata della definizione ora data e del teor. I il seguente teorema.

XV. *Se $F(I)$ VL ed integrabile secondo Burkill è μ-derivabile su I_0 lo è altresì su ogni insieme I di $\{I\}$ in esso contenuto e se $F'_B(x)$ è la sua μ-derivata su I_0 essa è tale anche su I. La μ-derivata di $F(I)$ è determinata a meno dell'addizione di una funzione μ-equivalente a zero.*

Sussiste il seguente teorema

XVI. *Se $F(I)$ è integrabile secondo Burkill e VL in $\{I\}$ essa è μ-derivabile su ogni insieme I di $\{I\}$.*

La dimostrazione segue dai teorr. XIV, II.

La linearità rispetto al corpo reale dell'operazione di derivazione è stabilita dal teorema

XVII. *Se $F_1(I)$ ed $F_2(I)$ sono integrabili secondo Burkill e VL in $\{I\}$ dette c_1 e c_2 due qualsivoglia costanti reali e posto $F = c_1F_1 + c_2F_2$ si ha $F'_B = c_1F'_{1B} + c_2F'_{2B}$.*

La dimostrazione consegue dai teorr. VII, X, V.

---

10) E' quasi superfluo osservare che se $F(I)$ è *AVL* $F'_B(x)$ è μ-equivalente a $F'(x)$.

5. - Funzioni μ-assolutamente continue. Il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym per le funzioni integrabili secondo Burkill e μAC.

Sia $\mu(I)$ una misura non negativa definita nella famiglia elementare $\{I\}$.

Diremo che la funzione $F(I)$ VL in $\{I\}$ è *μ-assolutamente continua* (μAC) se, fissato comunque I_0 in $\{I\}$ ad ogni $\varepsilon > 0$ può farsi corrispondere un $\sigma > 0$ tale che per ogni insieme $P = \sum_{k=1}^{n}{}^{\cdot} I_k$ (con gli I_k insiemi di $\{I\}$) contenuto in I_0 e verificante la condizione $\mu(P) < \sigma_\varepsilon$ si ha $|\sum_{k=1}^{n} F(I_k)| < \varepsilon$ [11]).

Sussiste il seguente teorema

XVIII. *Se $F(I)$ è μ-AC in $\{I\}$, posto $G(I) = \overline{\int_I} F$ $(\underline{G}(I) = \underline{\int_I} F)$, la funzione $\overline{G}(I)$ $(\underline{G}(I))$ AVL è μAC.*

Fissato I_0 in $\{I\}$ e preso $\varepsilon > 0$, sia $\sigma_\varepsilon > 0$ il σ_ε che resta associato ad ε nella definizione di funzione μAC di $F(I)$. Preso comunque l'insieme $P = \sum_{k=1}^{n}{}^{\cdot} I_k$ (con gli I_k di $\{I\}$) contenuto in I_0 e tale che $\mu(P) < \sigma_\varepsilon$ si determini per ogni I_k una decomposizione $I_k = \sum_{h=1}^{p_k}{}^{\cdot} I_{kh}$ tale che

$$|\overline{G}(I_k) - \sum_{h=1}^{p_k} F(I_{kh})| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (k = 1, \dots n).$$

Riesce allora

$$|\sum_{k=1}^{n} \overline{G}(I_k)| < |\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{p_k} F(I_{kh})| + \varepsilon$$

e dato che $\mu(\sum_{k=1}^{n}{}^{\cdot} \sum_{h=1}^{p_k}{}^{\cdot} I_{kh}) < \sigma_\varepsilon$,

$$|\sum_{k=1}^{n} \overline{G}(I_k)| < 2\varepsilon,$$

---

11) La definizione di funzione μAC è, a parte l'additività di $F(I)$, la stessa di quella data nel n. 1.

e da qui l'asserto. Lo stesso ragionamento prova il teorema per la $\underline{G}(I)$.

Immediato corollario del teorema XVIII è il seguente teorema

XIX. *Se* $F(I)$ *integrabile secondo Burkill è* μAC *in* $\{I\}$, *posto* $G(I) = \int_I F$ *la funzione* $G(I)$ *è* μAC.

Per le funzioni integrabili secondo Burkill e μAC vale un teorema che, per l'analogia che presenta col teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym per le funzioni AVL e μAC, chiameremo teorema di *Lebesgue-Radon-Nikodym per le funzioni integrabili secondo Burkill e* μAC e precisamente

XX. *Se* $F(I)$ *è integrabile secondo Burkill e* μAC *in* $\{I\}$, *posto* $G(I) = \int_I F$ *si ha per ogni* I *di* $\{I\}$

$$G(I) = \int_I F'_B(x) d\mu$$ [12]).

La dimostrazione consegue immediatamente dai teorr. XIX e III.

OSSERVAZIONE. - Questo teorema giustifica, per le funzioni μAC integrabili secondo Burkill, la definizione di derivata data nel n. 4. Infatti il sussistere del teor. XX porta necessariamente la μ-equivalenza della μ-derivata dell'integrale di Burkill con la μ-derivata della $F(I)$ comunque essa venga definita.

6. - Funzioni μ-singolari. Decomposizione di una funzione VL integrabile secondo Burkill.

Sia $\{I\}$ una famiglia elementare di insiemi astratti e $\mu(I)$ una misura non negativa definita in $\{I\}$. Diremo che la funzione

---

12) Non è detto che se per una $F(I)$ integrabile secondo Burkill e VL in $\{I\}$ $G(I) = \int_I F'_B d\mu$ per ogni I di $\{I\}$ la $F(I)$ sia μAC; si danno esempi dove ciò non accade.

VL $F(I)$ integrabile secondo Burkill è *μ-singolare* sull'insieme I_0 di $\{I\}$ se la sua μ derivata su I_0 è μ-equivalente a zero.

Vale il seguente teorema

XXI. *Se $F(I)$ è integrabile secondo Burkill e VL, fissato comunque I_0 in $\{I\}$, per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0 sussiste la decomposizione*

$$F(I) = F^*(I) + \int_I F'_B(x)d\mu,$$

con $F^*(I)$ μ-singolare in I_0. Tale decomposizione di $F(I)$ nella somma di una funzione μ-singolare su I_0 e di una funzione AVL e μAC è unica.

Posto per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0

$$F^*(I) = F(I) - \int_I F'_B(x)d\mu$$

è subito visto che la F^*, che riesce integrabile secondo Burkill e VL, è μ-derivabile e che la sua μ-derivata è μ-equivalente a zero su I_0.

L'unicità della decomposizione può stabilirsi come segue: Sia per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0

$$F(I) = \bar{F}(I) + \int_I f(x)d\mu$$

con $\bar{F}(I)$ μ-singolare su I_0 e $f(x)$ μ-sommabile in I_0; si ha

$$F^*(I) - \bar{F}(I) = \int_I (f - F'_B)d\mu.$$

Ne segue che la funzione μ-singolare $F^*(I) - \bar{F}(I)$ ha per derivata $f(x) - F'_B(x)$ e da ciò la μ-equivalenza di f con F'_B in I_0

Il teorema ora dimostrato può chiamarsi, per la stretta analogia che presenta col teorema della decomposizione di Lebesgue di una funzione AVL, teorema *della decomposizione di Lebesgue di una funzione VL integrabile secondo Burkill.*

OSSERVAZIONE. - La teoria della derivazione qui svolta per una misura μ di segno costante può generalizzarsi al caso di una misura μ di segno variabile. Per questo basterà prendere le mosse dalla teoria della derivazione delle funzioni AVL del n. 1 fatta per una misura di segno variabile.

7. - Derivazione delle funzioni *VL* sub-additive e super-additive.

Diremo che la funzione reale $F(I)$ definita nella famiglia elementare $\{I\}$ è *sub-additiva* (*super-additiva*) se $I = \sum_{k=1}^{n}{}^{\cdot} I_k$ implica

$$F(I) \geq \sum_{k=1}^{n} F(I_k) \qquad (F(I) \leq \sum_{k=1}^{n} F(I_k)).$$

Vale il seguente teorema

XXI. *Ogni funzione $F(I)$ VL e sub-additiva (super-additiva) in $\{I\}$ è ivi integrabile secondo Burkill.*

Fissato l'insieme I di $\{I\}$ indichiamo con δ_1 una sua decomposizione in un numero finito di insiemi di $\{I\}$, cioè $I = \sum_{k=1}^{n}{}^{\cdot} I_k$ e consideriamo la variabile $\sigma_F(\delta_1) = \sum_{k=1}^{n} F(I_k)$.
Dall'essere la $F(I)$ sub-additiva segue che la variabile $\sigma_F(\delta_1)$ è monotona non crescente, nell'ordinamento $\delta_1 \to I$, e come tale dotata di limite finito od infinito. Che il limite sia finito segue dalla relazione (teor. IX) $|\underline{\int_I} F| \leq \overline{\int_I} |F|$ tenendo conto dell'ipotesi che $F(I)$ è VL. Analoga dimostrazione vale nel caso delle funzioni VL super-additive.

Sia $\mu(I)$ una misura non negativa definita in $\{I\}$. Dai teoremi XXII e XVI segue immediatamente che

XXIII. *Ogni funzione $F(I)$ VL e sub-additiva (super-additiva) in I_0, con I_0 insieme di $\{I\}$, è μ-derivabile su I_0.*

Sia ora $F(I)$ una funzione sub-additiva non negativa definita in $\{I\}$. Per una siffatta funzione, fissato I_0 in $\{I\}$ si può in modo perfettamente analogo a quanto fatto nel n. 1 per le funzioni additive non negative, ed usando dello stesso simbolismo, definire la μ-derivata su I_0, che indicheremo con $F'(x)$, come massimo del funzionale $J_{I_0}(f)$ nella classe $\theta[F, I_0]$. Per una $F(I)$ sub-additiva non negativa valgono poi, con questa definizione di derivata, teoremi perfettamente analoghi ai teorr. I, II riportati nel n. 1 [13]).

D'altra parte per una funzione $F(I)$ sub-additiva non negativa vale il teor. XXIII che ci assicura che esiste su ogni insieme I di $\{I\}$ la sua μ-derivata $F'_B(x)$. Si è così portati a fare un confronto fra le due derivate $F'_B(x)$ e $F'(x)$.

Si ha in proposito il seguente teorema

XXIV. *Nell'ipotesi fatte riesce per ogni I_0 di $\{I\}$ $F'(x)$ μ-equivalente a $F'_B(x)$* [14]).

Fissato I_0, poniamo per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0 $G(I) = \int_I F$. Per la sub-additività della $F(I)$ si ha $G(I) \leq F(I)$ e quindi per la proprietà massimante della $F'(x)$ $\int_I F'(x)d\mu \geq$ $\geq \int_I G'(x)d\mu$. Mostreremo che è $\int_I F'(x)d\mu = \int_I G'(x)d\mu$ per ogni $I \subset I_0$ e quindi la μ-equivalenza in I_0 di $G'(x) \equiv F'_B(x)$ a $F'(x)$.

Preso $\varepsilon > 0$ si determini una decomposizione di I, $I = \sum_{i=1}^{n}{}^{\cdot} I_i$ tale che

$$G(I) > \sum_{i=1}^{n} F(I_i) - \varepsilon.$$

Si ha allora

$$G(I) > \sum_{n=1}^{n} \int_{I_i} F'(x)d\mu - \varepsilon = \int_I F'(x)d\mu - \varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε, $G(I) \geq \int_I F'(x)d\mu$; da qui, per la pro-

---

13) Non diamo qui le dimostrazioni perchè sono le stesse di quelle dei teorr. I, II per i quali si è già rimandato a G. Fichera [7], [8].

14) Due funzioni diconsi μ-equivalenti se la loro differenza è μ-equivalente a zero.

prietà massimante della $G'(x)$,

$$\int_I F'(x)d\mu \leq \int_I G'(x)d\mu .$$

E da questa ultima relazione e dalla già stabilita $\int_I F'(x)d\mu \geq \int_I G'(x)d\mu$ l'asserto.

Sia ora $F(I)$ una funzione sub-additiva (super-additiva) di segno qualunque e VL. Per una siffatta funzione in virtù del teor. XXIII esiste su ogni I di $\{I\}$ la sua μ-derivata che indicheremo, come al solito, con $F'_B(x)$.

D'altra parte per una tale $F(I)$ si può definire una μ-derivata, che indicheremo con $F'(x)$, nel modo seguente:

Fissato I_0 in $\{I\}$ si ponga per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0 $G(I) = \int_I F$ e si consideri la funzione

$$H(I) = F(I) - G(I) \quad , \quad (H(I) = G(I) - F(I)).$$

La $H(I)$ essendo sub-additiva non negativa è dotata di μ-derivata $H'(x)$. Si definisce allora la $F'(x)$ ponendo

$$F'(x) = G'(x) + H'(x) \quad , \quad (F'(x) = G'(x) - H'(x)).$$

A confrontare le due derivate $F'_B(x)$ ed $F'(x)$ sta il seguente teorema

XXV. *Se $F(I)$ è sub-additiva (super-additiva) e VL per ogni I_0 di $\{I\}$ $F'(x)$ e $F'_B(x)$ sono μ-equivalenti.*

Essendo per definizione $F'_B(x) = G'(x)$ basterà provare che $H'(x)$ è μ-equivalente a zero. Dalla relazione

$$F(I) = G(I) + H(I) \quad , \quad (F(I) = G(I) - H(I))$$

segue

$$\int_I F = G(I) + \int_I H \quad , \quad \left(\int_I F = G(I) - \int_I H\right)$$

per ogni I contenuto in I_0. Da qui la μ-equivalenza a zero in I_0 di $H'_B(x)$; ed essendo per il teor. XXIV $H'(x)$ e $H'_B(x)$ μ-equivalenti in I_0 si consegue la tesi.

8. - Derivazione delle funzioni integrabili secondo Burkill e *VL* in uno spazio euclideo.

Nel presente numero considereremo funzioni $F(I)$ reali definite nella famiglia degli intervalli *superiormente aperti* [15]) dello spazio euclideo S_r.

Come misura μ assumeremo quella ordinaria (o di Lebesgue) che indicheremo con τ.

Mostreremo come la teoria generale della derivazione delle funzioni integrabili secondo Burkill e *VL*, svolta nei precedenti numeri, contenga come casi particolari vari risultati, già acquisiti nella teoria della derivazione delle funzioni di insieme, che traggono partito dalla classica definizione di derivata basata sul procedimento del passaggio al limite eseguito in modo opportuno sul rapporto incrementale $\frac{F(I)}{\tau(I)}$ [16]).

Incominceremo col richiamare alcune classiche definizioni di cui faremo uso. Diremo che la famiglia di insiemi $\{I\}_x$ tutti contenenti il punto x di S_r ammette il numero q come *parametro di regolarità* se per ogni I di $\{I\}_x$ esiste un dominio quadrato Q tale che

$$Q \supset I \quad ; \quad \tau\text{-est}(I) \geq q\tau(Q) \ ^{17)}.$$

Diremo che la successione $\{I_n\}$ *converge al punto* x *con parametro di regolarità* $q > 0$ se:

a) ogni I_n contiene x e $\{I_n\}$ ammette q come parametro di regolarità;

b) $\lim\limits_{n \to \infty} (\text{diam } I_n) = 0$.

Se E è un insieme di S_r ed $\{I\}$ una famiglia d'insiemi, diremo che I ricopre E *nel senso di Vitali,* se esiste un $q > 0$

---

15) Per *intervallo superiormente aperto* di S_r intendiamo l'insieme determinato dalle limitazioni $a_k \leq x_k < b_k$ $(k = 1, ..., r)$ essende a_1, a_2, ..., a_r e b_1, b_2, ... b_r due arbitrarie *r-ple* di numeri reali tali che $a_k < b_k$ $(k = 1, ..., r)$.

16) Lebesgue [13]; Vitali [22], [23]; De La Vallée-Poussin [6]; Banach [1]; Saks [21]; Burkill [3]; Kempisty [12].

17) con τ-est indichiamo la misura esterna dell'insieme I.

tale che ad ogni punto x di E si può associare una successione $\{I_n\}$ di insiemi di $\{I\}$ che converge a x con parametro di regolarità q.

Sia $\{I\}$ la famiglia degli intervalli superiormente aperti dello spazio euclideo S_r ed $F(I)$ una funzione reale definita in $\{I\}$.

Fissato I_0 in $\{I\}$ e il numero positivo $q \leq 1$ per ogni x di I_0 consideriamo una successione $\{I_n\}_x$ di intervalli superiormente aperti convergente ad x con parametro di regolarità q. Possiamo supporre che $\{I_n\}_x$ sia tale che esista, finito od infinito il $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{F(I_n)}{\tau(I_n)}$ perchè se così non fosse, basterebbe sostituire $\{I_n\}_x$ con un'opportuna successione ad essa subordinata. Indichiamo col simbolo $\overline{D}_F(x)$ l'estremo superiore (finito od infinito) dei limiti sopra considerati in corrispondenza ad ogni successione $\{I_n\}_x$ convergente ad x con parametro di regolarità q. Analogamente si definisce $\underline{D}_F(x)$ come estremo inferiore degli stessi limiti.

Per le funzioni AVL il seguente teorema mette in relazione le derivata come definita nel n. 1 coi simboli sopra richiamati:

XXVI. *Se $F(I)$ è AVL in $\{I\}$, fissato I_0 in $\{I\}$, riesce quasi dappertutto in I_0 qualunque sia il parametro di regolarità q:* $\overline{D}_F(x) = \underline{D}_F(x) = \dfrac{dF}{d\tau}$ [18]).

In vista di stabilire un analogo teorema per le funzioni VL integrabili secondo Burkill enunciamo e dimostriamo il seguente

LEMMA. - *Se $F(I)$ è integrabile secondo Burkill in I_0, I_0 appartenente alla famiglia elementare $\{I\}$ ove $F(I)$ è definita, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione δ_ε di I_0, in un numero finito d'intervalli superiormente aperti di $\{I\}$ $\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_n$ tale che preso comunque un numero finito d'intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_p$ di $\{I\}$ disgiunti ed ognuno contenuto in qualche*

---

18) Per questo teorema dovuto a G. Fichera, vedasi [7].

I_i *riesce*

$$\left| \sum_{h=1}^{p} \int_{I_h} F - \sum_{h=1}^{p} F(I_h) \right| < \varepsilon .$$

Preso $\varepsilon > 0$ si determini una decomposizione δ_ε di I_0, in un numero finito di intervalli di $\{I\}$, $I_0 = \sum_{i=1}^{n}{}^{\cdot}\, \bar{I}_i$ in modo che

$$\left| \int_{I_0} F - \sum_{i=1}^{n} F(I_i) \right| < \varepsilon \quad .$$

per δ_ε e per tutte le decomposizioni di I_0 ad essa successive nell'ordinamento $\delta_\varepsilon \to I_0$. Mostriamo che la δ_ε gode della proprietà voluta.

Infatti presi comunque (in numero finito) gli intervalli $I_1, \ldots, I_p$ di $\{I\}$ disgiunti ed ognuno contenuto in qualche $\bar{I}_i$ si consideri una decomposizione δ_ε', successiva a δ_ε in cui figurano come intervalli di decomposizione anche gli I_h ($h = 1, \ldots, p$) $I_0 = \sum_{h=1}^{p}{}^{\cdot} I_h \dotplus \sum_{i=1}^{n'} I_i'$. Riesce ovviamente

$$\left| \sum_{h=1}^{p} \int_{I_h} F - \sum_{h=1}^{p} F(I_h) + \sum_{i=1}^{n'} \int_{I'_i} F - \sum_{i=1}^{n'} F(I_i') \right| =$$

$$\left| \int_{I_0} F - \sum_{h=1}^{p} F(I_h) - \sum_{i=1}^{n'} F(I_i') \right| < \varepsilon .$$

E osservando che $\sum_{i=1}^{n'} \int_{I'_i} F - \sum_{i=1}^{n'} F(I_i')$ può essere sostituita, seguitando a sussistere la disuguaglianza ora scritta, da una analoga espressione (ottenuta decomponendo ulteriormente gli I_i') prossima a zero quanto si vuole si consegue l'asserto.

Vale il seguente teorema

XXVII. *Se $F(I)$ è integrabile secondo Burkill e il suo integrale è nullo per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0, riesce quasi* *dappertutto in* I_0 $\underline{D}_F(x) = \overline{D}_F(x)$ *qualunque sia il parametro di regolarità* q [19]).

Preso $\varepsilon > 0$ arbitrario si determini una decomposizione δ_1 di I_0 per cui valga la proprietà enunciata nel Lemma sopra visto, cioè tale che preso comunque un numero finito di intervalli $I_1, \dots, I_p$ disgiunti ed ognuno contenuto in qualche intervallo della decomposizione δ_1 si abbia

$$\left| \sum_{h=1}^{p} F(I_h) \right| < \varepsilon .$$

Per ogni intero positivo n sia E_n l'insieme dei punti x di I_0 dove $\overline{D}_F(x) > \frac{1}{n}$. E_n è ricoperto nel senso di Vitali da una famiglia di intervalli tali che $F(I) > \frac{1}{n}\tau(I)$. Esisterà allora (teorema di copertura di Vitali) un sistema di un numero finito di tali intervalli $I_1, \dots, I_p$ per cui si abbia

$$\sum_{h=1}^{p} F(I_h) > \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{p} \tau(I_h) \quad , \quad \sum_{h=1}^{p} \tau(I_h) > \tau\text{-est}\,(E_n) - \sigma$$

essendo σ un arbitrario numero positivo prefissato.

Si può anche evidentemente fare in modo che gli intervalli I_h $(h = 1, \dots, p)$ siano ognuno contenuti in qualche intervallo della decomposizione δ_1.

Riesce allora

$$\tau\text{-est}\,(E_n) - \sigma < n \sum_{h=1}^{p} F(I_h) < n\varepsilon ,$$

e dall'arbitrarietà di ε, τ-est $(E_n) = 0$. Detto E l'insieme in cui $\overline{D}_F(x) > 0$ si ha $E = E_1 + \dots + E_n + \dots$. e quindi $\tau(E) = 0$.

Analogamente si prova che è di misura nulla l'insieme dei punti x in cui $\underline{D}_F(x) < 0$. Conseguenza del teorema ora dimostrato è il seguente

---

19) Un analogo teorema trovasi in S. Saks [21], per una classe di funzioni che è contenuta in quella qui considerata. Vedasi anche S. Kempisty [12].

XXVIII. *Se $F(I)$ è integrabile secondo Burkill in I_0, posto per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0 $G(I)=\int_I F$, si ha quasi dappertutto in I_0:*

$$\underline{D}_F = \underline{D}_G \quad , \quad \overline{D}_F = \overline{D}_G$$ [20]).

Posto

$$H(I) = G(I) - F(I)$$

riesce per ogni $I \subset I_0$

$$\int_I H = G(I) - \int_I F = 0$$

e per il teorema precedente $\underline{D}_H(x) = \overline{D}_H = 0$ quasi dappertutto in I_0.

D'altra parte è facile vedere che

$$\underline{D}_H \leq \underline{D}_G - \underline{D}_F \leq \overline{D}_H$$

$$\underline{D}_H \leq \overline{D}_G - \overline{D}_F \leq \overline{D}_H$$

e quindi l'asserto.

Vale infine il seguente teorema

XXIX. *Se $F(I)$ è VL ed integrabile secondo Burkill in I_0, posto per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0 $G(I) = \int F$ riesce quasi dappertutto in I_0*

$$F'_B(x) = \frac{dG}{d\tau} = \underline{D}_F(x) = \overline{D}_F(x).$$

La dimostrazione segue dal teor. XXVI e dal teor. XXVIII. Il teor. XXIX mostra che per una funzione $F(I)$ integrabile secondo Burkill e VL la derivata nel senso classico (passaggio al limite con parametro di regolarità) coincide quasi dappertutto con quella qui definita nel n. 4.

OSSERVAZIONE. - Il teor. XXIX stabilisce fra l'altro che per una funzione VL integrabile secondo Burkill esistono quasi

---

[20]) Teoremi analoghi a questo ma meno generali trovansi in S. Saks [21], e in S. Kempisty [12].

dappertutto finite e sono uguali la $\overline{D}_F(x)$ e $\underline{D}_F(x)$: sotto questo aspetto il teorema è una generalizzazione di un analogo teorema di Banach [1], sulle funzioni VL sub-additive e super-additive.

Lo stesso può dirsi per un analogo teorema di Kempisty [12] sulla derivabilità delle funzioni VL integrabili secondo Burkill.

9. - Raffronto fra l'integrale di Burkill definito nel n. 2 e l'originario integrale introdotto da Burkill in uno spazio euclideo.

Sia $\{I\}$ la famiglia elementare degli intervalli superiormente aperti dello S_r euclideo e sia $F(I)$ una funzione definita in $\{I\}$. La definizione di integrale di Burkill data nel n. 2 conduce per una tale $F(I)$ ad un integrale che può essere raffrontato con l'originario integrale introdotto da Burkill negli spazi euclidei [21]). Ricordiamo qui brevemente quella definizione. Preso un intervallo I lo si decomponga in un numero finito di intervalli $I_1, \ldots, I_n$ e si consideri la somma

$$\sigma_F^* = \sum_{i=1}^{n} F(I_i).$$

Si indichino con $l^{*\prime}$, $l^{*\prime\prime}$ rispettivamente il minimo e il massimo limite della somma σ_F^* al tendere a zero del massimo diametro Δ degli intervalli della decomposizione. $l^{*\prime}$, $l^{*\prime\prime}$ sono detti da Burkill rispettivamente integrale inferiore ed integrale superiore della $F(I)$ nell'intervallo I.

La $F(I)$ è integrabile se $l^{*\prime}$, $l^{*\prime\prime}$ sono finiti ed uguali e il loro valore comune è allora l'integrale della $F(I)$ in I. È pressochè immediato vedere che se l', l'' sono i simboli introdotti nel n. 2 per la $F(I)$ in esame, si ha

$$l^{*\prime} \leq l' \leq l'' \leq l^{*\prime\prime}.$$

Da questo segue che ogni funzione $F(I)$ integrabile secondo la definizione data dal Burkill lo è pure secondo la definizione del n. 2. Non è vero il viceversa come prova il seguente semplice esempio: sia $F(I)$ una funzione così definita negli

---

21) Per la definizione originale si veda J. C. Burkill [2].

intervalli superiormente aperti dell'intervallo $I_0 \equiv (-1 \quad 1)$

$$F(I) \begin{cases} = (-1)^n \text{ se } I \equiv \left(-\dfrac{1}{n} \quad \dfrac{1}{n}\right) \\ \\ = 0 \text{ negli altri intervalli.} \end{cases}$$

È subito visto che $F(I)$ è integrabile in I_0 secondo la definizione da noi data ed è $\int_I F = 0$, mentre riesce $l^{*\prime} = -1$, $l^{*\prime\prime} = 1$.

Lo stesso esempio prova che per l'integrale superiore e l'integrale inferiore dell'originaria definizione di Burkill non vale l'analogo del teor. XIII venendo a meno la loro additività.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. BANACH: *Sur une classe de fonctions d'ensemble.* Fundam. Math., t. VI, 1924, pp. 170-188.

[2] J. C. BURKILL: *Functions of intervals.* Proc. London Math. Soc. s. II, vol. 22, 1924, pp. 275-310.

[3] — — *The derivatives of functions of intervals.* Fundam. Math., t. V, 1924, pp. 321-327.

[4] R. CACCIOPPOLI: *Sulle funzioni additive d'insieme.* Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. di Napoli, t. 33, 1927, pp. 150-153.

[5] F. CAFIERO: *Funzioni additive d'insieme ed integrazione negli spazi astratti.* Ist. Mat. Un. di Napoli, Edit. Liguori 1953.

[6] C. DE LA VALÉE-POUSSIN: *Integrales de Lebesgue-Functions d'ensemble-Classes de Baire.* Ghauthier-Villars, Paris, 1916.

[7] G. FICHERA: *Trasformazioni lineari Vol. I.* Ist. Mat. Univ. Trieste, 1954.

[8] — — *Sulla derivazione delle funzioni additive d'insieme.* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 1954, pp. 366-397.

[9] H. HAHN - A. ROSENTHAL: *Set functions.* University New-Mexico Press, Alburquerque, 1947.

[10] P. R. HALMOS: *Measure theory.* D. Van Nostrand Co. Inc. New York, 1950.

[11] O. HAUT - C. PAUC: *Uber die durch allgemeine Ableitungbasen bestimmten Topologien.* Ann. Math., s. IV, t. XXXVI, 1954, pp. 245-271.

[12] S. KEMPISTY: *Fonctions d'intervalle non additives.* Hermann e C. Editeurs, Paris, 1939.

[13] H. LEBESGUE: *Leçon sur l'integration.* Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[14] K. MAYRHOFER: *Inhalt und Mass.* Springer, Wien, 1952.

[15] J. v. NEUMANN: *Functional Operators Vol. I Measure and Integrals.* Ann. Math. Studies n. 21, 1950.

[16] O. NIKODYM: *Sur une généralisation des integrales de M. Radon.* Fundam. Math., t. 15, 1930, pp. 131-179.

[17] C. PAUC: *Complementés à la théorie de la dérivation de fonctions d'ensemble suivant de Possel e A. P. Morse.* C. R. Acad. Sci. Paris, 231, 1950, pp. 1406-1408.

[18] — — *Contributions à une théorie de la differentiation de fonctions d'intervalle sans hypothese de Vitali.* C. R. Acad. Sci Paris 236, 1953, pp. 1937-1939.

[19] T. RADÓ: *Length and area.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 30, 1948.

[20] J. RADON: *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengen funktionen* S. B. Akad. Wiss. Wien, 122, 1913, pp. 1295-1438.

[21] S. SAKS: *Theory of Integral.* II Ed. Hafner Pub. Co., New York, 1937.

[22] G. VITALI: *Sulle funzioni integrali.* Atti Accad. Sci. Torino, 40, 1905, pp. 753-766.

[23] — — *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.* Atti Accad. Sci. Torino, 43, 1908, pp. 75-92.

[24] A. C. ZANNEN: *Linear Analylis.* North Holland Publ. Co. Amsterdam, 1953.