RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

Rettifica alla memoria : « Sopra un problema di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$ »

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 25 (1956), p. 273-278

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__273_0>

RETTIFICA ALLA MEMORIA: SOPRA UN PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda)$

Nota (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

Nella Memoria *Sopra un problema di valori al contorno per l'equazione differenziale* $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda)$, inserita nel vol. XXIII (1954) di questi Rendiconti, da pag. 224 a pag. 244, (Memoria che indicherò nel seguito con « M »), la dimostrazione del teorema di esistenza per il problema (2) (uso le stesse notazioni di « M ») è infirmata da una inesattezza [1]).

(*) Pervenuta in Redazione il 3 aprile 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Ferrara.

1) Precisamente, a pag. 241 ho affermato che il limite verso cui converge (uniformemente) la successione (51) è lo stesso di quello verso il quale convergono (uniformemente) le successioni (49) e (50). Questa deduzione è possibile solo se, per ogni fissato x, la successione (41) è convergente in modo continuo (cfr., per es., C. KURATOWSKI, *Topologie*, vol. 1, 3e éd., Warzawa (1952), cap. II, n. IX, p. 93). Tale convergenza non è assicurata da nessuna delle ipotesi assunte. Colgo l'occasione per avvertire che l'ultima formula di pag. 244 va scritta nel modo che segue

$$c < \frac{c_{n+1} - \sum_1^n{}_j\, c_j \prod_1^n{}_{i \neq j} (x_{n+1} x_j x_i)}{\frac{1}{(n-1)!} \sum_1^n{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1}) \varphi(t) dt} \leq \frac{c_{n+1} - \sum_1^n{}_j\, c_j \prod_1^n{}_{i \neq j} (x_{n+1} x_j x_i)}{\frac{1}{(n-1)!} \sum_1^n{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1}) \psi(t) dt} \leq d < 0,$$

di guisa che è ancora la (5) che è soddisfatta.

1 9

In questa Nota rettifico la dimostrazione assumendo, però, la seguente ulteriore ipotesi:

per qualsivoglia n-upla di funzioni continue $[z_0(x), z_1(x), \ldots, z_{n-1}(x)]$ *nell'intervallo* (a, b), *la funzione*

$$\text{(6 bis)} \qquad \sum_1^n{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1}) f(t, z_0(t), z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t), \lambda) dt,$$

della variabile λ, *risulti, nell'intervallo* (c, d), *crescente se è soddisfatta la* (5), *decrescente se è soddisfatta la* (6).

Faccio presente che il teorema di esistenza enunciato in « M » per il problema particolare (7), conserva piena validità senza alcun'altra ipotesi supplettiva, perchè, in quel caso, la funzione indicata in (6 bis) diventa

$$\lambda \sum_1^n{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n-1}) g(t, z_0(t), z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t)) dt,$$

e questa è manifestatamente crescente non appena si ricordino le (8), (9) e il lemma del n. 2 a pag. 232.

1. - La dimostrazione del teorema di esistenza per il problema (2) è descritta, in « M », nel § 2, n. 3. Per evitare inutili ripetizioni, limitiamoci a dire dove e come va modificato il testo del suddetto paragrafo. Conserviamo allora il discorso fino alla riga dodicesima di pag. 237 e continuiamolo nel modo che segue.

Esistono quindi delle convenienti costanti A_s tali che, per ogni (x, λ) di R e qualunque sia l'elemento $[z_0(x, \lambda), z_1(x, \lambda), \ldots, z_{n-1}(x, \lambda)]$ di Σ, risulta

$$\text{(38)} \qquad | v_s(x, \lambda) | \leq A_s, \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Inoltre, per ogni fissato λ di (c, d), le funzioni $v_s(x, \lambda)$ sono equicontinue, anzi si può addirittura affermare che fissato comunque un $\varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un $\delta(\varepsilon)$, indipendente da λ, tale che se x_1, x_2 sono due numeri dell'intervallo (a, b) per i quali è $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, allora risulta

$$(39) \qquad |v_s(x_1, \lambda) - v_s(x_2, \lambda)| < \varepsilon, \qquad (s = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ebbene, indichiamo con $\Sigma(x)$ la porzione di Σ formata dagli elementi del tipo

$$(40) \qquad [z_0(x), z_1(x), \dots, z_{n-1}(x)],$$

con $z_s(x)$, $(s = 0, 1, \dots, n-1)$, funzioni, della sola variabile x, continue in (a, b), soddisfacenti le

$$(41) \qquad |z_s(x)| \leq A_s, \qquad (s = 0, 1, \dots, n-1),$$

e inoltre, per ogni fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, le

$$(42) \qquad |z_s(x_1) - z_s(x_2)| < \varepsilon, \qquad (s = 0, 1, \dots, n-1),$$

non appena sia $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon)$ essendo quello stesso numero per cui sussistono le (39).

Evidentemente, $\Sigma(x)$ è un insieme chiuso (rispetto a Σ), convesso e compatto.

In $\Sigma(x)$ definiamo ora una trasformazione funzionale Φ nel modo che segue.

L'elemento (40) di $\Sigma(x)$, in quanto elemento di Σ, avrà come corrispondente, nella trasformazione definita dalle (36), un certo elemento

$$(43) \qquad [v_0(x, \lambda), v_1(x, \lambda), \dots, v_{n-1}(x, \lambda)]$$

di Σ stesso. Ebbene, ripetendo le considerazioni fatte nel § 2 di « M », pp. 238-240, per passare dalla (45) alla (45 bis) e poi alle (46) e (47), si prova che

$$(44) \qquad v_0(x_{n+1}, \lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1}) f(t, z_0(t), z_1(t), \dots$$

$$\dots, z_{n-1}(t), \lambda) dt + \sum_{1}^{n}{}_{j}\, c_j \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j} (x_{n+1} x_j x_i),$$

e che

$$(45) \qquad v_0(x_{n+1}, c) \leq c_{n+1} \leq v_0(x_{n+1}, d)$$

oppure

$$v_0(x_{n+1},\ d) \leq c_{n+1} \leq v_0(x_{n+1},\ c) \tag{46}$$

a seconda che sussiste la (5) oppure la (6).

In ogni caso, quindi, attesa la continuità di $v_0(x_{n+1},\ \lambda)$ in $(c,\ d)$, esiste un valore μ di λ, in $(c,\ d)$, per cui risulta

$$v_0(x_{n+1},\ \mu) = c_{n+1}\,. \tag{47}$$

Tale valore μ è unico perchè, a norma della nuova ipotesi che abbiamo assunto, la funzione (44) è monotona in senso stretto. Allora nella n-upla (43) fissiamo per λ il valore μ ora trovato. Otteniamo la n-upla

$$[v_0(x,\ \mu),\ v_1(x,\ \mu),\ \dots,\ v_{n-1}(x,\ \mu)], \tag{48}$$

di funzioni della sola variabile x, la quale, per le (38) e (39), è un elemento di $\Sigma(x)$.

Ebbene, la trasformazione funzionale Φ sia quella che all'elemento (40) di $\Sigma(x)$ fa corrispondere l'elemento (48) di $\Sigma(x)$ stesso. Proveremo, nel prossimo n. 2, che Φ è una trasformazione continua. Allora, ricordate la convessità e compattezza di $\Sigma(x)$, possiamo dire che in $\Sigma(x)$ esiste almeno un elemento unito per la Φ. Ciò vuol dire che esiste un elemento del tipo indicato in (40), supponiamo che sia l'elemento (40) stesso, il quale dalla trasformazione definita dalle (36) vien mutato nell'elemento (43), e questo è tale che sulla orizzontale $\lambda = \mu$, individuata in modo univoco dalla (47), subordina la n-upla (48), di funzioni della sola variabile x, che si identifica con la n-upla (40).

Pertanto si ha

$$\begin{aligned} z_s(x) = {} & \int_{x_1}^{x} \frac{(x-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} f(t,\ z_0(t),\ z_1(t),\ \dots,\ z_{n-1}(t),\ \mu)dt + \\ & + c_1 \left[\prod_1^n{}_i (x,\ x_1,\ x_i)\right]^{(s)} + \sum_2^n{}_j \left[\prod_1^n{}_{i \neq j} (x,\ x_j x_i)\right]^{(s)} \Bigg[c_j - \\ & - \int_{x_1}^{x_j} \frac{(x_j-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t,\ z_0(t),\ z_1(t),\ \dots,\ z_{n-1}(t),\ \mu)dt\Bigg], \\ & (s = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1). \end{aligned} \tag{49}$$

Di qui, osservato che per un noto teorema di derivazione sotto il segno di integrale, risulta

$$z_s(x) = \frac{d^s}{dt^s} z_0(x), \tag{50}$$

ricordate le (37) e la (47), si riconosce che $[\mu, z_0(x)]$ è una soluzione del problema (2).

2. - Per completare la dimostrazione, proviamo ora la continuità della trasformazione Φ. A tale scopo osserviamo che Φ può essere pensata come prodotto, nell'ordine, della trasformazione Φ_1, che all'elemento (40) fa corrispondere l'elemento (43), per la trasformazione Φ_2, che all'elemento (43) fa corrispondere il numero μ, per la trasformazione Φ_3, che al numero μ fa corrispondere l'elemento (48).

Poichè è manifesta la continuità delle trasformazioni Φ_1 e Φ_3, basta allora provare la continuità della trasformazione Φ_2, oppure, ed è quanto basta, che il numero μ, individuato in modo univoco dalla (47), è un funzionale continuo nell'insieme Σ_{v_0}, chiuso, convesso, compatto, descritto dalle funzioni (44) al variare, in $\Sigma(x)$, dell'elemento (40). La continuità di questo funzionale è pressochè immediata.

Sia infatti

$$\{ v_{0i}(x_{n+1}, \lambda) \}, \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{51}$$

una successione di elementi di Σ_{v_0}, uniformemente convergente verso l'elemento $v_0(x_{n+1}, \lambda)$ di Σ_{v_0}; e sia

$$\{\mu_i\}, \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{52}$$

la successione di numeri reali per cui

$$v_{0i}(x_{n+i}, \mu_i) = c_{n+1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{53}$$

mentre sia μ il numero reale per cui $v_0(x_{n+1}, \mu) = c_{n+1}$. Si tratta di provare che la successione (52) converge verso μ. A tale scopo, fissato un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, determiniamo un numero reale η tale che sia

$$\eta < \min \left(| v_0(x_{n+1}, \mu - \varepsilon) |, \, | v_0(x_{n+1}, \mu + \varepsilon) | \right). \tag{54}$$

Al numero η, così determinato, corrisponde un numero intero $N(\eta)$ tale che per ogni $i > N(\eta)$ si ha

$$v_0(x_{n+1}, \lambda) - \eta < v_{0i}(x_{n+1}, \lambda) < v_0(x_{n+1}, \lambda) + \eta,$$

mentre la (54) e la monotonia in senso stretto della $v_0(x_{n+1}, \lambda)$ porgono le

$$v_0(x_{n+1}, \mu - \varepsilon) - \eta < c_{n+1} \quad ; \quad v_0(x_{n+1}, \mu + \varepsilon) + \eta > c_{n+1},$$

oppure le disuguaglianze opposte a seconda che sussiste la (5) oppure la (6). In ogni caso, per $i > N(\eta)$, ogni $v_{0i}(x_{n+1}, \lambda)$ assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo: $\mu - \varepsilon \leq \lambda \leq \mu + \varepsilon$; quindi l'univo valore μ_i per cui è soddisfatta la (53) è interno al detto intervallo.