

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO PIGNEDOLI

**Sull'aspetto fisico-matematico del problema delle  
pile atomiche. Teoria matematica delle vicissitudini  
subite dai neutroni veloci in mezzi moderatori**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 25 (1956), p. 250-272

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1956\\_\\_25\\_\\_250\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__250_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

# SULL' ASPETTO FISICO-MATEMATICO DEL PROBLEMA DELLE PILE ATOMICHE

TEORIA MATEMATICA DELLE VICISSITUDINI SUBITE  
DAI NEUTRONI VELOCI IN MEZZI MODERATORI

*Nota (\*) di ANTONIO PIGNEDOLI (a Bologna)*

## 1. - Introduzione.

Nei reattori nucleari (pile atomiche) si manifestano, notoriamente, delle variazioni di « reattività », in avviamento, oppure, per esempio, per affondamento od estrazione delle sbarre di controllo. Ora, per la teoria e per l'effettivo funzionamento dei reattori nucleari stessi, occorre conoscere come essi « rispondano » alle variazioni di reattività in parola <sup>(1)</sup>. Lo studio del problema si identifica, sostanzialmente, con quello delle vicissitudini subite dai neutroni veloci (emessi per scissione nucleare) per giungere, attraverso rallentamento in un mezzo moderatore, alle energie termiche: energie, in corrispondenza delle quali i neutroni stessi vengono, a loro volta, catturati dai nuclei d'uranio per dare luogo a nuove scissioni nucleari.

È certamente interessante condurre lo studio in questione sotto l'aspetto fisico-matematico, il che faremo nel presente lavoro, nel quale svolgeremo una teoria matematica assai ge-

---

(\*) Pervenuta in Redazione il 30 gennaio 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

<sup>1)</sup> Cfr. SALVETTI, Nuovo Cimento, 1949 - Sul regime transitorio dei reattori nucleari, Note I e II.

nerale delle vicissitudini subite dai neutroni veloci in un mezzo moderatore, e sotto condizioni al contorno aderenti pienamente ai fenomeni di tipo diffusivo che vi intervengono.

Facciamo subito notare che, per quanto la «vita» di un neutrone in una pila atomica sia, in prevalenza, vita di neutrone dotato di energia «termica», tuttavia, soprattutto per reattori nucleari a neutroni veloci, occorre considerare come non trascurabile il tempo impiegato dalle particelle per passare dalla condizione energetica di neutroni veloci a quella di neutroni termici<sup>2)</sup>.

## 2. - L'equazione di rallentamento e di diffusione dei neutroni «epitermici» e l'equazione dei neutroni «termici» in un reattore nucleare.

Consideriamo un mezzo moderatore costituito da nuclei atomici di massa  $M$  e contenente «sorgenti» di neutroni monocineticici di energia  $E_0$ . Detto  $\vartheta$  l'angolo di «scattering» nel sistema di riferimento dell'osservatore, detti  $l(E)$  il «libero cammino medio di scattering» dei neutroni di energia  $E$ , ricorderemo che, mentre

$$\xi = 1 + \frac{(M-1)^2/(M+1)^2}{1 - \frac{(M-1)^2}{(M+1)^2}} \log \frac{(M-1)^2}{(M+1)^2}$$

è la «perdita logaritmica media di energia» di un neutrone per urto contro un nucleo del moderatore, si dà il nome di «età» (age) di un neutrone di energia  $E$  alla quantità positiva:

$$(1) \quad \tau = \frac{1}{3(\overline{\cos \vartheta} - 1)} \int_{E_0}^E l^2(E') \frac{dE'}{E'}, \quad (\overline{\cos \vartheta} = \text{valor medio di } \cos \vartheta).$$

---

<sup>2)</sup> Tale tempo finito di rallentamento perderebbe, invece, importanza qualora si considerasse, oltre al contributo dei neutroni istantanei (cioè emessi all'atto della scissione), destinati a seguire le dette vicissitudini, anche quello dei neutroni ritardati. Ma, in questo lavoro, non ci occuperemo del contributo di tali particelle.

Indicata, allora, con  $\rho(x, y, z, t, \tau)$  la funzione « densità di rallentamento dei neutroni di età  $\tau$  nel punto  $P(x, y, z)$  », cioè il numero di neutroni che, per unità di volume e di tempo, raggiungono l'età  $\tau$ , vale, per la  $\rho$  stessa, l'equazione differenziale a derivate parziali <sup>3)</sup>:

$$(2) \quad \frac{\partial \rho(x, y, z, t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\mathfrak{D}(\tau)} \frac{\partial \rho(x, y, z, t, \tau)}{\partial t} = \\ = \Delta_2 \rho(x, y, z, t, \tau) + S(x, y, z, t, \tau),$$

dove  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , dove  $S(x, y, z, t, \tau)$  è la funzione (nota) di « distribuzione delle sorgenti » e dove, infine, si ha:

$$(3) \quad \mathfrak{D}(\tau) = vl(\tau)/3(1 - \overline{\cos \vartheta}).$$

La (2) è, in altri termini, l'equazione di rallentamento, con diffusione e assenza di cattura, dei neutroni « epitermici », cioè dei neutroni aventi energia compresa fra la soglia di scissione dell'Uranio ( $U^{238}$ ) e la soglia della cosiddetta « zona termica » <sup>4)</sup>.

Detta ora  $n(x, y, z, t)$  la funzione « densità dei neutroni termici nella pila atomica », essa soddisfa, in generale, all'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$(4) \quad D \cdot \Delta_2 n(x, y, z, t) + q(x, y, z, t) - \\ - \frac{1}{\tau_c} n(x, y, z, t) = \frac{\partial n(x, y, z, t)}{\partial t},$$

dove  $D$  è una costante « diffusiva » e  $\tau_c$  è pure costante (« vita media per cattura » dei neutroni termici) e dove la « funzione delle sorgenti di neutroni termici »  $q(x, y, z, t)$  rappresenta il

<sup>3)</sup> Cfr. R. E. MARSHAK, *Review of modern Physics*, 19, 185 (1947).

<sup>4)</sup> Cfr. E. FERMI, *Science*, 105, 27 (1947).

numero di neutroni che diventano termici per unità di tempo e di volume <sup>5)</sup>.

Nella (4) andrà introdotta, quindi, come funzione delle sorgenti  $q$ , la soluzione  $\rho$  della equazione differenziale (2) soddisfacente alle condizioni supplementari imposte dal problema.

### 3. - Riduzione, mediante L-trasformazione, del problema di rallentamento dei neutroni epitermici ad un classico problema della teoria del calore.

Prendiamo in considerazione la (2), per la quale opereremo la semplificazione consistente nel sostituire al coefficiente diffusivo  $\mathfrak{D}(\tau)$  il suo valor medio, costante,  $\mathfrak{D}_m$ . Alla funzione incognita  $\rho(x, y, z, t, \tau)$  imporremo, poi, di soddisfare alla condizione iniziale (rispetto a  $\tau$ ):

$$(5) \quad \rho(x, y, z, t, 0) = 0,$$

il che pare costituire una semplificazione lecita, anzi abbastanza naturale. Per quanto riguarda poi il comportamento di  $\rho$  sulla superficie  $\sigma$  di contorno del moderatore, è opportuno sostituire alla semplice condizione di annullamento della densità  $\rho$ :

$$(6) \quad \rho = 0, \text{ su } \sigma,$$

condizione che, a prima vista, sembrerebbe ben rappresentare la realtà fisica, l'altra condizione, più aderente alla situazione effettiva:

$$(I) \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} + h\rho = 0, \text{ (su } \sigma)$$

( $h =$  costante positiva,  $n$  normale esterna a  $\sigma$ ), esprime il fatto che si ha pure una diffusione neutronica non nulla attraverso la superficie  $\sigma$  di contorno del moderatore.

Operando sulla (2) una trasformazione di Laplace, semplice ed unilatera, rispetto al parametro  $\tau$ , abbiamo (essendo

---

<sup>5)</sup> È l'equazione della teoria « fenomenologica » dei neutroni termici in mezzi moderatori.

$p$  un numero reale positivo):

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \exp(-p\tau) \frac{\partial \rho(x, y, z, t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{\mathfrak{D}_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} \exp(-p\tau) \rho(x, y, z, t, \tau) d\tau = \\ & = \Delta_2 \int_0^{+\infty} \exp(-p\tau) \rho(x, y, z, t, \tau) d\tau + \int_0^{+\infty} \exp(-p\tau) S(x, y, z, t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

cioè, indicando rispettivamente con  $\bar{\rho}(x, y, z, t, p)$  e con  $\bar{S}(x, y, z, t, p)$  le  $L$ -trasformate rispetto a  $\tau$  delle funzioni  $\rho$  ed  $S$ :

$$\begin{aligned} & p\bar{\rho}(x, y, z, t, p) + \frac{1}{\mathfrak{D}_m} \frac{\partial \bar{\rho}(x, y, z, t, p)}{\partial t} = \\ & = \Delta_2 \bar{\rho}(x, y, z, t, p) + \bar{S}(x, y, z, t, p); \end{aligned}$$

quindi, in definitiva, otteniamo, per la funzione ausiliaria  $\bar{\rho}(x, y, z, t, p)$ , l'equazione differenziale a derivate parziali:

$$(7) \quad \Delta_2 \bar{\rho}(x, y, z, t, p) - \frac{1}{\mathfrak{D}_m} \frac{\partial \bar{\rho}(x, y, z, t, p)}{\partial t} - p\bar{\rho}(x, y, z, t, p) = -\bar{S}(x, y, z, t, p), \quad \left( \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

nella quale la funzione incognita spazio-temporale  $\bar{\rho}$  dipende, inoltre, anche dal parametro  $p$  di  $L$ -trasformazione. Alla (7) va, naturalmente, associata la condizione al contorno  $L$ -trasformata della (I):

$$(I') \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial n} + h\bar{\rho} = 0, \quad \text{su } \sigma.$$

Potremo pure considerare assegnata, per  $\bar{\rho}$ , una condizione iniziale rispetto al tempo  $t$ , il che equivale ad assegnare tale condizione per la funzione incognita  $\rho$ .

Ponendo

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(x, y, z, t, p) = \frac{1}{p} \exp(-p\mathfrak{D}_m t) R(x, y, z, t), \\ -\bar{S}(x, y, z, t, p) = \frac{1}{p} \exp(-p\mathfrak{D}_m t) Q(x, y, z, t), \end{array} \right.$$

la (7) diventa:

$$(7) \quad \Delta_2 R(x, y, z, t) - \frac{1}{\mathfrak{D}_m} \frac{\partial R(x, y, z, t)}{\partial t} = Q(x, y, z, t),$$

e a questa (equazione del calore con funzione delle sorgenti  $Q$ ) va associata la condizione al contorno:

$$(I'') \quad \frac{\partial R}{\partial n} + hR = 0.$$

Se si pone, ora

$$(9) \quad \begin{cases} Q(x, y, z, t) = f_1(x, y, z) \cos \omega t + f_2(x, y, z) \operatorname{sen} \omega t, \\ R(x, y, z, t) = U_1(x, y, z) \cos \omega t + U_2(x, y, z) \operatorname{sen} \omega t, \end{cases}$$

si ottiene il sistema:

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta_2 U_1 - \frac{\omega}{\mathfrak{D}_m} U_2 = f_1, \\ \Delta_2 U_2 + \frac{\omega}{\mathfrak{D}_m} U_1 = f_2. \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda di queste per  $i$ , ( $=\sqrt{-1}$ ), sommando e ponendo

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U_1(x, y, z) + iU_2(x, y, z); \\ f(x, y, z) &= f_1(x, y, z) + if_2(x, y, z), \end{aligned}$$

si ottiene, per la funzione  $U(x, y, z)$ , l'equazione a derivate parziali (valevole nella regione del moderatore):

$$(11) \quad \Delta_2 U(x, y, z) + \frac{i\omega}{\mathfrak{D}_m} U(x, y, z) = f(x, y, z)$$

alla quale va associata la condizione al contorno:

$$(12) \quad \frac{dU}{dn} + hU = 0, \quad \text{su } \sigma.$$

Se si indica, allora, con  $G(M, P)$  la funzione di Green, singolare in  $M$  come  $\frac{1}{r}$  (essendo  $r$  la distanza di un punto  $P$  della regione del moderatore dal punto  $M$  pure interno a tale

regione), funzione di Green tale che è:

$$(13) \quad \Delta_2 G = 0, \text{ nella regione del moderatore e che è, inoltre:}$$

$$(14) \quad \frac{dG}{dn} + hG = 0, \text{ su } \sigma,$$

si ha l'equazione integrale:

$$(15) \quad U = \frac{i\omega}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} G(M, P) U(P) d\mathcal{C}_P - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} G(M, P) f(P) d\mathcal{C}_P,$$

la quale si scinde nel sistema di due equazioni integrali nel campo reale:

$$(15') \quad \begin{cases} U_1 = -\frac{\omega}{4\pi \mathfrak{D}_m} \int_{\mathcal{C}} G(M, P) U_2(P) d\mathcal{C}_P - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} G(M, P) f_1(P) d\mathcal{C}_P, \\ U_2 = \frac{\omega}{4\pi \mathfrak{D}_m} \int_{\mathcal{C}} G(M, P) U_1(P) d\mathcal{C}_P - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} G(M, P) f_2(P) d\mathcal{C}_P, \end{cases}$$

dove si è indicata con  $\mathcal{C}$  la regione occupata dal moderatore.

Dunque, non essendo  $\frac{i\omega}{\mathfrak{D}_m}$  un autovalore del suo nucleo, la (15) ammette una ed una sola soluzione continua in  $\mathcal{C}$ , soddisfacente su  $\sigma$  alla data condizione al contorno.

Supponiamo, ora, di aver determinati gli autovalori, reali e positivi, e le autofunzioni, reali, del sistema omogeneo:

$$(16) \quad \Delta_2 U + \lambda U = 0, \text{ in } \mathcal{C}; \quad \frac{dU}{dn} + hU = 0, \text{ su } \sigma;$$

autofunzioni costituenti un sistema ortogonale, e supponiamo  $f$  sviluppabile in serie di funzioni della forma:

$$(17) \quad f = \sum_k a_k U_k, \quad \left[ a_k = \int_{\mathcal{C}} f U_k d\mathcal{C} \right],$$

essendo

$$a_k = \alpha_k + i\beta_k = \int_{\mathcal{C}} (f_1 + if_2) U_k d\mathcal{C}, \quad \alpha_k = \int_{\mathcal{C}} f_1 U_k d\mathcal{C}, \quad \beta_k = \int_{\mathcal{C}} f_2 U_k d\mathcal{C}.$$



Ponendo :

$$(18) \quad \begin{cases} U_1 = \sum_k A'_k U_k, & U_2 = \sum_k A''_k U_k, & (A_k = A'_k + iA''_k), \\ U = \sum_k A_k U_k = U_1 + iU_2, \end{cases}$$

e sostituendo nella equazione :

$$\Delta_2 U + i\Lambda U = f, \quad \left[ \Lambda = \frac{\omega}{\mathfrak{D}_m} \text{ (reale)} \right],$$

si ricavano, per le costanti  $A_k$ , i valori :

$$A_k = \frac{a_k}{i\Lambda - \lambda_k} = - \frac{\alpha_k \lambda_k - \beta_k \Lambda + i(\beta_k \lambda_k + \alpha_k \Lambda)}{\lambda_k^2 + \Lambda^2} = A'_k + iA''_k.$$

#### 4. - La L-antitrasformazione.

Possiamo ora, per un momento, supporre di aver determinato, attraverso le funzioni  $U_1$  ed  $U_2$ , la  $R(x, y, z, t)$  per i casi di interesse fisico dei quali intendiamo occuparci in seguito. Essendo nota  $R(x, y, z, t)$ , è nota la  $L$ -trasformata rispetto a  $\tau$  della funzione  $\rho(x, y, z, t, \tau)$ , « densità di rallentamento dei neutroni di età  $\tau$  nel punto  $P(x, y, z)$  ». E, invero, come sappiamo di avere posto :

$$\bar{\rho}(x, y, z, t, p) = \frac{1}{p} \exp(-p\mathfrak{D}_m t) \cdot R(x, y, z, t),$$

con  $\mathfrak{D}_m$  costante nota e  $p$  parametro di  $L$ -trasformazione. Avremo, allora :

$$\begin{aligned} \rho &= \mathcal{L}_{-1}[\bar{\rho}(x, y, z, t, p)] = \mathcal{L}_{-1} \left[ \frac{1}{p} \exp(-p\mathfrak{D}_m t) \cdot R(x, y, z, t) \right] = \\ &= R(x, y, z, t) \cdot \mathcal{L}_{-1} \left[ \frac{1}{p} \exp(-p\mathfrak{D}_m t) \right] = \mathbf{1}(\tau - \mathfrak{D}_m t) R(x, y, z, t) \end{aligned}$$

dove con  $\mathbf{1}(u)$  si è indicata la funzione nulla per  $u < 0$  ed unitaria per  $u \geq 0$ .

### 5. - Il problema non omogeneo, nel caso della regione sferica.

Poichè, dal punto di vista fisico-nucleare, è certamente interessante la teoria nel caso del moderatore di forma sferica, studiamo l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\Delta_2 U + \Lambda^* U = f,$$

ove

$$\Lambda^* = \frac{i\omega}{\mathfrak{D}_m}, \quad U = U_1 + iU_2, \quad f = f_1 + if_2, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

con la condizione al contorno:

$$\frac{dU}{dn} + kU = 0,$$

nel caso della regione sferica. In una regione sferica di raggio  $a$ , riferita alle coordinate polari  $(r, \theta, \varphi)$ , pensiamo, dunque, assegnato il nostro problema.

Supporremo la  $f(r, \theta, \varphi)$  rappresentabile mediante una serie di funzioni sferiche della forma

$$(19) \quad f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0} f_n(r) Y_n(\theta, \varphi),$$

con  $f_n$  ed  $Y_n$  funzioni complesse cioè con  $f_n = f_{n1} + if_{n2}$ ,  $Y_n = Y_{n1} + iY_{n2}$ . Notoriamente, per quanto riguarda la determinazione dei coefficienti  $f_n(r)$  dello sviluppo a secondo membro della (19), si ha la formula integrale:

$$f_n(r) Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi') Q_n(\theta', \varphi'; \theta, \varphi) \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

dove  $f(r, \theta', \varphi')$  è complessa e dove, del resto, i simboli sono ben noti nella teoria delle funzioni sferiche.

Ponendo, nella equazione:

$$\Delta_2 U + \Lambda^* U = \sum_{n=0} f_n Y_n, \quad \left( \Lambda^* = \frac{i\omega}{\mathfrak{D}_m} \right),$$

$$(20) \quad U(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0} U_n(r) Y_n(\theta, \varphi),$$

(dove le  $U_n$  saranno complesse), indi  $V_n(r) = rU_n(r)$ , si ha, per la determinazione della funzione complessa  $V_n(r)$ , l'equazione differenziale:

$$(21) \quad \frac{d^2 V_n(r)}{dr^2} + \left[ \Lambda^* - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] V_n(r) = rfn(r),$$

con le condizioni ai limiti:

$$(22) \quad V'_n(a) + \frac{ah-1}{a} V_n(a) = 0, \quad V_n(0) = 0.$$

Le soluzioni  $V(r)$  della (21), con la condizione (22), possono essere rappresentate, nell'intervallo  $0 \leq r \leq a$ , mediante una serie di funzioni del tipo:

$$(23) \quad V_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_{nk},$$

essendo le  $S_{nk}$  le autosoluzioni ortogonali della equazione differenziale:

$$(24) \quad \frac{d^2 S_n(r)}{dr^2} + \left[ \lambda - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] S_n(r) = 0,$$

soddisfacenti in  $0 \leq r \leq a$  alle stesse condizioni ai limiti cui debbono soddisfare le  $V_n(r)$ . Per quanto riguarda i coefficienti  $a_{nk}$  (che saranno complessi), poichè  $\Lambda^*$  (immaginario) non coincide con alcuno degli autovalori (reali)  $\lambda_{nk}$  che forniscono le autofunzioni  $S_{nk}$ , si ricava:

$$(25) \quad a_{nk} = \frac{\int_0^a r f_n(r) S_{nk}(r) dr}{(\Lambda^* - \lambda_{nk}) \int_0^a S_{nk}^2(r) dr},$$

$$\left[ \Lambda^* = \frac{i\omega}{\mathfrak{D}_m}, \quad f_n = f_{n1} + if_{n2}, \quad a_{nk} = \alpha_{nk} + i\beta_{nk} \right].$$

È noto che le  $S_n(r)$  di (24) si esprimono mediante funzioni di Bessel di ordine  $n + \frac{1}{2}$  ed anche sotto forma finita.

Ma è possibile fare, sugli autovalori dell'equazione differenziale (24), con le dette condizioni ai limiti, alcune semplici osservazioni non del tutto prive di interesse, per cui procederemo come segue.

Teniamo, intanto, presente che, posto:

$$S_n = r \xi^n Z_n \quad \text{con} \quad Z_n(\xi) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(t\xi) dt \quad \text{ed} \quad r = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}},$$

si ha:

$$(26) \quad S_n = Z_n r^{n+1} \lambda^{\frac{n}{2}} = \lambda^{\frac{n}{2}} r^{n+1} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tr \sqrt{\lambda}) dt = \\ = \mu_n \lambda^{\frac{n}{2}} r^{n+1} \cos(\theta r \sqrt{\lambda}),$$

essendo  $\theta$  un opportuno valore di  $t$  compreso fra zero ed uno ed essendo

$$\mu_n = \frac{2^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

Teniamo ancora presente che, ponendo:

$$T_n(\xi) = \int_0^1 (1-t^2)^n t \operatorname{sen}(t\xi) dt,$$

dalla condizione ai limiti per  $r=a$ , scaturisce l'equazione trascendente determinatrice degli autovalori  $\lambda_{nk}$  del parametro  $\lambda$ :

$$(27) \quad (ah + n)Z_n(a \sqrt{\lambda}) - a \sqrt{\lambda} T_n(a \sqrt{\lambda}) = 0.$$

Anzitutto, si vede subito che, nel caso particolare in cui sia  $n=1$ , l'equazione determinatrice degli autovalori del parametro  $\lambda$  si riduce alla:

$$(28) \quad \operatorname{tg}(a \sqrt{\lambda}) = a \sqrt{\lambda} \frac{ah - 2}{ah - 2 + a^2 \lambda},$$

cioè, ponendo  $ah - 2 = A$  (costante) ed  $a\sqrt{\lambda} = x$ , alla:

$$(28') \quad \operatorname{tg} x = \frac{Ax}{A + x^2}.$$

La determinazione grafica degli autovalori in questione è, dunque, ricondotta alla determinazione delle proiezioni sull'asse delle  $x$  delle intersezioni della tangentoide  $y = \operatorname{tg} x$  con la cubica  $y = \frac{Ax}{A + x^2}$ , dotata di un punto doppio isolato nel punto all'infinito dell'asse delle  $y$ .

Veniamo al caso in cui sia  $n = 2$ . L'equazione determinatrice degli autovalori è, in tale caso:

$$(29) \quad (2 + ah) \int_0^{a\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2\lambda}\right)^2 \cos \xi d\xi - \int_0^{a\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2\lambda}\right)^2 \xi \operatorname{sen} \xi d\xi = 0.$$

Calcolando per parti i due integrali che figurano nel primo membro della (29) ed eseguendo, si ottiene, per la determinazione degli autovalori nel caso di  $n = 2$ , l'equazione trascendente:

$$(29') \quad \operatorname{tg}(a\sqrt{\lambda}) = \frac{a\sqrt{\lambda}(a^2\lambda + 3ah - 9)}{4a^2\lambda - a^3h\lambda + 3ah - 9},$$

cioè, posto  $(3ah - 9) = B$  e  $a\sqrt{\lambda} = x$ , la

$$(29'') \quad \operatorname{tg} x = \frac{x^3 + Bx}{4x^2 - ahx^2 + B}.$$

Gli autovalori sono, dunque, graficamente forniti dalle proiezioni sull'asse delle  $x$  delle intersezioni della tangentoide  $y = \operatorname{tg} x$  con la cubica  $y = x^3 + Bx | 4x^2 - ahx^2 + B$  avente un punto doppio nodale nel punto improprio dell'asse delle  $y$ .

Venendo al caso di  $n = 3$ , l'equazione determinatrice degli autovalori di  $\lambda$ :

$$(30) \quad (3 + ah) \int_0^{a\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2\lambda}\right)^3 \cos \xi d\xi - \int_0^{a\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2\lambda}\right)^3 \xi \operatorname{sen} \xi d\xi,$$

con procedimento analogo, diventa, essendo, al solito,  $x = a \sqrt{\lambda}$ :

$$(30) \quad \operatorname{tg} x = \frac{(7 - ah)x^3 + (15ah + 150)x}{-x^4 + (27 - 6ah)x^2 + 15ah + 150},$$

cioè, posto  $(15ah + 150) = C$ , gli autovalori in questione appaiono dati dalle proiezioni sull'asse delle  $x$  delle intersezioni della tangente  $y = \operatorname{tg} x$  con la quintica:

$$y = \frac{Cx - (A - 5)x^3}{-x^4 - (2B - 9)x^2 + C},$$

la quale presenta un punto multiplo all'infinito dell'asse delle  $y$ , con molteplicità quattro.

Consideriamo ora il caso in cui sia  $n = 4$ . L'equazione trascendente che fornisce gli autovalori in questione è:

$$(31) \quad (4 + ah) \int_0^{a\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2\lambda}\right)^4 \cos \xi \, d\xi - \int_0^{a\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2\lambda}\right)^4 \xi \operatorname{sen} \xi \, d\xi = 0;$$

il che significa, eseguendo e ponendo  $a\sqrt{\lambda} = x$  e  $-2520ah - 29010 = D$ :

$$(32) \quad \operatorname{tg} x = \frac{-24x^5 + 935x^3 - 240ahx^3 + D \cdot x}{(-264 + 24ah)x^4 + (3890 - 1080ah)x^2 + D}.$$

La determinazione grafica degli autovalori per il caso in parola è, dunque, ricondotta allo stabilire le proiezioni sull'asse delle  $x$  delle intersezioni di una tangente con una quintica, per la quale il punto all'infinito dell'asse delle  $y$  è un punto quadruplo.

Eseguendo i calcoli per i casi  $n = 5$  ed  $n = 6$ , si vede che, dal punto di vista grafico, gli autovalori appaiono come proiezioni sull'asse delle  $x$  delle intersezioni di una tangente con due curve, rispettivamente diverse fra loro, ma entrambe del settimo ordine.

Nei casi  $n = 2s + 1$  ed  $n = 2s + 2$ , gli autovalori saranno dati rispettivamente dalle proiezioni sull'asse delle  $x$  delle intersezioni di una tangente con due curve di ordine  $2s + 3$ . Ma, per la determinazione degli autovalori per  $n$  qualunque,

si può ottenere una relazione ricorrente procedendo come segue. Indicando, rispettivamente, con  $H_n$  ed  $I_n$  i due integrali:

$$(33) \quad H_n = \int_0^{a\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2\lambda}\right)^n \cos \xi \, d\xi, \quad I_n = \int_0^{a\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2\lambda}\right)^n \xi \operatorname{sen} \xi \, d\xi,$$

si ottiene subito:

$$(34) \quad H_n = \frac{2n}{a^2\lambda} I_{n-1}.$$

Ma è anche, in virtù dell'equazione determinatrice degli autovalori per  $n$  qualunque:

$$(35) \quad (n + ah)H_n = I_n.$$

Si ottiene, allora, in definitiva, il sistema di relazioni ricorrenti:

$$(36) \quad \begin{cases} I_n = \frac{2n(n + ah)}{a^2\lambda} I_{n-1}, & (n = 2, 3, \dots) \\ H_n = I_n / (n + ah). \end{cases}$$

Sull'equazione differenziale (24) va ancora osservato che si può dare una formula asintotica per gli autovalori del parametro  $\lambda$  (ciò per confronto con l'equazione dei moti armonici scritta per una funzione soddisfacente alle stesse condizioni ai limiti di  $S_n$ ). Si trova, precisamente, per gli autovalori  $\lambda_{n,k}$  del parametro  $\lambda$ , la disuguaglianza:

$$\lambda_{n,k} > \frac{\pi^2(k-1)^2}{a^2} + \frac{n(n+1)}{a^2}$$

Per esempio, si ha

$$a) \text{ caso } n = 1; \quad \lambda_{1,k} > \frac{2 + \pi^2(k-1)^2}{a^2};$$

$$b) \text{ caso } n = 2; \quad \lambda_{2,k} > \frac{6 + \pi^2(k-1)^2}{a^2};$$

$$c) \text{ caso } n = 3; \quad \lambda_{3,k} > \frac{12 + \pi^2(k-1)^2}{a^2};$$

e così via.

### 6. - Il problema non omogeneo nel caso della regione cilindrica.

In una regione cilindrica  $\mathcal{C}$  avente raggio di base  $a$  ed altezza  $l$ , occupata dal moderatore e riferita al sistema di coordinate cilindriche  $r, \theta, z$ , consideriamo il sistema differenziale:

$$(37) \quad \begin{cases} \Delta_2 U(r, \theta, z) + \Lambda^* U(r, \theta, z) = f(r, \theta, z), & (\text{in } \mathcal{C}) \\ \frac{dU}{dn} + hU = 0, & (\text{sul contorno } \sigma), \end{cases}$$

$$\left[ \Lambda^* = \frac{i\omega}{\mathfrak{D}_m}, U = U_1 + iU_2, f = f_1 + if_2, (i = \sqrt{-1}) \right].$$

In tale sistema, supporremo la funzione  $f(r, \theta, z)$  rappresentabile, al solito, mediante la serie

$$(38) \quad f = \sum_k a_k U_k, \quad \left[ a_k = \int_{\mathcal{C}} f U_k d\mathcal{C} \right],$$

dove le  $U_k$  sono le autofunzioni del sistema omogeneo

$$(39) \quad \begin{cases} \Delta_2 U(r, \theta, z) + \lambda U(r, \theta, z) = 0, & (\text{in } \mathcal{C}) \\ \frac{dU}{dn} + hU = 0, & (\text{su } \sigma), \end{cases}$$

e dove il simbolismo non necessita più di chiarimenti. Ponendo, allora:

$$U = \sum_k A_k U_k$$

e sostituendo nella prima delle (37), si ha:

$$A_k = \frac{a_k}{\Lambda^* - \lambda_k},$$

dove  $\Lambda^*$  deve essere diverso da ogni  $\lambda_k$ , il che avviene certamente (essendo  $\Lambda^*$  immaginario).

Cerchiamo, dunque, gli autovalori  $\lambda_k$  e le corrispondenti autofunzioni  $U_k$  del problema omogeneo. L'equazione differenziale:

$$\Delta_2 U(r, \theta, z) + \lambda U(r, \theta, z) = 0$$



si espliciterà in coordinate cilindriche, come segue:

$$(40) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{dz^2} + \lambda U = 0.$$

La condizione diffusiva al contorno diventerà:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial U}{\partial r} + hU = 0, \text{ per } r = a & \text{(superficie laterale} \\ & \text{del cilindro);} \\ \frac{\partial U}{\partial z} - hU = 0, \text{ per } z = 0 & \text{(base inferiore} \\ & \text{del cilindro);} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + hU = 0, \text{ per } z = l & \text{(base superiore del} \\ & \text{cilindro stesso).} \end{array} \right.$$

Della (40) cerchiamo soluzioni elementari della forma

$$(42) \quad U(r, \theta, z) = Z(z) \cdot u(r, \theta).$$

Sostituendo, dedurremo:

$$Z(z) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} Z(z) \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} + u(r, \theta) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \lambda u(r, \theta) \cdot Z(z) = 0,$$

da cui, dividendo per  $u(r, \theta) \cdot Z(z)$ , ( $\neq 0$ ), otterremo:

$$\frac{1}{u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\lambda.$$

Pertanto, i due termini del primo membro debbono essere costanti. Sicchè, ponendo  $\lambda = p^2 + q^2$ , si avranno le due equazioni:

$$(43) \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + p^2 Z = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + q^2 u = 0.$$

La prima di esse ammette l'integrale generale:

$$(44) \quad Z(z) = C \cos pz + D \sin pz, \quad (C \text{ e } D \text{ costanti arbitrarie}).$$

La seconda è soddisfatta da

$$(45) \quad u(r, \theta) = J_n(qr)(A \cos n\theta + B \sin n\theta), \quad (A \text{ e } B \text{ cost. arb.}),$$

dove  $J_n(qr)$  è la funzione di BESSEL di prima specie di ordine  $n$  dell'argomento  $qr$ .

In virtù delle condizioni ai limiti, che debbono verificarsi sulle due basi del cilindro, avremo, con riferimento alla base  $z = 0$ ,  $pD = hC$ , cioè, assumendo, senza pregiudizio alcuno,  $D = 1$ :

$$(46) \quad p = hC, \quad C = \frac{p}{h}.$$

Con riferimento alla base  $z = l$ , avremo poi:

$$(47) \quad \operatorname{tg} pl = \frac{2ph}{p^2 - h^2}.$$

I valori di  $p$  sono, dunque, forniti dalle ascisse delle intersezioni di una tangente con una cubica. Si determinano poi i valori di  $C$ . La condizione valevole sulla superficie laterale del cilindro fornisce

$$\frac{\partial J_n(qr)}{\partial r} + hJ_n(qr) = 0, \quad \text{per } r = a,$$

cioè:

$$(48) \quad qJ'_n(qa) + hJ_n(qa) = 0,$$

e questa fornisce, per ogni intero  $n$ , gli autovalori  $q_n^{(j)}$  del parametro  $q$ .

La soluzione elementare considerata diventa, dunque:

$$(49) \quad U_{s,n}^{(j)} = \left( \frac{p_s}{h} \cos p_s z + \operatorname{sen} p_s z \right) J_n(q_n^{(j)} r) [A_{nj} \cos n\theta + B_{nj} \operatorname{sen} n\theta]$$

e la soluzione generale della (40), con le volute condizioni al contorno, sarà

$$(50) \quad U(r, \theta, z) = \sum_{s,n,j} U_{s,n}^{(j)} = \\ = \sum_s \sum_n \sum_j \left( \frac{p_s}{h} \cos p_s z + \operatorname{sen} p_s z \right) J_n(q_n^{(j)} r) [A_{nj} \cos n\theta + B_{nj} \operatorname{sen} n\theta],$$

dove la prima sommatoria è estesa a tutti gli autovalori del parametro  $p$ , la seconda a tutti gli interi  $n$ , la terza a tutti gli autovalori  $q_n^{(j)}$  del parametro  $q$ . Per quanto riguarda il

più piccolo autovalore  $p_1 \neq 0$  del parametro  $p$ , dall'esame, nel piano  $(p, y)$ , delle due curve:

$$y = \operatorname{tg} pl, \quad y = \frac{2hp}{p^2 - h^2},$$

si riconosce subito che si ha:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} h < p_1 < \frac{\pi}{2l}, \text{ per } h < \frac{\pi}{2l}; \\ \frac{\pi}{2l} < p_1 < h, \text{ per } \frac{\pi}{2l} < h < \frac{\pi}{l}; \\ \frac{\pi}{2l} < p_1 < \frac{\pi}{l}, \text{ per } h > \frac{\pi}{a}. \end{array} \right.$$

Ma, più in generale, considerate nel piano  $(p, y)$  le due suddette curve, essendo  $r\pi/l$  l' $r$ -esima intersezione (dopo l'origine) della tangentoide col semiasse positivo delle ascisse  $p$ , si osserverà che l'autovalore  $p_{r+1}$  risulta compreso fra  $r\pi/l$  e l'ascissa dell'intersezione della tangente geometrica alla tangentoide nel punto  $(r\pi/l, 0)$  con la cubica  $y = \frac{2hp}{p^2 - h^2}$ ; ascissa che è l'unica radice reale della equazione di terzo grado in  $p$ :

$$lp^3 - r\pi p^2 - (lh^2 + 2h)p + r\pi l^2 = 0.$$

Tale radice sia:

$$(52) \quad p = \bar{p}.$$

Si ha, dunque, la doppia disuguaglianza:

$$(53) \quad \frac{r\pi}{l} < p_{r+1} < \bar{p}, \quad (r = 1, 2, 3, 4, \dots).$$

Per quanto riguarda gli autovalori  $q_n^{(j)}$  del parametro  $q$ , si possono fare alcune semplici osservazioni. Considerata la funzione:

$$(54) \quad xJ'_n(x) + ahJ_n(x)$$

e indicatine con  $x_{n,1}; x_{n,2}; \dots; x_{n,\nu}; \dots$  gli zeri, si ha:

$$(55) \quad q_n^{(j)} = \frac{x_{n,j}}{a}.$$

La funzione (54) possiede una infinità numerabile di zeri, tutti reali e semplici, e, nel punto  $x = 0$ , presenta un contatto di ordine  $n$  con l'asse delle  $x$ . In merito alla distribuzione dei suddetti zeri, teniamo presenti le relazioni ricorrenti:

$$(56) \quad \begin{cases} 2xJ'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x), \\ \frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x). \end{cases}$$

In virtù di queste, discende:

$$\begin{aligned} xJ'_n(x) + ahJ_n(x) &= \frac{x}{2} J_{n-1}(x) - \frac{x}{2} J_{n+1}(x) + ahJ_n(x) = \\ &= \frac{x}{2} J_{n-1}(x) - \frac{x}{2} \left[ \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \right] + ahJ_n(x) = \\ &= \frac{x}{2} J_{n-1}(x) - nJ_n(x) + \frac{x}{2} J_{n-1}(x) + ahJ_n(x) = \\ &= xJ_{n-1}(x) + (ah - n)J_n(x). \end{aligned}$$

Sicchè gli zeri  $x_{n,j}$  da noi cercati risultano essere le soluzioni dell'equazione trascendente:

$$(56) \quad xJ_{n-1}(x) + (ah - n)J_n(x) = 0$$

cioè, graficamente, le ascisse dei punti intersezione delle due curve:

$$(57) \quad y = xJ_{n-1}(x),$$

$$(58) \quad y = (n - ah)J_n(x).$$

Suponiamo, dapprima, che sia:

$$(59) \quad n - ah < 0.$$

Indicati con  $j_{n,1}; j_{n,2}; j_{n,3}; \dots; j_{n,\nu}; \dots$  gli zeri della funzione di Bessel  $J_n(x)$  e con  $j_{n-1,1}; j_{n-1,2}; j_{n-1,3}; \dots; j_{n-1,\nu}; \dots$  i corrispondenti zeri della funzione di Bessel  $J_{n-1}(x)$ , tenendo presente il fatto che è:

$$(60) \quad j_{n-1,\nu} < j_{n,\nu} < j_{n-1,\nu+1}$$

e tenendo pure presente l'andamento oscillatorio delle fun-





segnare un confine superiore per la somma dei quadrati dei reciproci degli autovalori  $\lambda_k$  nel caso del cilindro. Si ha, precisamente, supponendo  $a < l$ , essendo  $a$  il raggio di base del cilindro ed  $l$  la sua altezza, quindi  $a$  il raggio di una sfera tangente internamente al cilindro ed  $R = \sqrt{a^2 + l^2}/4$  il raggio della sfera circoscritta al cilindro:

$$(68) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} < \frac{30a^2l \sqrt{(4a^2 + l^2)^3} + 15a^4l^2 - 64a^5 \sqrt{4a^2 + l^2}}{240(4a^2 + l^2)}.$$

Nel caso in cui sia, invece,  $l < a$ , la sfera interna avrà raggio  $l$  e risulterà:

$$(69) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} < \frac{30a^2l \sqrt{(4a^2 + l^2)^3} + 15a^4l^2 - 64l^5 \sqrt{4a^2 + l^2}}{240(4a^2 + l^2)}.$$

Nel caso particolare, infine, in cui sia  $l = a$ , risulta:

$$(70) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} < \frac{(86 \sqrt{5} - 15)a^4}{1200}.$$

### 7. - L'equazione dei neutroni « termici ».

Dal complesso delle considerazioni precedentemente svolte, appare che possiamo ritenere risolta l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, y, z, t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\mathcal{D}_m} \frac{\partial \rho(x, y, z, t, \tau)}{\partial t} = \\ = \Delta_2 \rho(x, y, z, t, \tau) + \mathcal{S}(x, y, z, t, \tau) \end{aligned}$$

con le solite condizioni al contorno ed « iniziali » rispetto alla « età » ed anche rispetto al tempo  $t$  (per il che immagineremo usati i soliti procedimenti « alla Fourier » di determinazione dei coefficienti di una serie di autofunzioni ortonormali in modo da soddisfare, appunto, alle condizioni iniziali). Possiamo, dunque, ritenere ora nota la funzione  $\rho(x, y, z, t, \tau)$ , che introdurremo come « funzione delle sorgenti »

$q$  (vedi quanto detto al § 2 del presente lavoro) nell'equazione dei neutroni termici, supponendo, naturalmente, assegnato a  $\tau$  quel valore  $\tau_0$  che corrisponde all'«età» dei neutroni giunti alla «soglia» dell'energia termica.

Il problema per la funzione  $n(x, y, z, t)$  si riduce, dunque, a un problema del calore, con assegnata condizione iniziale e con condizioni di tipo diffusivo al contorno delle regioni che interessano.