

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUCIANO DE VITO

Sugli autovalori e sulle autosoluzioni di una classe di trasformazioni hermitiane

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 25 (1956), p. 144-175

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__144_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUGLI AUTOVALORI E SULLE AUTOSOLUZIONI DI UNA CLASSE DI TRASFORMAZIONI HERMITIANE

Memoria () di LUCIANO DE VITO (a Trieste) (**)*

PREFAZIONE

È noto che una trasformazione lineare, hermitiana e totalmente continua di uno spazio hilbertiano in una sua parte è perfettamente individuata appena ne sia noto lo spettro ed un sistema spettrale di autosoluzioni; in base a ciò si comprende quindi l'interesse che riveste il problema della determinazione degli autovalori di una trasformazione siffatta, sia dal punto di vista teorico che pratico. Mentre è classico e di abbastanza semplice applicazione un metodo per il calcolo per difetto (per eccesso) degli autovalori di una trasformazione hermitiana totalmente continua definita positiva (negativa) ed è il classico metodo di Ritz, o come altri dice, di Rayleigh-Ritz, più complesso si presenta il problema relativo alla determinazione per eccesso (per difetto) per i detti autovalori.

Un procedimento, avente carattere di generalità, è stato proposto dal Weinstein ma la sua attuazione pratica urta spesso contro insormontabili difficoltà, dato che esso presupp-

(*) Pervenuta in Redazione il 25 ottobre 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Trieste.

(**) Il presente lavoro, eseguito per l'I.N.A.C. nell'Istituto Matematico dell'Università di Trieste, è stato oggetto di una comunicazione fatta dall'autore al V Congresso dell'U.M.I. (Pavia-Torino 6-12 ottobre 1955).

pone la possibilità di risolvere altri problemi che possono essere di difficoltà non minore di quello iniziale, quale ad esempio quello consistente nel determinare gli zeri di una funzione meromorfa nota mediante sviluppo in serie.

Nel presente lavoro, ispirandomi a procedimenti del tipo di quelli contenuti in un recente libro del Prof. Fichera¹⁾, dopo aver approfondito il metodo di Ritz per una classe di trasformazioni non totalmente continue, che interessa particolarmente le applicazioni, pervengo a dare un teorema la cui applicazione può integrare il metodo di Ritz per la valutazione dell'errore di approssimazione. Precisamente viene ad essere indicato un funzionale che ammette come massimo (minimo), in una opportuna classe, lo stesso autovalore che il funzionale di Ritz ammette come minimo (massimo) in una classe conveniente di vettori dello spazio di Hilbert. È interessante la circostanza che ogni successione minimante (massimante) il funzionale di Ritz è massimante (minimante) il funzionale introdotto in questo lavoro. Alla fine vengono riferiti i risultati di alcune applicazioni numeriche relative agli autovalori delle membrane e delle piastre ellittiche.

CAPITOLO I.

Metodo di Ritz per il calcolo di autovalori ed autosoluzioni per le trasformazioni lineari hermitiane dotate di trasformazioni inverse totalmente continue.

Sia S uno spazio lineare hilbertiano che supporremo completo e separabile. Indicato con u il generico punto di S sia $T(u)$ una trasformazione lineare tale che: 1° $T(S) \subset S$; 2° sia hermitiana (cioè sia tale che per ogni coppia di punti u e v di S sussista la relazione: $(T(u), v) = (u, T(v))$); 3° sia totalmente continua (cioè sia continua e trasformi insiemi limitati in insiemi compatti). Chiameremo autovalore della tra-

¹⁾ Cfr. [9].

sformazione T ogni autovalore dell'equazione $T(u) - \lambda u = \omega$ (ω essendo lo zero di S) e rango di un autovalore il numero di autosoluzioni linearmente indipendenti ad esso relative. È noto che, se S non ha dimensione finita e se il rango dell'autovalore $\lambda = 0$ è finito, la trasformazione T ammette tutta una successione di autovalori reali di rango finito, che ha come unico punto di accumulazione sull'asse reale lo zero. Se con $\{\lambda_k\}$ indichiamo tale successione di autovalori, e con $\{u_k\}$ un corrispondente sistema ortonormale di autosoluzioni, sussiste per T la seguente rappresentazione spettrale:

$$(1) \quad T(u) = \sum_k \lambda_k (u, u_k) u_k.$$

Vogliamo infine ricordare, perchè ci sarà utile nel seguito, il seguente lemma che fornisce un criterio di compattezza negli spazi hilbertiani completi separabili ²⁾.

LEMMA 1° - Condizione necessaria e sufficiente perchè l'insieme U dello spazio di Hilbert S sia compatto è che, assunto in S il sistema ortonormale e completo $\{v_k\}$, la serie $\sum_k |(u, v_k)|^2$ sia uniformemente convergente al variare di u in U e la sua somma sia limitata da un numero L ³⁾.

Sia V una varietà lineare contenuta in S . In V sia definita una trasformazione lineare $u = E(v)$ il cui codominio $E(V)$ sia contenuto in S e contenga V .

Faremo le seguenti ipotesi:

1) La E è dotata di trasformazione inversa E^{-1} .

2) Esiste una trasformazione T definita in S e con $T(S) \subset S$, hermitiana e totalmente continua, tale che per ogni $u \in E(V)$ si abbia:

$$(2) \quad T(u) = E^{-1}(u).$$

3) Tutte le autosoluzioni dell'equazione:

$$(3) \quad T(u) - \lambda u = \omega$$

²⁾ Cfr. [9] pagg. 231-232.

³⁾ Per le definizioni e i teoremi richiamati in questa parte vedasi [9] pagg. 213 e seg.

relative a qualunque autovalore λ appartengono alla varietà V .
 Sussiste il seguente teorema:

I. - Si consideri l'equazione:

$$(4) \quad E(v) - \mu v = \omega.$$

Essa è dotata di autovalori. Considerando l'insieme $\{\mu_k\}$ ottenuto prendendo i reciproci dei numeri dell'insieme $\{\lambda_k\}$ degli autovalori relativi alla (3), si ottiene tutto l'insieme degli autovalori della trasformazione E . Ogni autosoluzione della (4) è tale per la (3) e viceversa.

Dim. - La dimostrazione è un'ovvia conseguenza dell'osservazione secondo cui, ponendo $u = E(v)$, la (4) si muta nella (3), e delle ipotesi ammesse. Evidentemente nell'insieme $\{\mu_k\}$ ogni autovalore è ripetuto un numero di volte pari alla rispettiva molteplicità.

II. - Detto $\{v_k\}$ un sistema ortonormale di autosoluzioni della (4) corrispondente al sistema degli autovalori $\{\mu_k\}$, ed indicato con $V^{(k-1)}$ l'insieme dei vettori di V verificanti le condizioni: $(v, v_h) = 0$ ($h = 1, 2, \dots, k-1$) [$V^{(0)} = V$], si ha, posto

$$M(v) = \frac{(E(v), v)}{\|v\|^2}, \quad N(v) = \frac{\|E(v)\|^2}{\|v\|^2}:$$

$$(5) \quad \mu_k^2 = N(v_k) = \min_{V^{(k-1)}-\omega} N(v)$$

e se la forma quadratica $(T(u), u)$ è definita (positiva o negativa) in S :

$$(6) \quad |\mu_k| = |M(v_k)| = \min_{V^{(k-1)}-\omega} |M(v)|.$$

Dim. - Si osservi intanto che, se è $v \in V^{(k-1)}$, il vettore $u = E(v)$ è contenuto nella varietà $S^{(k-1)}$ di S , avendo indicato con $S^{(k-1)}$ l'insieme dei vettori di S per cui $(u, v_h) = 0$ ($h = 1, 2, \dots, k-1$), [$S^{(0)} = S$].

Infatti si ha, per $h = 1, 2, \dots, k-1$:

$$(E(v), v_h) = \frac{1}{\lambda_h} (E(v), T(v_h)) = \frac{1}{\lambda_h} (T[E(v)], v_h) = \frac{1}{\lambda_h} (v, v_h) = 0.$$

Posto $u = E(v)$, riesce per $v \in V^{(k-1)}$ e per la (1):

$$|M(v)| = \frac{|(E(v), v)|}{\|v\|^2} = \frac{\left| \frac{\sum_{s \geq k} \lambda_s |(u, v_s)|^2}{\sum_{s \geq k} \lambda_s^2 |(u, v_s)|^2} \right|}{\|v\|^2} \geq \frac{1}{|\lambda_k|} = |\mu_k|$$

sussistendo il segno = per $v = v_k$. E analogamente:

$$N(v) = \frac{\|E(v)\|^2}{\|v\|^2} = \frac{\|u\|^2}{\|T(u)\|^2} \geq \frac{1}{\lambda_k^2} = \mu_k^2, \quad N(v_k) = \mu_k^2.$$

Premessi tali teoremi, siamo ora in grado di giustificare il *metodo di Ritz* per il calcolo degli autovalori delle trasformazioni di tipo E :

III. - Sia $\{w_k\}$ un sistema di punti linearmente indipendenti contenuti in V e tale che $\{E(w_k)\}$ sia un sistema completo in $E(V)$. Siano $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots, \mu_n^{(n)}$ le n radici reali disposte in ordine di modulo crescente dell'equazione:

$$(7) \quad \text{Det} [(E(w_h), w_k) - \mu(w_h, w_k)] = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Si ha, fissato comunque p : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k^{(n)} = \mu_k$ ($k = 1, 2, \dots, p$), nell'ipotesi che T sia definita (positiva o negativa) in S .

Dim. - Proviamo l'assunto per $k = 1$.

Fatto $u = E(v)$ si ha:

$$|\mu_1| = \min_{V-\omega} \frac{|(E(v), v)|}{\|v\|^2} = \min_{E(V)-\omega} \frac{|(u, T(u))|}{\|T(u)\|^2}$$

mentre l'equazione (7) assume la forma:

$$(8) \quad \text{Det} [(u_h, T(u_k)) - \mu(T(u_h), T(u_k))] = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

ove $\{u_h = E(w_h)\}$ è, per ipotesi, un sistema completo in $E(V)$.

Poniamo inoltre: $R(u) = \frac{(u, T(u))}{\|T(u)\|^2}$; questo funzionale è continuo in $S - \omega$ dato che $T(u) = \omega$ non ammette autoso-
luzioni.

Inoltre, se $u \in E(V)$, si ha $R(u) = M(v)$ per $v = T(u)$.

Se la forma $(T(u), u)$ è definita positiva, ho che, per la continuità di $R(u)$ e la completezza del sistema $\{u_k\}$, si può trovare un punto $u_1^{(n_\varepsilon)} = \sum_1^{n_\varepsilon} \gamma_k u_k$ tale che:

$$\mu_1 \leq R(u_1^{(n_\varepsilon)}) < \mu_1 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Ora, $\mu_1^{(n_\varepsilon)}$, che in tal caso è la più piccola radice dell'equazione (8), è il minimo di $R(u)$ nella varietà U_{n_ε} determinata dai punti $u_1, u_2, \dots, u_{n_\varepsilon}$, onde:

$$\mu_1 \leq \mu_1^{(n_\varepsilon)} \leq R(u_1^{(n_\varepsilon)}) < \mu_1 + \varepsilon$$

donde l'asserto.

È da notare pertanto che $\{\mu_1^{(n)}\}$ converge a μ_1 non crescendo.

Per provare che $\mu_1^{(n_\varepsilon)} = \min_{U_{n_\varepsilon}} R(u)$ si è fatto ricorso allo spazio S_{n_ε} dei vettori complessi $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_\varepsilon})$, che si è posto in corrispondenza con U_{n_ε} attraverso la relazione $u = \sum_1^{n_\varepsilon} \gamma_k u_k$, reso hilbertiano con la seguente definizione di prodotto scalare:

$$(\gamma, \gamma^*) = \sum_{h, k}^{1, n_\varepsilon} (T(u_h), T(u_k)) \gamma_h \bar{\gamma}_k^*.$$

Quindi si è introdotto il funzionale bilineare hermitiano:

$$\Phi_{n_\varepsilon}(\gamma, \gamma^*) = \sum_{h, k}^{1, n_\varepsilon} (u_h, T(u_k)) \gamma_h \bar{\gamma}_k^*$$

e la corrispondente trasformazione hermitiana T_{n_ε} tale che

$$\Phi_{n_\varepsilon}(\gamma, \gamma^*) = (T_{n_\varepsilon}(\gamma), \gamma^*) \text{ onde } R(u) = \frac{(T_{n_\varepsilon}(\gamma), \gamma)}{\|\gamma\|^2} = Q(\gamma) \text{ con } u =$$

$$= \sum_1^{n_\varepsilon} \gamma_k u_k.$$

Ora è noto che $\mu_1^{(n_\varepsilon)} = \min_{S_{n_\varepsilon}} Q(\gamma)$, donde l'asserto.

Se invece la forma $(T(u), u)$ è definita negativa, μ_1 è il massimo di $R(u)$ in $E(V) - \omega$, onde

$$\mu_1 \geq R(u_1^{(n_\varepsilon)}) > \mu_1 - \varepsilon, \quad \mu_1 \geq \mu_1^{(n_\varepsilon)} \geq R(u_1^{(n_\varepsilon)}) > \mu_1 - \varepsilon.$$

Supponiamo ora di aver già provato che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k^{(n)} = \mu_k$ ($k = 1, 2, \dots, p-1$); vogliamo provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_p^{(n)} = \mu_p$.

Supposto $n > p$, sia:

$$(9) \quad \sum_1^n [(u_h, T(u_k)) - \mu_s^{(n)}(T(u_h), T(u_k))] \bar{c}_k^{(n,s)} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n) \\ (s = 1, 2, \dots, p)$$

$$(10) \quad \sum_{h,k}^{1,n} (u_h, u_k) c_h^{(n,s)} \bar{c}_k^{(n,s)} = 1.$$

Posto $z_s^{(n)} = \sum_1^n c_k^{(n,s)} u_k$, riesce:

$$(11) \quad R(z_s^{(n)}) = \mu_s^{(n)}.$$

Detto $\{v_k\}$ il sistema dedotto da $\{w_k\}$ col procedimento di ortonormalizzazione, si ha:

$$T(z_s^{(n)}) = \sum_1^n c_k^{(n,s)} w_k = \sum_1^n \gamma_k^{(n,s)} v_k = \sum_1^n (T(z_s^{(n)}), v_k) v_k$$

onde:

$$z_s^{(n)} = \sum_1^n \gamma_k^{(n,s)} E(v_k) = \sum_1^n (T(z_s^{(n)}), v_k) E(v_k).$$

Ora, sostituendo questa espressione di $z_s^{(n)}$ in (11), ho:

$$\sum_{h,k}^{1,n} (E(v_h), v_k) \gamma_h^{(n,s)} \bar{\gamma}_k^{(n,s)} - \mu_s^{(n)} \sum_1^n |\gamma_h^{(n,s)}|^2 = 0$$

la quale è, nel nuovo riferimento di S_n , l'equazione dell'ipersuperficie che nel primo riferimento aveva equazione:

$$\sum_{h,k}^{1,n} (u_h, T(u_k)) c_h^{(n,s)} \bar{c}_k^{(n,s)} - \mu_s^{(n)} \sum_{h,k}^{1,n} (T(u_h), T(u_k)) c_h^{(n,s)} \bar{c}_k^{(n,s)} = 0.$$

Poichè nel punto corrispondente a $z_s^{(n)}$, nel primo riferimento, si annullavano tutte le derivate prime del 1° membro dell'equazione dell'ipersuperficie ed avendo questo fatto un significato geometrico intrinseco, tale annullamento delle derivate prime dovrà verificarsi in quel punto anche nel nuovo

riferimento, onde trovo le condizioni cui devono soddisfare le $\gamma_h^{(n, s)}$:

$$\sum_1^n E(v_h), v_k \bar{\gamma}_k^{(n, s)} = \mu_s^{(n)} \bar{\gamma}_h^{(n, s)} \quad (h = 1, \dots, n).$$

Da queste, se $\mu_s^{(n)} \neq 0$, si trae:

$$\begin{aligned} |(T(z_s^{(n)}), v_h)|^2 &= |\gamma_h^{(n, s)}|^2 = \\ &= \frac{1}{\mu_s^{(n)^2}} \left| \sum_1^n E(v_h), v_k \bar{\gamma}_k^{(n, s)} \right|^2 = \frac{1}{\mu_s^{(n)^2}} \left| \sum_1^n v_h, E(v_k) \bar{\gamma}_k^{(n, s)} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{\mu_s^{(n)^2}} \left| v_h, \sum_1^n E(v_k) \gamma_k^{(n, s)} \right|^2 = \frac{1}{\mu_s^{(n)^2}} |v_h, z_s^{(n)}|^2, \end{aligned}$$

e quindi:

$$|(z_s^{(n)}, v_h)|^2 = \mu_s^{(n)^2} |(T(z_s^{(n)}), v_h)|^2.$$

Supposto $s \leq p - 1$, è possibile determinare una costante $A > 0$ tale che definitivamente riesca $|\mu_s^{(n)}| < A$.

Si ha allora: $|(z_s^{(n)}, v_h)|^2 \leq A^2 |(T(z_s^{(n)}), v_h)|^2$ e poichè $\|z_s^{(n)}\| = 1$ e T è trasformazione totalmente continua, la successione $\{T(z_s^{(n)})\}$ è compatta onde tale riesce, per il lemma 1°, la successione $\{z_s^{(n)}\}$ ($\{v_h\}$ infatti, poichè dedotto da $\{w_h\}$, è completo perchè tale è $\{w_h\}$; la completezza di $\{w_h\}$ in V si deduce dalla completezza, ammessa per ipotesi, di $\{E(w_h)\}$ in $E(V)$ dato che T è continua; ma, vedremo subito, un sistema completo in V è completo anche in S).

Sia $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ una qualsivoglia successione di numeri naturali. Possiamo da essa estrarre una successione $n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k}, \dots$ tale che le $p - 1$ successioni di vettori $\{z_s^{(n_{i_k})}\}$ ($s = 1, 2, \dots, p - 1$) siano convergenti.

Poniamo: $z_s = \lim_{k \rightarrow \infty} z_s^{(n_{i_k})}$ ($s = 1, 2, \dots, p - 1$) e poichè è: $R(z_s^{(n_{i_k})}) = \mu_s^{(n_{i_k})}$, passando al limite, per la continuità di R , ho:

$$R(z_s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_s^{(n_{i_k})} = \mu_s \quad (s = 1, 2, \dots, p - 1).$$

In particolare è: $R(z_1) = \mu_1$; osserviamo ora che la mancanza dello zero nell'insieme caratteristico della trasforma-

zione T implica che ogni suo sistema ortonormale di autosoluzioni è completo in S .

Ogni siffatto sistema, d'altra parte, è sempre contenuto in $V \subset E(V)$, onde $E(V)$ contiene l'inviluppo lineare del sistema in questione. Ma, per la predetta completezza di tale sistema, il suo inviluppo è una base per S ; ne segue che anche $E(V)$ è una base per S . Di qui segue che $|\mu_1| = \min_{S-\omega} |R(u)|$.

Infatti:

$$|\mu_1| = \min_{V-\omega} |M(v)| = \min_{E(V)-\omega} |R(u)|, \text{ per } u = E(v).$$

Ma, per la continuità di $R(u)$ e per il fatto, ora mostrato, che $E(V)$ è una base per S , segue che: $\min_{E(V)-\omega} |R(u)| = \min_{S-\omega} |R(u)|$

onde $|\mu_1| = \min_{S-\omega} |R(u)|$ e precisamente:

$$\mu_1 = \min_{S-\omega} R(u) \quad \text{se } (T(u), u) \text{ è definita positiva,}$$

$$\mu_1 = \max_{S-\omega} R(u) \quad \text{se } (T(u), u) \text{ è definita negativa}$$

e poichè $\mu_1 = R(z_1)$, in entrambi i casi è evidente che:

$$\left[\frac{dR(z_1 + \varepsilon u)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0, \text{ quale si sia il punto } u \text{ in } S.$$

Eseguido detto calcolo si trova:

$$\mathcal{R}[(u, T(z_1))] = \mu_1 \mathcal{R}[(T(u), T(z_1))]$$

e sostituendo u con iu si ha:

$$\mathcal{I}[(u, T(z_1))] = \mu_1 \mathcal{I}[(T(u), T(z_1))]$$

onde $(u, T(z_1) - \mu_1 T^2(z_1)) = 0$; ciò è in particolare vero per $u = T(z_1) - \mu_1 T^2(z_1)$ dato che è vero per ogni punto di S , per cui si conclude che:

$$T^2(z_1)\mu_1 - T(z_1) = \omega$$

cioè

$$T(T(z_1)\mu_1 - z_1) = \omega.$$

Ma siccome sappiamo che lo zero non è autovalore per T si ha: $T(z_1) - \lambda_1 z_1 = \omega$; perciò z_1 è un'autosoluzione di T relativa a λ_1 e quindi di E relativa a μ_1 .

Consideriamo ora lo spazio hilbertiano completo $S^{(1)}$ costituito da tutti i vettori u di S per i quali si ha: $(z_1, u) = 0$.

Si ha $V^{(1)} = V \cdot S^{(1)}$, ove con $V^{(1)}$ s'intende l'insieme dei punti di V per cui $(v, z_1) = 0$.

Si ha inoltre $E(V^{(1)}) = S^{(1)} \cdot E(V)$. Infatti $E(V^{(1)})$ è l'insieme dei punti u di $E(V)$ tali che $(T(u), z_1) = 0$. Ma: $(T(u), z_1) = (u, T(z_1)) = \lambda_1(u, z_1)$, donde l'assunto.

Pertanto:

$$|\mu_2| = \min_{V^{(1)}-\omega} |M(v)| = \min_{E(V^{(1)})-\omega} |R(u)| = \min_{S^{(1)} \cdot E(V)-\omega} |R(u)|,$$

e poichè $S^{(1)} \cdot E(V)$ contiene ogni autosoluzione ortogonale a z_1 , si può mostrare, col solito ragionamento, che $S^{(1)} \cdot E(V)$ è una base per $S^{(1)}$, onde

$$|\mu_2| = \min_{S^{(1)} \cdot E(V)-\omega} |R(u)| = \min_{S^{(1)}-\omega} |R(u)|.$$

Ora, dal fatto che $(T(z_1^{(n_{1k})}), T(z_2^{(n_{1k})})) = 0$ segue: $(T(z_1), T(z_2)) = 0$ (per la continuità di T); ma $(T(z_1), T(z_2)) = (T^2(z_1), z_2) = \lambda_1^2(z_1, z_2)$ onde $z_2 \subset S^{(1)} - \omega$.

Ripetendo nello spazio $S^{(1)}$ il ragionamento prima fatto nello spazio S si arriva a:

$$(u, T(z_2) - \mu_2 T^2(z_2)) = 0$$

quale si sia $u \subset S^{(1)}$.

Ma $(T(z_2) - \mu_2 T^2(z_2), z_1) = 0$, per cui, facendo $u = T(z_2) - \mu_2 T^2(z_2)$, si ha $T(T(z_2) - \lambda_2 z_2) = \omega$ cioè $T(z_2) - \lambda_2 z_2 = \omega$.

Questo porta a riconoscere in z_2 un'autosoluzione di T relativa a λ_2 (cioè di E relativa a μ_2) ed ortogonale a z_1 .

Quanto al fatto, prima ammesso, che: $(T(z_1^{(n_{1k})}), T(z_2^{(n_{1k})})) = 0$, ciò segue, nel caso che $\mu_1^{(n_{1k})} \neq \mu_2^{(n_{1k})}$, dalla ben nota relazione:

$$(12) \quad \sum_{h, r}^{1, n_{1k}} (T(u_h), T(u_r)) c_h^{(n_{1k}, 1)} c_r^{-(n_{1k}, 2)} = 0.$$

Se $\mu_1^{(n_{1k})} = \mu_2^{(n_{1k})}$, la (12) si può imporre come ulteriore condizione alle $c_h^{(n_{1k}, s)}$, dato che in tal caso la caratteristica del sistema (9) scende a $n_{1k} - 2$ almeno.

Così procedendo si vede che z_s è autosoluzione di T corrispondente a λ_s (di E corrispondente a μ_s) ($s = 1, 2, \dots, p-1$).

Sia u'_p un'autosoluzione di T corrispondente a λ_p tale che $(u', z_s) = 0$ ($s = 1, 2, \dots, p-1$). Poichè il sistema $\{u_k\}$ è completo in S abbiamo: $u'_p = \sum_1^{\infty} a_k u_k$.

Poniamo $u_p^{(n)} = \sum_1^n a_k u_k$ e

$$G_n(u) = \frac{1}{R(u)} - \sum_1^{p-1} \frac{1}{\mu_s^{(n)}} \frac{|(z_s^{(n)}, T(u))|^2}{(z_s^{(n)}, T(z_s^{(n)}))(u, T(u))}.$$

È facile constatare che, in ogni caso, $G_n(u)$ è definito e continuo in ogni punto di $S - \omega$; infatti, dato che T è definita (positiva o negativa), poichè $(u, T(u)) = (T_n(\gamma), \gamma)$, tale sarà anche $T_n(\gamma)$ onde i suoi autovalori $\mu_s^{(n)}$ non possono mai essere nulli.

Si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_{n_{ik}}(u_p^{(n_{ik})}) = \lambda_p \quad \text{e} \quad |G_{n_{ik}}(u_p^{(n_{ik})})| \leq \frac{1}{|\mu_p^{(n_{ik})}|}.$$

La dimostrazione di ciò si fa facilmente introducendo nello spazio S_n la seguente definizione di prodotto scalare:

$$(\gamma, \gamma^*) = \sum_{h,k}^{1,n} (u_h, T(u_k)) \gamma_h \bar{\gamma}_k^* \quad \text{se } T(u) \text{ è definita positiva}$$

$$(\gamma, \gamma^*) = - \sum_{h,k}^{1,n} (u_h, T(u_k)) \gamma_h \bar{\gamma}_k^* \quad \text{se } T(u) \text{ è definita negativa,}$$

ed osservando che:

$$\frac{1}{R(u)} = \frac{(\gamma, T'_n(\gamma))}{\|\gamma\|^2},$$

ove $T'_n(\gamma)$ ha come autovalori le quantità $\frac{1}{\mu_s^{(n)}}$ ed autosoluzioni i vettori $c^{(n,s)}$ già introdotti.

Di qui segue che $|\mu_p^{(n_{ik})}|$ riesce definitivamente minore di un opportuno numero reale positivo A_1 .

Si ha allora che la successione $\{z_p^{(n_{ik})}\}$ è compatta. Da essa può estrarsi una sottosuccessione, che per semplicità se-

gnitiamo a chiamare $\{z_p^{(n_{ik})}\}$, la quale è convergente ad un vettore z_p , ed essendo $R(z_p^{(n_{ik})}) = \mu_p^{(n_{ik})}$, per la continuità di R abbiamo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_p^{(n_{ik})} = R(z_p),$$

onde:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_p^{(n_{ik})}| = |R(z_p)| \leq \frac{1}{|\lambda_p|} = |\mu_p|.$$

Ora, col solito ragionamento fatto anche prima, si prova che $E(V^{(p-1)}) = E(V) \cdot S^{(p-1)}$; per cui si ha:

$$\begin{aligned} |\mu_p| &= \min_{V^{(p-1)} - \omega} |M(v)| = \\ &= \min_{E(V^{(p-1)}) - \omega} |R(u)| = \min_{E(V) \cdot S^{(p-1)} - \omega} |R(u)| = \min_{S^{(p-1)} - \omega} |R(u)|. \end{aligned}$$

Ma si ha:

$$(T(z_s), z_p) = (z_s, z_p)\lambda_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, p-1)$$

(e ciò perchè: $(T(z_s^{(n_{ik})}), z_p^{(n_{ik})}) = 0$ ($s = 1, 2, \dots, p-1$) come segue dall'osservazione prima fatta che $c^{(s, n_{ik})}$ sono autosoluzioni di $\mu_p^{(n_{ik})} T'_{n_{ik}}(\gamma) = \gamma$ e quindi $z_p \subset S^{(p-1)} - \omega$, per cui:

$$\min_{S^{(p-1)} - \omega} |R(u)| \leq |R(z_p)|.$$

Da ciò segue che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_p^{(n_{ik})}| = |\mu_p|.$$

Attesa l'arbitrarietà della successione di numeri interi $\{n_k\}$ si ha ovviamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_p^{(n)}| = |\mu_p|.$$

Tale teorema è stato dimostrato, nel caso di trasformazioni di tipo T , dal Prof. Fichera ⁴⁾.

⁴⁾ Cfr. [9] pagg. 234-237.

Si può ancora osservare che, attesa l'arbitrarietà della successione di numeri interi $\{n_k\}$, resta anche implicitamente provata la compattezza della successione $\{z_p^{(n)}\}$. Ne viene, almeno se il rango di μ_p è unitario, la possibilità di calcolare le autosoluzioni di norma unitaria corrispondenti a μ_p e che indicheremo al modo seguente: $z_p, -z_p$. Si può infatti dimostrare il seguente teorema.

IV. - Sia u un punto tale che non sussista per esso la relazione: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u, z_p^{(n)}) = 0$.

Supponiamo che non sia $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re[(u, z_p^{(n)})] = 0$; si potrà allora estrarre da $\{z_p^{(n)}\}$ una sottosuccessione $\{z_p^{(n_i)}\}$ tale che $\Re[(u, z_p^{(n_i)})]$ abbia segno costante; tale successione riesce convergente ad un'autosoluzione relativa a μ_p , di norma unitaria.

In maniera analoga si può estrarre da $\{z_p^{(n)}\}$ una sottosuccessione convergente ad un'autosoluzione, di norma unitaria, relativa a μ_p , nel caso che non sia $\lim_{n \rightarrow \infty} \Im[(u, z_p^{(n)})] = 0$.

DIM. - È intanto evidente che esistono dei punti u per i quali non sussiste la relazione $\lim_{n \rightarrow \infty} (u, z_p^{(n)}) = 0$; se infatti non esistessero di siffatti punti e cioè per ogni punto u di S sussistesse la relazione $\lim_{n \rightarrow \infty} (u, z_p^{(n)}) = 0$, si avrebbe, per ogni r : $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_p^{(r)}, z_p^{(n)}) = 0$ e ciò è in contrasto col fatto che dalla successione $\{z_p^{(n)}\}$ possa estrarsi una sottosuccessione $\{z_p^{(n_k)}\}$ convergente. Infatti, in conseguenza della possibilità di estrarre tale sottosuccessione, fissato $\epsilon > 0$, devono potersi trovare infinite coppie r, n per le quali riesca: $\|z_p^{(r)} - z_p^{(n)}\|^2 < \epsilon$; ma: $\|z_p^{(r)} - z_p^{(n)}\|^2 = 2 - 2\Re[(z_p^{(r)}, z_p^{(n)})]$, e poichè, dal fatto che $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_p^{(n)}, z_p^{(r)}) = 0$, segue ovviamente che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re[(z_p^{(r)}, z_p^{(n)})] = 0$, si ha l'assurdo.

In conseguenza delle ipotesi fatte sul punto u si ha: $(u, z_p) \neq 0$. Sia, ad esempio, $\Re[(u, z_p)] > 0$; ne viene che l'insieme dei punti della successione $\{z_p^{(n)}\}$ per i quali si ha: $\Re[(u, z_p^{(n)})] > 0$, non è vuoto ed ammette come unico elemento

di compattezza il punto z_p , dato che per il punto $-z_p$ sussiste ovviamente la relazione: $\Re[(u, -z_p)] < 0$.

Se invece si ha: $\Re[(u, z_p)] = 0$ dovrà essere $\Im[(u, z_p)] \neq 0$ e si può ripetere tal quale il ragionamento testè fatto. Analogamente si procede se $\Re[(u, z_p)] < 0$.

CAPITOLO II.

Proprietà di massimo-minimo degli autovalori delle trasformazioni di tipo E. Autosoluzioni delle trasformazioni iterate.

Veniamo ora a dare un teorema, dovuto a Courant ⁵⁾ che fornisce la cosiddetta proprietà di massimo-minimo per gli autovalori e che qui esporremo nel caso di trasformazione di tipo E.

I. - Siano t_1, t_2, \dots, t_{k-1} , $k-1$ arbitrari punti di S , supposto di dimensione non inferiore a k . Indicata con $S(t_1, \dots, t_{k-1})$ la varietà di tutti i punti di S tali che $(u, t_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), si consideri l'estremo inferiore del funzionale $|M(v)|$ in $V(t_1, \dots, t_{k-1}) - \omega$, ove $V(t_1, \dots, t_{k-1}) = V \cdot S(t_1, \dots, t_{k-1})$. Indicato con $\nu(t_1, \dots, t_{k-1})$ tale estremo inferiore, si ha: $|\mu_k| = \max \nu(t_1, \dots, t_{k-1})$ al variare in S dei punti t_1, \dots, t_{k-1} , nell'ipotesi che T sia definita (positiva o negativa) in S .

DIM. - Si ha: $\nu(v_1, \dots, v_{k-1}) = |\mu_k|$, dove v_r sono autosoluzioni di E corrispondenti a μ_r e costituenti un sistema ortogonale.

Si determinino le costanti c_1, \dots, c_k in modo che siano soddisfatte le condizioni:

$$\sum_1^k c_h (v_h, t_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$\sum_1^k |c_h|^2 = 1.$$

Il vettore $v = \sum_1^k c_h v_h$ appartiene a $V(t_1, \dots, t_{k-1})$.

⁵⁾ Cfr. [5].

Si ha d'altra parte:

$$\begin{aligned} |M(v)| &= |(E(v), v)| = \left| \sum_{h,i}^{1,k} c_h \bar{c}_i (E(v_h), v_i) \right| = \\ &= \left| \sum_{h,i}^{1,k} c_h \bar{c}_i \mu_h(v_h, v_i) \right| = \left| \sum_1^k |c_h|^2 \mu_h \right| = \sum_1^k |c_h|^2 |\mu_h| \leq |\mu_k|, \end{aligned}$$

per cui:

$$v(t_1, \dots, t_{k-1}) \leq |\mu_k|.$$

OSSERVAZIONE 1^a - È evidente che il teorema ora dimostrato permette più precisamente di concludere che, se T è definita positiva (negativa), indicato con $v(t_1, \dots, t_{k-1})$ l'estremo inferiore (superiore) del funzionale $M(v)$ in $V(t_1, \dots, t_{k-1}) - \omega$, il massimo (il minimo) di $v(t_1, \dots, t_{k-1})$ al variare di t_1, \dots, t_{k-1} in S è uguale a μ_k .

OSSERVAZIONE 2^a - Con dimostrazione analoga a quella ora esposta può provarsi che, se si indica con $\mu(t_1, \dots, t_{k-1})$ l'estremo inferiore del funzionale $N(v)$ in $V(t_1, \dots, t_{k-1}) - \omega$, al variare di t_1, \dots, t_{k-1} in S è: $\mu_k^2 = \max \mu(t_1, \dots, t_{k-1})$.

In questa dimostrazione si può prescindere dall'ipotesi che T sia definita (positiva o negativa).

OSSERVAZIONE 3^a - È agevole dimostrare che $N(v)$ è dotato di minimo in $S(t_1, \dots, t_{k-1}) - \omega$ nel senso, ovviamente, che riesce dotato di minimo, in $S(T(t_1), T(t_2), \dots, T(t_{k-1})) - \omega$, il funzionale $B(u) = \frac{\|u\|^2}{\|T(u)\|^2}$. Sia $\{u_k\}$ una successione di punti di tale insieme che godano delle seguenti proprietà: $\|u_k\| = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} |B(u_k)| = \mu(t_1, \dots, t_{k-1})$. Si ha allora che la successione $\{T(u_k)\}$ è compatta, e, detto u_0 un suo elemento di compatezza, si può estrarre da essa una sottosuccessione $\{T(u_{i_k})\}$ convergente ad u_0 . Da $\{u_{i_k}\}$ si può estrarre una successione $\{u_{n_{i_k}}\}$ debolmente convergente ad un punto \bar{u} ^{e)}; ne viene che $\{T(u_{n_{i_k}})\}$ converge debolmente a $T(\bar{u})$. Poiché $\{T(u_{n_{i_k}})\}$ converge ad u_0 , si ha che $T(\bar{u}) = u_0$. Onde il fun-

e) Cfr. [9] pag. 478.

zionale $\frac{\|u\|^2}{\|T(u)\|^2}$ ammette minimo in $S(T(t_1), \dots, T(t_{k-1})) - \omega$ e quindi, in $S(t_1, \dots, t_{k-1}) - \omega$, ammette minimo il funzionale $\frac{\|E(v)\|^2}{\|v\|^2}$.

Da tale teorema deriva una importante conseguenza.

II. - *La successione $\{\mu_k^{(n)}\}$, considerata nel teorema III (Cap. I), convergente all'autovalore μ_k , approssima μ_k per eccesso (per difetto) se μ_k è positivo (negativo).*

DIM. - Sia V_n la varietà lineare di dimensione finita individuata dagli n vettori di $V: w_1, \dots, w_n$ 7). Presi arbitrariamente $k-1$ vettori in $S: t_1, \dots, t_{k-1}$, diremo $v_n(t_1, \dots, t_{k-1})$ l'estremo inferiore di $|M(v)|$ in $V_n(t_1, \dots, t_{k-1}) - \omega$, ove si è fatto: $V_n(t_1, \dots, t_{k-1}) = V_n \cdot S(t_1, \dots, t_{k-1})$.

Si ha intanto:

$$v_n(T(z_1^{(n)}), T(z_2^{(n)}), \dots, T(z_{k-1}^{(n)})) = |\mu_k^{(n)}|$$

ove $z_i^{(n)}$ sono i vettori introdotti nella dimostrazione del teorema III (Cap. I), i quali appartengono appunto a $E(V_n)$.

Si determinino le costanti b_1, \dots, b_k in modo che siano soddisfatte le condizioni:

$$\sum_1^k b_n \frac{(T(z_k^{(n)}), t_i)}{\|T(z_k^{(n)})\|} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$\sum_1^k |b_n|^2 = 1.$$

Il vettore $v = \sum_1^k b_n \frac{T(z_k^{(n)})}{\|T(z_k^{(n)})\|}$ appartiene a $V_n(t_1, \dots, t_{k-1})$.

Si ha d'altra parte

$$\begin{aligned} |M(v)| &= |(E(v), v)| = \left| \sum_{n,i} b_n \bar{b}_i \frac{(z_k^{(n)}, T(z_i^{(n)}))}{\|T(z_k^{(n)})\| \|T(z_i^{(n)})\|} \right| = \\ &= \left| \sum_1^k |b_n|^2 \mu_k^{(n)} \right| = \sum_1^k |b_n|^2 |\mu_k^{(n)}| \leq |\mu_k^{(n)}| \end{aligned}$$

7) $\{w_k\}$ è la successione di cui all'enunciato del teor. III (Cap. I°).

donde $|\mu_k^{(n)}| = \max v_n(t_1, \dots, t_{k-1})$. Ma $v_n(t_1, \dots, t_{k-1}) \geq v(t_1, \dots, t_{k-1})$ per cui: $|\mu_k^{(n)}| \geq |\mu_k|$.

Esporremo ora alcuni teoremi sulle autosoluzioni delle trasformazioni iterate, i quali ci saranno utili nel seguito.

Sussiste innanzi tutto il teorema:

III. - *Tutte le trasformazioni $T, T^2, \dots, T^k, \dots$ hanno le medesime autosoluzioni se la T è definita (positiva o negativa).*

Dim. - Evidentemente basta mostrare che la trasformazione T^k ha le medesime autosoluzioni di T , e, per questo, basta mostrare che le autosoluzioni di T^k sono anche autosoluzioni di T .

Sia k un numero dispari; allora l'unica radice reale dell'equazione $x^k = \lambda (\lambda \neq 0)$ è $\sqrt[k]{\lambda}$ e quindi, se λ è un autovalore di T^k e z una corrispondente autosoluzione, ho $T(z) = \sqrt[k]{\lambda} z = \omega$. Infatti, dette $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ le k radici dell'equazione $x^k = \lambda$ e posto $\alpha_1 = \sqrt[k]{\lambda}$, se fosse $(T - \alpha_1 I)z \neq \omega$, ci dovrebbe essere una radice reale $\alpha_m (k \geq m > 1)$ tale che $(T - \alpha_m I)(T - \alpha_{m-1} I) \dots (T - \alpha_1 I)z = \omega$, e quindi α_m sarebbe un autovalore per T ; ciò è assurdo dato che α_1 è l'unico numero reale tra i numeri $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Se k è pari si ha intanto che T^k è definita positiva, in quanto riesce: $(T^k(u), u) = \|T^{k/2}(u)\|^2$. Ne viene di conseguenza che, se λ è un autovalore di T^k , è necessariamente: $\lambda > 0$ e quindi le radici reali di $x^k = \lambda$ sono due: $\sqrt[k]{\lambda}, -\sqrt[k]{\lambda}$. Posto $\alpha_1 = \sqrt[k]{\lambda}$ se T è definita positiva o $\alpha_1 = -\sqrt[k]{\lambda}$ se T è definita negativa, si può ripetere il ragionamento testè fatto e si perviene alla medesima conclusione dato che anche in tal caso l'unica radice accettabile perchè reale positiva (reale negativa) è α_1 .

OSSERVAZIONE. - Indicate con $V_k (k = 1, \dots)$ le varietà lineari definite dalla relazione ricorrente: $E(V_k) = V_{k-1} (V_0 = V)$, da questo teorema segue che le autosoluzioni di T^k sono contenute

^{s)} In tal caso è ovviamente $\lambda \neq 0$.

in V_{k-1} perchè esse sono anche autosoluzioni di T e queste, com'è immediato constatare, appartengono ad ogni V_n . Ma si può provare che, anche senza l'ipotesi predetta, le autosoluzioni di T^k appartengono ad ogni V_n e quindi in particolare a V_{k-1} . Sussiste infatti il teorema:

IV. - *Ogni autosoluzione di T^k , (qualunque sia k), è combinazione lineare di autosoluzioni di T (e precisamente di due autosoluzioni di T mediante coefficienti reali uguali in modulo ed opposti in segno) quando non sia già autosoluzione di T e non corrisponda all'autovalore nullo.*

DIM. - Nel caso che T sia definita (positiva o negativa) il teorema è già stato provato implicitamente dal teorema III ed anche nel caso che T non sia definita (positiva o negativa) purchè k sia dispari; infatti nella dimostrazione del teorema III l'ipotesi della definitezza non è entrata in gioco che per k pari.

Se k è pari e T non è definita (positiva o negativa) non si può escludere, con riferimento alla dimostrazione del teorema III, che tanto $\sqrt[k]{\lambda}$ quanto $-\sqrt[k]{\lambda}$ siano autovalori di T . Onde, ove λ sia un autovalore di T^k (necessariamente positivo com'è ovvio), z sia una corrispondente autosoluzione, e $\sqrt[k]{\lambda}$ e $-\sqrt[k]{\lambda}$ entrambi autovalori di T (in caso contrario si ricade nella dimostrazione del teorema III), si ha:

$$(T + \sqrt[k]{\lambda} I)(T - \sqrt[k]{\lambda} I)z = \omega.$$

Se così non fosse, con riferimento alla medesima notazione usata nella dimostrazione del teorema III, dovrebbe esservi un α_m ($m > 2$) (ove si sia fatto $\alpha_1 = \sqrt[k]{\lambda}$, $\alpha_2 = -\sqrt[k]{\lambda}$) tale che $(T - \alpha_m I)(T - \alpha_{m-1} I) \dots (T - \alpha_1 I)z = \omega$ e ciò è assurdo perchè, oltre a $\sqrt[k]{\lambda}$ ed a $-\sqrt[k]{\lambda}$, non ci sono altre radici reali di $x^k = \lambda$. Poniamo:

$$(1) \quad \begin{aligned} T(z) + \sqrt[k]{\lambda} z &= v \\ T(z) - \sqrt[k]{\lambda} z &= w. \end{aligned}$$

Se almeno uno di questi due vettori fosse uguale ad ω , il teorema sarebbe dimostrato. In caso contrario si ha:

$$T^2(z) + \sqrt[k]{\bar{\lambda}} T(z) = T(v)$$

$$T^2(z) - \sqrt[k]{\bar{\lambda}} T(z) = T(w)$$

$$T^2(z) - \sqrt[k]{\bar{\lambda}^2} z = T(v) - \sqrt[k]{\bar{\lambda}} v = \omega$$

$$T^2(z) - \sqrt[k]{\bar{\lambda}^2} z = T(w) + \sqrt[k]{\bar{\lambda}} w = \omega$$

donde risulta che v e w sono autosoluzioni di T ; per cui sottraendo la seconda delle (1) dalla prima si ha: $2\sqrt[k]{\bar{\lambda}}z = v - w$, e poichè è: $\lambda \neq 0$, si ha:

$$z = \frac{1}{2\sqrt[k]{\bar{\lambda}}} (v - w).$$

Si può dimostrare anche il seguente teorema:

V. - *Tutte le trasformazioni $T, T^2, \dots, T^k, \dots$ hanno medesime autosoluzioni se la T non ha autovalori che differiscano soltanto per il segno, ed è priva dell'autovalore nullo.*

Dim. - Segue immediatamente dalla dimostrazione del teorema III, giacchè l'inconveniente che siano ad un tempo autovalori di T le quantità $\sqrt[k]{\bar{\lambda}}$ e $-\sqrt[k]{\bar{\lambda}}$ ($\lambda \neq 0$), e che in quel caso era escluso dalla definitezza della trasformazione T , qui resta escluso dalla nuova ipotesi fatta.

Questo teorema rientra nel seguente più generale teorema:

VI. - *Sia T una trasformazione lineare hermitiana totalmente continua, ed $f(x) = \sum_1^n a_k x^k$ un polinomio a coefficienti reali. La T ammetta un sistema ortonormale di autosoluzioni $\{u_k\}$ i cui corrispondenti autovalori $\{\lambda_k\}$ godano della proprietà che: $f(\lambda_h) \neq f(\lambda_k)$ se $\lambda_h \neq \lambda_k$. Allora le trasformazioni T ed fT hanno le medesime autosoluzioni se fT è priva dell'autovalore nullo.*

Dim. - Basta ovviamente dimostrare che ogni autosoluzione u di fT è autosoluzione anche di T . Sia ora u un'auto-

soluzione di fT e σ il corrispondente autovalore. È noto che esistono dei valori di k per i quali è $f(\lambda_k) = \sigma$. Tali valori di k siano tutti quelli che verificano la limitazione: $h \leq k \leq h + s$ e sia $\{u_r\}$ un sistema ortonormale di autosoluzioni di T . Si ha $(u, u_r) = 0, r < h, r > h + s$; infatti $(fT(u), u_r) = \sigma(u, u_r) = (u, fT(u_r)) = f(\lambda_r)(u, u_r) = f(\lambda_r)(u, u_r)$ (e ciò perchè λ_r è reale), onde, poichè $\sigma \neq f(\lambda_r)$ per $r < h$ e $r > h + s$, si ha l'annunciata ortogonalità. Si ha quindi per la (1) del Cap. I.:

$$f(T(u)) = \sum_k^h \sum_k^{h+s} f(\lambda_k)(u, u_k)u_k \text{ cioè, dato che per ipotesi } f(\lambda_h) = f(\lambda_{h+1}) = \dots f(\lambda_{h+s}) = \sigma, \text{ riesce:}$$

$$\sigma u = \sigma \sum_k^h \sum_k^{h+s} (u, u_k)u_k$$

il che prova l'asserto.

I teoremi ora esposti possono ovviamente enunciarsi anche per trasformazioni di tipo E ; infatti l'unica proprietà della trasformazione T che gioca in tali teoremi è quella di ammettere una successione di autovalori reali.

Dopo di ciò si può considerare la trasformazione $E^k(v)$ definita in V_{k-1} ed è immediato constatare che la trasformazione hermitiana totalmente continua T^k verifica rispetto ad E^k le ipotesi prima considerate per la trasformazione T rispetto alla trasformazione E .

In conseguenza di quanto ora dimostrato si può considerare in V_{n-1} la trasformazione $fE = a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \dots + a_1 E$ ove a_1, \dots, a_n sono n numeri reali. Le proprietà di tale trasformazione ci saranno molto utili nel seguito.

Una prima proprietà è espressa dal teorema seguente:

VII. - *Tutti gli autovalori dell'equazione $fE(v) - \sigma v = \omega$ si ottengono ponendo $\sigma = f(\mu)$, essendo μ un autovalore di E .*

DIM. - Dalla $E(v) - \mu v = \omega$ si trae: $E^k(v) - \mu^k v = \omega$ e quindi, moltiplicando per a_k e sommando: $fE(v) - f(\mu)v = \omega$.

Viceversa, sia σ autovalore per la fE e z una corrispondente autosoluzione: $fE(z) - \sigma z = \omega$. Dette $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le n radici dell'equazione $f(x) = \sigma$, consideriamo le trasformazioni $E - \alpha_k I$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Si ha: $fE(z) - \sigma z = a_n(E - \alpha_n I)(E - \alpha_{n-1} I) \dots (E - \alpha_1 I)z = \omega$.

Sia $m (\leq n)$ il più piccolo valore per cui:

$$(E - \alpha_m I)(E - \alpha_{m-1} I) \dots (E - \alpha_1 I)z = \omega.$$

Posto:

$$v \begin{cases} = z & \text{se } m = 1 \\ = (E - \alpha_{m-1} I) \dots (E - \alpha_1 I)z & \text{se } m > 1, \end{cases}$$

sarà: $E(v) - \alpha_m v = \omega$ e quindi α_m è autovalore per E e pertanto è reale.

CAPITOLO III.

Altri teoremi per la separazione e per il calcolo degli autovalori di trasformazioni di tipo E .

I. - Se $v \in V$ sussiste la rappresentazione:

$$E(v) = \sum_n \mu_n (v, v_n) v_n$$

dove $\{v_n\}$ è un sistema ortonormale di autosoluzioni di E e $\{\mu_n\}$ il sistema dei corrispondenti autovalori.

Se $v \in V_{r-1}$ sussiste la rappresentazione:

$$fE(v) = \sum_n f(\mu_n) (v, v_n) v_n$$

ove $\{v_n\}$ e $\{\mu_n\}$ hanno il significato sopra precisato, essendo $f(x)$ un generico polinomio a coefficienti reali di grado r .

DIM. - Il sistema $\{v_n\}$, che si può riguardare come sistema di autosoluzioni di T , è, come sappiamo, completo in S e, quindi, anche in $E(V)$. Quindi, considerato un qualsiasi punto $v \in V$, si ha: $E(v) = \sum_n (E(v), v_n) v_n = \sum_n (v, E(v_n)) v_n$.

Ma: $E(v_n) = \mu_n v_n$ donde: $E(v) = \sum_n \mu_n (v, v_n) v_n$.

Se $v \in V_{r-1}$, si ha:

$$E^k(v) = \sum_n (E^k(v), v_n) v_n = \sum_n (v, E^k(v_n)) v_n \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Ma: $E^k(v_n) = \mu_n^k v_n$, donde: $E^k(v) = \sum_n \mu_n^k (v, v_n) v_n$ e di qui:

$$fE(v) = \sum_n f(\mu_n) (v, v_n) v_n.$$

Premesso tale teorema sulla rappresentazione spettrale della trasformazione di tipo E , siamo in grado di dimostrare il seguente teorema:

II. - Sia σ un numero reale; in ogni punto v in cui sia $M(v) \neq \sigma$, riesce definito il funzionale:

$$F_{\sigma}(v) = \frac{(E(v), E(v) - \sigma v)}{(v, E(v) - \sigma v)}.$$

Supposto non vuoto l'insieme dei punti di S in cui riesce $M(v) > \sigma$ ($M(v) < \sigma$), il funzionale $F_{\sigma}(v)$ vi ammette come minimo il più piccolo (come massimo il più grande) tra gli autovalori di E che superano (che sono superati da) σ .

DIM. - In ogni punto v in cui riesca $M(v) \neq \sigma$ si ha:

$$\frac{(E(v), E(v) - \sigma v)}{(v, E(v) - \sigma v)} = \frac{\sum_h (\mu_h - \sigma) |\mu_h (v, v_h)|^2}{\sum_h (\mu_h - \sigma) |(v, v_h)|^2},$$

avendo indicato con $\{\mu_h\}$ la successione degli autovalori di E disposti in ordine crescente. Se $M(v) < \sigma$ e con $\mu_{h_{\sigma}}$ indichiamo il più grande autovalore inferiore a σ , si ha ovviamente:

$$\frac{\sum_h \mu_h (\mu_h - \sigma) |(v, v_h)|^2}{\sum_h (\mu_h - \sigma) |(v, v_h)|^2} \leq \frac{\sum_h \mu_{h_{\sigma}} (\mu_h - \sigma) |(v, v_h)|^2}{\sum_h (\mu_h - \sigma) |(v, v_h)|^2}.$$

Si ha ovviamente inoltre: $F_{\sigma}(v_{h_{\sigma}}) = \mu_{h_{\sigma}}$.

Analoga dimostrazione sussiste per il caso $M(v) > \sigma$.

Analogo teorema sussiste per le trasformazioni di tipo T :

III. - Sia σ un numero reale diverso da zero; in ogni punto in cui sia $Q(u) \neq \sigma$ riesce definito il funzionale

$$R_{\sigma}(u) = \frac{(T(u), T(u) - \sigma u)}{(u, T(u) - \sigma u)}.$$

Supposto non vuoto l'insieme dei punti di S in cui riesce: $Q(u) > \sigma$ ($Q(u) < \sigma$), $R_{\sigma}(u)$ vi ammette come minimo il più piccolo (come massimo il più grande) tra gli autovalori di T che superano (che sono superati da) σ .

È facile anche vedere che, indicato con μ_k il più grande tra gli autovalori superati da σ e con μ_h il più piccolo tra quelli che superano σ , il coinsieme del funzionale $F_{\sigma}(v)$ risulta costituito da tutti i punti dell'asse reale x per cui riesce

$(x - \mu_k)(x - \mu_h) \geq 0$; tale è infatti l'insieme descritto da $F_\sigma(v)$ al variare di v nell'insieme lineare individuato da v_h e v_k , avendo con v_h indicato una autosoluzione di norma unitaria, relativa all'autovalore μ_h e con v_k un'autosoluzione, di norma unitaria, relativa a μ_k .

Ne viene pertanto che:

IV. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'intervallo reale di estremi σ e τ contenga almeno un autovalore della trasformazione E è che esista almeno un punto $v^* \neq \omega$ tale che:*

$$(1) \quad \|E(v^*)\|^2 - (\sigma + \tau)(E(v^*), v^*) + \sigma\tau \|v^*\|^2 = 0.$$

Dim. - Dimostriamo dapprima la sufficienza: se riesce $M(v^*) = \sigma$ l'asserto è evidente, dato che allora dalla (1) segue: $[M(v^*)]^2 = N(v^*)$ e quindi σ è autovalore di E . Se invece riesce $M(v^*) \neq \sigma$, la (1) porge $\tau = F_\sigma(v^*)$ e quindi l'intervallo σ, τ contiene almeno un autovalore di E .

Necessità: se σ è autovalore di E la (1) è verificata in corrispondenza ad ogni autosoluzione di E relativa a σ . Se σ non è autovalore di E , in virtù delle considerazioni prima svolte sul codominio di $F_\sigma(v)$, l'equazione $\tau = F_\sigma(v)$ ammette almeno una soluzione v^* donde la (1).

Tale teorema può essere generalizzato nel seguente: ⁹⁾

V. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè autovalori di E siano contenuti tanto nell'insieme dell'asse reale in cui è: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \geq 0$ ¹⁰⁾ quanto in quello in cui è $f(x) \leq 0$, è che esista almeno un punto $v^* \neq \omega$, contenuto in V_{n-1} , in cui riesca:*

$$(2) \quad (v^*, (a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \dots + a_0 I)v^*) = 0$$

Dim. - È intanto evidente che la condizione (2) equivale alla seguente:

$$(v^*, (E - \alpha_1 I)(E - \alpha_2 I) \dots (E - \alpha_n I)v^*) = 0,$$

⁹⁾ Per il caso delle equazioni integrali cfr. [2].

¹⁰⁾ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, sono numeri reali.

ove con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ si sono indicate le n radici dell'equazione $f(x) = 0$. Supponiamo che nell'insieme $R_+(f)$, costituito da tutti i punti dell'asse reale nei quali riesce $f(x) \geq 0$, sia contenuto un intervallo avente per estremi due radici reali consecutive di $f(x) = 0$: α_{n-1} e α_n , e supponiamo per assurdo che a tale insieme $R_+(f)$ non appartenga alcun autovalore di E .

Assunto allora in V_{n-1} come prodotto scalare di u per v il funzionale bilineare:

$$(u, (E - \alpha_1 I)(E - \alpha_2 I) \dots (E - \alpha_{n-2} I)v)$$

se l'insieme $R_+(f)$ è superiormente limitato, ed il funzionale di segno opposto in caso contrario, si ha che in corrispondenza al punto v^* è verificata la condizione necessaria e sufficiente perchè nell'intervallo di estremi α_{n-1}, α_n sia contenuto almeno un autovalore di E .

Se poi l'ipotesi relativa all'intervallo α_{n-1}, α_n non è verificata, l'equazione $f(x) = 0$ non può ovviamente avere più di due radici reali e in tal caso l'asserto è evidente.

Analoga dimostrazione sussiste per l'insieme $R_-(f)$.

Mostriamo ora la necessità della condizione (2).

Se almeno uno dei numeri $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è autovalore di E l'asserto è evidente. In ogni caso, però, almeno uno dei due insiemi $R_+(f)$ ed $R_-(f)$ conterrà al suo interno infiniti autovalori della trasformazione E . Tanto per fissare le idee, supponiamo che $R_-(f)$ goda di tale proprietà. Supponiamo ora che all'insieme $R_+(f)$ appartenga un intervallo avente per estremi due radici reali consecutive di $f(x) = 0$ e contenente al suo interno almeno un autovalore di E . Indicate con α_{n-1} ed α_n le due suddette radici, nel sottospazio di V_{n-1} ortogonale a tutte le autosoluzioni relative ad autovalori di E contenuti nell'insieme $R_+(f)$ privato dell'intervallo α_{n-1}, α_n , assumiamo come prodotto scalare di u per v il funzionale bilineare

$$(u, (E - \alpha_1 I) \dots (E - \alpha_{n-2} I)v)$$

se l'insieme $R_+(f)$ è superiormente limitato, ed il funzionale di segno opposto in caso contrario; deve allora esistere almeno

un punto v^* in cui riesca verificata la condizione necessaria e sufficiente perchè almeno un autovalore di E appartenga all'intervallo α_{n-1}, α_n , cioè la (2).

Se invece nessun intervallo del tipo suddetto riesce contenuto in $R_+(f)$, indicato con α_n la più grande radice reale di $f(\varphi) = 0$ se $R_+(f)$ è superiormente illimitato, e la più piccola in caso contrario, dovrà ovviamente esservi almeno un autovalore di E all'interno dell'intervallo $\alpha_n, +\infty$ nel primo caso, e all'interno dell'intervallo $-\infty, \alpha_n$ nel secondo caso.

Nel primo caso si consideri la varietà lineare V_{n-1} e vi si assuma come prodotto scalare del vettore u per il vettore v , il seguente funzionale bilineare:

$$(u, (E - \alpha_1 I) \dots (E - \alpha_{n-1} I)v).$$

È allora evidente che esisterà almeno un punto v^* in cui il funzionale di Ritz.

$$(v, (E - \alpha_1 I) \dots (E - \alpha_{n-1} I)Ev).$$

assumerà il valore α_n e quindi sarà, in corrispondenza ad esso, verificata la (2). Analoga dimostrazione sussiste per il secondo caso.

Si ha infine il seguente teorema:

VI. - *Supposto che la successione degli autovalori di E ammetta come punto di accumulazione $+\infty$ ($-\infty$), condizione necessaria e sufficiente perchè una successione crescente (decrecente) di numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ sia tale che ogni intervallo avente per estremi due di tali numeri, aperto a sinistra e chiuso a destra (aperto a destra e chiuso a sinistra), contenga almeno un autovalore della trasformazione E , è che esista una successione v_1^*, v_2^*, \dots tale che:*

$$F_{\alpha_1}(v_1^*) \leq \alpha_2 \quad M(v_1^*) > \alpha_1 \quad (F_{\alpha_1}(v_1^*) \geq \alpha_2 \quad M(v_1^*) < \alpha_1)$$

$$F_{\alpha_2}(v_2^*) \leq \alpha_3 \quad M(v_2^*) > \alpha_2 \quad (F_{\alpha_2}(v_2^*) \geq \alpha_3 \quad M(v_2^*) < \alpha_2)$$

.....

DIM. - La condizione è necessaria. Poniamoci, per fissare le idee, nell'ipotesi che la successione degli autovalori di E ammetta come punto di accumulazione $+\infty$ e sia μ un autovalore verificante la condizione $\alpha_k < \mu \leq \alpha_{k+1}$. Poichè il codominio di $F_{\alpha_k}(v)$, relativo all'insieme dei punti in cui: $M(v) > \alpha_k$, contiene i punti dell'asse reale per i quali riesce $x \geq \mu$, esisterà certamente un punto v_k^* tale che

$$F_{\alpha_k}(v_k^*) \leq \alpha_{k+1} \quad M(v_k^*) > \alpha_k.$$

La condizione è sufficiente. Se infatti per ogni k ($k = 1, 2, \dots$) riesce:

$$F_{\alpha_k}(v_k^*) \leq \alpha_{k+1} \quad M(v_k^*) > \alpha_k,$$

sarà ovviamente contenuto almeno un autovalore di E nell'intervallo $\alpha_k < x \leq \alpha_{k+1}$, a prescindere dal fatto che α_k sia o meno autovalore di E .

Analoga dimostrazione sussiste per il caso che la successione degli autovalori di E ammetta come punto di accumulazione $-\infty$.

Riesce anche molto utile, agli effetti del calcolo approssimato degli autovalori, il seguente teorema, che sussiste nell'ipotesi che la forma $(E(v), v)$ sia definita (positiva o negativa).

VII. - Sia μ_k un autovalore positivo (negativo) della trasformazione E , σ un numero reale tale che $\mu_k < \sigma \leq \mu_{k+1}$ ($\mu_k > \sigma \geq \mu_{k+1}$), $\{z_k^{(n)}\}$ la successione di vettori introdotta nella dimostrazione del teorema III, Cap. I. Posto

$$t_k^{(n)} = \frac{T(z_k^{(n)})}{\|T(z_k^{(n)})\|}, \text{ si ha: } \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\sigma}(t_k^{(n)}) = \mu_k \text{ e definitivamente:}$$

$$F_{\sigma}(t_k^{(n)}) \leq \mu_k \text{ (} F_{\sigma}(t_k^{(n)}) \geq \mu_k \text{)}.$$

DIM. - Supponiamo, per fissare le idee, che sia $\mu_k > 0$. Poichè riesce (cfr. teor. III, Cap. I.) $M(t_k^{(n)}) = \mu_k^{(n)}$, esisterà un indice n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$ risulti $M(t_k^{(n)}) < \sigma$. Ne viene che, per $n \geq n_0$, riesce $F_{\sigma}(t_k^{(n)}) \leq \mu_k$.

Inoltre, poichè, come è stato dimostrato, ogni elemento di compattezza di $\{z_k^{(n)}\}$ è autosoluzione di E relativa a μ_k , si ha che, comunque si assegni una successione crescente di in-

dici $\{n_h\}$ da essa può estrarsi una successione $\{n_{i_h}\}$ tale che esista $\lim_{\substack{\rightarrow \\ \infty}} t_k^{(n_{i_h})} = z_k$, essendo z_k un'autosoluzione relativa a μ_k .

Sarà allora: $\lim_{h \rightarrow \infty} N(t_k^{(n_{i_h})}) = \mu_k^2$ e quindi: $\lim_{n \rightarrow \infty} N(t_k^{(n)}) = \mu_k^2$.

Ne segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |N(t_k^{(n)}) - [M(t_k^{(n)})]^2| = 0,$$

donde, essendo $F_\sigma(v) = M(v) + \frac{N(v) - [M(v)]^2}{M(v) - \sigma}$, si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\sigma(t_k^{(n)}) = \mu_k.$$

È da osservare che riesce: $t_k^{(n)} = \sum_1^n c_s^{(n,k)} w_s$ ove la n -upla $\{c_s^{(n,k)}\}$ è una soluzione del sistema:

$$\sum_1^n [(E(w_h), w_s) - \mu_k^{(n)}(w_h, w_s)] c_s^{(n,k)} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

e soddisfa la condizione

$$\sum_{h,s}^{1,n} (w_h, w_s) c_h^{(n,k)} c_s^{(n,k)} = 1.$$

Con ciò resta anche dimostrato che la medesima successione di vettori $\{t_k^{(n)}\}$, minimante (massimante) il funzionale di Ritz riesce anche massimante (minimante) il funzionale $F_\sigma(v)$.

CAPITOLO IV.

Calcolo degli autovalori delle membrane e delle piastre elastiche.

In questo capitolo vogliamo mostrare alcune applicazioni del teorema VII del III Capitolo al calcolo approssimato degli autovalori delle membrane e delle piastre elastiche.

Sia A un campo dello spazio euclideo ad r dimensioni S_r , il punto generico del quale indicheremo con $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r)$; sia S lo spazio hilbertiano delle funzioni reali di quadrato

integrabile in A , ove il prodotto scalare sia definito al modo seguente:

$$(u, v) = \int_A u(x)v(x)d\tau.$$

Sia $E(u)$ un operatore differenziale lineare autoaggiunto di ordine $2n$ ed $L_1(u)$, $L_2(u)$, ..., $L_n(u)$ operatori differenziali lineari al contorno.

Consideriamo il problema al contorno

$$(1) \quad \begin{aligned} E(u) &= f \quad \text{in } A \\ L_k(u) &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \text{su } FA. \end{aligned}$$

Supponiamo che tale problema, considerato in una opportuna classe funzionale, sia dotato di funzione di Green $G(x, y)$, essendo (x, y) un punto variabile nel prodotto topologico $A \times A$, e supponiamo inoltre che tale problema sia autoaggiunto nel senso che riesca: $G(x, y) = G(y, x)$. Dicendo che il sopradetto problema è dotato di funzione di Green intendiamo che esiste una classe H di funzioni tale che $H \subset S$ ed inoltre tale che per ogni $f \in H$ il problema (1) ammette soluzione e questa può porsi nella forma:

$$v(x) = \int_A G(x, y)f(y)dy$$

Supponiamo inoltre che la trasformazione integrale: $v(x) = \int_A G(x, y)u(y)dy$ definita in S riesca di tipo T e sia priva dell'autovalore nullo, cioè sia invertibile. La trasformazione T^{-1} può ovviamente riguardarsi come una trasformazione di tipo E , ove si faccia $V = T(S)$, e d'altra parte tale trasformazione coincide con l'operatore $E(v)$, prima introdotto, nell'insieme $T(H)$.

Con tali assunzioni si vede che rientrano nella teoria da noi svolta i problemi d'autovalori relativi a problemi al contorno per equazioni ellittiche del secondo ordine¹¹⁾ relativa-

¹¹⁾ Cfr. [14].

mente a campi limitati A di S_r , in opportune ipotesi di regolarità per FA . Così anche rientrano in tale teoria i problemi d'autovalori relativi alle piastre totalmente incastrate per le quali è nota l'esistenza della funzione di Green¹²).

Il teorema VII del capitolo III permette pertanto di ricondurre il problema del calcolo degli autovalori di equazioni del tipo

$$E(v) - \mu v = 0$$

(ove $E(v)$ è un operatore differenziale del tipo sopra precisato) a quello della separazione di tali autovalori.

Alla risoluzione di tale problema provvedono, in generale, proprietà geometriche degli autovalori, legate soprattutto alla forma del dominio $A + FA$. È noto, ad esempio, che se con $A' + FA'$ indichiamo un dominio contenuto in $A + FA$ e con $\{\mu_k\}$ e con $\{\mu'_k\}$ le successioni di autovalori dell'equazione $E(v) - \mu v = 0$ relativi rispettivamente ai domini $A + FA$ ed $A' + FA'$ (con una medesima condizione al contorno) riesce per ogni k : $\mu_k \leq \mu'_k$.

Valendosi di tale proprietà è possibile separare i primi autovalori della membrana ellittica vibrante a contorno fisso e quindi, applicando i teorr. III Cap. I e VII Cap. III, procedere al calcolo sia per eccesso che per difetto dei primi autovalori della membrana ellittica a contorno fisso.

Analoghe considerazioni possono ripetersi a proposito della piastra ellittica totalmente incastrata.

Indichiamo con q il semiasse minore dell'ellisse che schematizza la membrana (1 essendo il semiasse maggiore). Avendo assunto, con riferimento alle notazioni del teorema III capitolo I°:

$$w_1(x, y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{q^2}, \quad w_2(x, y) = \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{q^2}\right) \left(x^2 + \frac{y^2}{q^2}\right)$$

$$w_3(x, y) = \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{q^2}\right) \left(x^2 + \frac{y^2}{q^2}\right)^2$$

¹²) Cfr. [10] e [17].

ho ottenuto, in terza approssimazione, per la radice quadrata del primo autovalore della membrana ellittica a contorno fisso, i seguenti risultati:

| q | approssimazione per difetto | approssimazione per eccesso |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|
| 0,1 | 15,7863 | 17,0800 |
| 0,2 | 8,0095 | 8,6707 |
| 0,3 | 5,4665 | 5,8962 |
| 0,4 | 4,2295 | 4,5785 |
| 0,5 | 3,5403 | 3,8023 |
| 0,6 | 3,2329 | 3,3051 |
| 0,7 | 2,9418 | 2,9652 |
| 0,8 | 2,7179 | 2,7221 |
| 0,9 | 2,5404 | 2,5419 |
| 1 | 2,4048 | 2,4048. |

In terza approssimazione, per la radice quadrata del secondo autovalore della membrana ellittica a contorno fisso, avendo assunto come prime tre funzioni del sistema $\{w_k\}$ le stesse sopra scritte, moltiplicate per $\cos \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, ho ottenuto i seguenti risultati:

| q | approssimazione per difetto | approssimazione per eccesso |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|
| 0,1 | 16,0190 | 19,4438 |
| 0,2 | 8,4590 | 10,1378 |
| 0,3 | 6,1062 | 7,1969 |
| 0,4 | 5,0290 | 5,8269 |
| 0,5 | 4,4428 | 5,0689 |
| 0,6 | 4,3499 | 4,6052 |
| 0,7 | 4,2062 | 4,3014 |
| 0,8 | 4,0677 | 4,0923 |
| 0,9 | 3,9383 | 3,9424 |
| 1 | 3,8315 | 3,8317. |

In quarta approssimazione, per la radice quarta del primo

autovalore della piastra ellittica totalmente incastrata, ho ottenuto i seguenti risultati:

| q | approssimazione per difetto | approssimazione per eccesso |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|
| 0,6 | 4,2524 | 4,4942 |
| 0,7 | 3,8569 | 3,9850 |
| 0,8 | 3,6152 | 3,6394 |
| 0,9 | 3,3795 | 3,3831 |
| 1 | 3,1961 | 3,1962 . |

Questo stesso problema, per la piastra ellittica, è stato considerato, con altro procedimento, in un lavoro in corso di stampa, da M. S. Roma.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. ARONSZAJN: *The Rayleigh-Ritz and the Weinstein methods for approximations of eigenvalues (I Operators in a Hilbert space)*, Oklahoma Agr. and Math. Coll., Stillwater Okla., 1949.
- [2] H. BÜCKNER: *Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen*, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1952.
- [3] L. COLLATZ: *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*, Akademische Verlagsges., Leipzig, 1949.
- [4] N. COTUGNO - C. MENGOTTI MARZOLLA: *Approssimazione per eccesso della più bassa frequenza di una piastra ellittica omogenea incastrata*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », 1949, s. VIII, vol. V, fasc. 6.
- [5] R. COURANT - D. HILBERT: *Methods of Mathematical Physics*, vol. I, First English ed., Interscience Publishers, New York, London, 1953.
- [6] C. DAVIS: *Estimating eigenvalues*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. III, 1952.
- [7] M. J. DE SCHWARZ: *Determinazione delle frequenze e delle linee nodali di una membrana ellittica oscillante con contorno fisso*, « Atti dell'Acc. delle Scienze Fisiche e Matem. di Napoli », 1951, s. III, vol. III, n. 2.
- [8] M. L. ETIOBBE: *Calcolo della frequenza più bassa di una membrana vibrante con contorno fisso avente la forma di ellisse*, « Rend. della R. Acc. di Sc. Fis. e Matem. di Napoli », 1943, s. IV, vol. XIII.
- [9] G. FICHERA: *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, 1954, Ist. Mat. Univ. Trieste.

- [10] G. FICHERA: *On some general integration methods employed in connection with linear differential equations*, « Journ. of Math. and Phy. », 1950, vol. XXIX, n. 2.
- [11] G. E. FORSYTHE: *Asymptotic lower bounds for the frequencies of certain polygonal membranes*, « Pacific Journ. of Math. », 1954, vol. IV, n. 3.
- [12] T. KATO: *On the upper and lower bounds of eigenvalues*, « J. Phys. Soc. Japan », Vol. IV, 1949.
- [13] W. E. MILNE: *Numerical solution of differential equations*, Wiley, New York and Chapman-Hall, London, 1953.
- [14] C. MIRANDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.
- [15] G. PÓLYA: *Sur une interprétation de la méthode des différences finies qui peut fournir des bornes supérieures ou inférieures*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 235, 1952.
- [16] G. PÓLYA - G. SZEGÖ: *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Annals of Mathematics Studies, n. 27, Princeton University Press, 1951.
- [17] M. L. PRINCIVALLI: *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche*, « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », 1954, s. III, vol. VIII, fasc. III-IV, pp. 255-266.
- [18] G. TEMPLE: *The accuracy of Rayleigh's method of calculating the natural frequencies of vibrating systems*, Proc. Roy. Soc. London, vol. 211, 1952.
- [19] A. WEINSTEIN: *Etudes des spectres des équations aux dérivées partielles*, Mémoires des Sci. Math. n. 88, Paris, 1937.
- [20] D. H. WEINSTEIN: *Modified Ritz method*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 20, 1934.
- [21] H. F. WEINBERGER: *An extension of classical Sturm-Liouville theory*, « Duke Math. Journal », vol. 22, 1955.
- [22] H. WIELANDT: *Die Einschliessung von Eigenwerten normaler Matrizen*, « Math. Ann. », vol. 121, 1949.