RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNAMARIA SCORZA TOSO

Sugli estremi parziali di una funzione di due variabili e la nozione di semicontinuità in una famiglia di insiemi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 93-102

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__93_0>

SUGLI ESTREMI PARZIALI DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI E LA NOZIONE DI SEMICONTINUITÀ IN UNA FAMIGLIA DI INSIEMI

Nota (*) *di* ANNAMARIA SCORZA TOSO (*a Padova*)

In questa Nota mi progongo di collegare con le nozioni di semicontinuità inferiore e superiore di una famiglia di insiemi alcuni risultati di Bonnesen e Scorza Dragoni sugli estremi parziali di una funzione di due variabili. Aggiungerò poi alla fine qualche osservazione complementare.

1. - Sia I un insieme del piano (x, y), I_y la sua proiezione ortogonale sull'asse y, $S(y)$ la sezione di I con l'orizzontale di ordinata y, per y contenuto in I_y.

Sia poi $f(x, y)$ una funzione definita in I, ed $e'(y)$, $e''(y)$ i suoi estremi, inferiore e superiore, su $S(y)$.

Diciamo, seguendo Scorza Dragoni, che l'insieme I gode della proprietà *c*) se ogni sottoinsieme I' di I chiuso su I si proietta ortogonalmente sull'asse y in un sottoinsieme, I'_y, di I_y chiuso su I_y [1]; e che l'insieme I gode della proprietà *a*) se ogni porzione I' di I aperta su I ha la sua solita proiezione, I'_y, aperta su I_y [2].

(*) Pervenuta in Redazione il 31 gennaio 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) G. SCORZA DRAGONI, *Un problema sui minimi e sui massimi parziali di una funzione*, [Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie 6ª, vol. XI (1930), pagg. 865-872], n. 3.

2) G. SCORZA DRAGONI, *Sui minimi e massimi parziali per le funzioni di più variabili*, [Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie 6ª, vol. VI (1927), pagg. 579-583], n. 1.

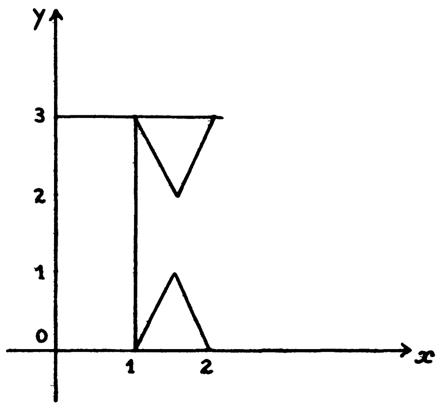
Ciò premesso, è noto che:

Se $f(x, y)$ è inferiormente (superiormente) semicontinua in I, $e'(y)$ è inferiormente ($e''(y)$ è superiormente) semicontinua in I_y, purchè le sezioni $S(y)$ siano chiuse e purchè I goda della proprietà c) [3];

e che:

Se $f(x, y)$ è inferiormente (superiormente) semicontinua in I, $e''(y)$ è inferiormente ($e'(y)$ è superiormente) semicontinua in I_y, purchè I goda della proprietà a) [4].

A proposito di questo secondo teorema, Bonnesen [5] aveva creduto di poter sostituire la proprietà *a)* con una condizione sulla frontiera di I, supponendo, in sostanza, che I_y fosse un segmento e che $S(y)$, per y interno ad I_y, non avesse alcun arco in comune con tale frontiera. Ma questa condizione non



è sufficiente. Per convincersene, basta considerare l'insieme, illustrato nella figura [6], per il quale, come è noto, quel teorema cade in difetto.

---

[3] Si veda: loc. cit. [1]), n. 2; loc. cit. [2]), n. 2; e si veda anche T. BONNESEN, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, [Gauthier-Villars, Parigi (1929)], pag. 12, primo teorema.

[4] Si veda: loc. cit. [1]), n. 6; loc. cit. [2]), n. 3.

[5] loc. cit. [3]), pag. 12, secondo teorema; il fatto che ivi si considerino funzioni continue non è essenziale.

[6] cfr. loc. cit. [1]), n. 7

In tale esempio, la condizione a) non è soddisfatta e si può sospettare che ciò sia dovuto al fatto che i punti $y = 1$ ed $y = 2$ sono di discontinuità per $S(y)$. Invece $S(y)$ è superiormente semicontinua e quell'insieme gode della proprietà c). Si può quindi pensare che la proprietà c) sia legata alla semicontinuità superiore delle sezioni; e allora è naturale chiedersi se la proprietà a) non sia legata alla semicontinuità inferiore delle sezioni ([7]).

In questa Nota mostrerò appunto come ci sia addirittura equivalenza fra la proprietà a) e la semicontinuità inferiore di $S(y)$ e come una risposta sostanzialmente analoga si possa dare nei riguardi della proprietà c), qualora le sezioni $S(y)$ siano chiuse e limitate.

2. - Diremo che $S(y)$ è inferiormente semicontinua nel punto y_0 se, in corrispondenza ad ogni intorno $U(x, y_0)$ ([8]) di un punto (x, y_0), prefissato a piacere, di $S(y_0)$, si può determinare un intorno $U(y_0)$ di y_0 siffatto che per ogni y di $U(y_0) \cdot I_y$ l'intersezione $S(y) \cdot U(x, y_9)$ non sia vuota.

Diremo invece che $S(y)$ è superiormente semicontinua nel punto y_0, se $S(y_0)$ contiene tutti i punti $P(x, y_0)$ per i quali si verificano le seguenti circostanze: dati comunque un intorno $U(x, y_0)$ di $P(x, y_0)$ ed un intorno $U(y_0)$ di y_0, per qualche $y \neq y_0$ di $U(y_0) \cdot I_y$ l'intersezione $S(y) \cdot U(x, y_0)$ non è vuota ([9]).

È facile dimostrare che *la proprietà a) è equivalente alla semicontinuità inferiore.*

---

[7]) Il senso di queste frasi è ovvio, e sarà del resto, salvo qualche lieve variante, quello dato da C. Kuratowski, *Le fonctions semicontinues dans l'espace des ensembles fermés.* [Fundamenta mathematicae, vol. XVIII (1931), pagg. 148-159], n. 1.

[8]) Chiamo intorno di un punto un insieme aperto che contenga quel punto.

[9]) A chiarimento di quanto ho detto nella nota [7]), avverto che Kuratowski dà queste definizioni di semicontinuità supponendo che le sezioni $S(y)$ siano chiuse ed abbiano le loro proiezioni ortogonali sull'asse x contenute in un certo intervallo fisso; avverto inoltre che Kuratowski considera anche insiemi variabili in ispazi topologici qualunque.

Cominciamo col far vedere che, se l'insieme I gode della proprietà a), allora $S(y)$ è inferiormente semicontinua. Infatti, se $U(x, y_0)$ è un intorno del punto (x, y_0), l'insieme $I \cdot U(x, y_0)$, aperto su I, ha la sua proiezione ortogonale sull'asse y aperta su I_y; tale proiezione si può quindi pensare come intersezione di I_y con un opportuno intorno $U(y_0)$ di y_0; ogni punto y di $U(y_0) \cdot I_y$ è proiezione di almeno un punto di $U(x, y_0) \cdot I$, vale a dire l'intersezione della sezione $S(y)$ con l'insieme $U(x, y_0)$ non è vuota.

Inversamente, suppongasi $S(y)$ inferiormente semicontinua in I_y e sia I' un sottoinsieme di I aperto su I, I'_y la sua proiezione ortogonale sull'asse y ed y_0 un punto di I'_y, proiezione quindi di almeno un punto $P_0(x_0, y_0)$ di I'. Poichè I' è aperto su I è possibile determinare un intorno $U(x_0, y_0)$ di P_0 siffatto che risulti $U(x_0, y_0) \cdot I = I'$. Fissato un tale intorno, in virtù della semicontinuità inferiore di $S(y)$, possiamo trovare un intorno $U(y_0)$ di y_0 tale che per ogni y di $U(y_0) \cdot I_y$ l'intersezione $S(y) \cdot U(x_0, y_0) = S(y) \cdot U(x_0, y_0) \cdot I = S(y) \cdot I'$ non sia vuota. In altri termini, per ogni punto y_0 di I'_y è possibile determinare un intorno siffatto che tutti i punti di I_y appartenenti a tale intorno provengano dalla proiezione di almeno un punto di I', vale a dire siano essi stessi punti di I'_y; quest'ultimo insieme risulta pertanto aperto su I_y.

3. - Dimostriamo ora che *la proprietà c) e la chiusura delle sezioni $S(y)$ implicano la semicontinuità superiore di $S(y)$* e che *la proprietà c) e la limitazione di ogni singola sezione $S(y)$ implicano la limitazione di I nell'intorno di ogni sezione* ([10]) (questa espressione significando: dato comunque y_0 in I_y, è possibile trovare un numero $\delta > 0$ tale che la porzione di I contenuta nella striscia di asse la retta $y = y_0$ ed altezza δ sia limitata). In seguito dimostreremo inversamente che *la limitazione di I nell'intorno di ogni sua sezione $S(y)$ e la semicontinuità superiore di queste implicano la proprietà c)*.

---

[10]) Questa proprietà sostituisce la condizione posta da Kuratowski, ricordata nella nota [9]), che le proiezioni delle $S(y)$ sull'asse x fossero contenute in un medesimo intervallo.

Supponiamo dunque che I goda della proprietà c) e che le sue sezioni $S(y)$ siano chiuse e proviamo che $S(y)$ è superiormente semicontinua. Sia y_0 un punto di I_y e $P(x, y_0)$ un punto della retta $y = y_0$ tale che, dati comunque un intorno $U(x, y_0)$ di P ed un intorno $U(y_0)$ di y_0, per qualche y di $U(y_0) \cdot I_y$ l'intersezione $S(y) \cdot U(x, y_0)$ non sia vuota; e sia $W(x, y_0)$ un intervallo aperto di centro (x, y_0), $\overline{W}(x, y_0)$ il suo involucro chiuso e $W(y_0)$ un intorno di y_0. L'insieme $I' = \overline{W}(x, y_0) \cdot I$ è un sottoinsieme di I chiuso su I; indichiamone al solito con I'_y la proiezione. Poichè per qualche y di $W(y_0) \cdot I_y$ l'intersezione $S(y) \cdot W(x, y_0)$ non è vuota, nell'intorno $W(y_0)$ di y_0 cadono punti dell'insieme I'_y chiuso su I_y; dunque per l'arbitrarietà di $W(y_0)$ anche y_0 è un punto di I'_y, cioè esistono nella sezione $S(y_0)$ punti di $\overline{W}(x, y_0)$. Dall' arbitrarietà dell' intorno $\overline{W}(x, y_0)$ si deduce infine che P appartiene ad $S(y_0)$.

Dimostriamo ora che l'insieme I è limitato nell'intorno di ogni sua sezione $S(y)$, sempre nell'ipotesi che esso goda della proprietà c). Sia y_0 un punto di I_y; poichè $S(y_0)$ è limitata, è possibile trovare un numero ρ maggiore dei moduli delle ascisse di tutti i punti di $S(y_0)$. Se I non fosse limitato nell'intorno di $S(y_0)$, nella striscia di asse la retta $y = y_0$ ed altezza 1 esisterebbe certamente un punto (x_1, y_1) di I con l'ascissa in modulo maggiore di $\rho + 1$; nella striscia di asse la retta $y = y_0$ ed altezza $1/2$ esisterebbe certamente un punto (x_2, y_2) di I con l'ascissa in modulo maggiore di $\rho + 2$. Così proseguendo, veniamo a costruire una successione di punti

$$(x_1, y_1) \ , \ (x_2, y_2) \, , \dots$$

le cui ascisse divergono e le cui ordinate sono diverse da y_0 e tendono ad y_0. Tale successione di punti costituisce un sottoinsieme I' di I chiuso e pertanto la sua proiezione I'_y è chiusa su I_y. Quindi y_0, essendo d'accumulazione per I'_y, appartiene ad I'_y e nella sezione $S(y_0)$ ci sarebbe allora almeno un punto di ascissa in modulo maggiore di ρ, contro l'ipotesi.

Inversamente, supponiamo che l'insieme I sia limitato nell'intorno di ogni sua sezione $S(y)$ e che $S(y)$ sia superiormente semicontinua (in I_y); se I' è un sottoinsieme di I chiuso su I, dico che allora la sua proiezione I'_y è chiusa su I_y. Sia y_0 un punto di I_y d'accumulazione per I'_y e sia AB un segmento della retta $y = y_0$ contenente le proiezioni ortogonali su tale retta di tutte le sezioni $S(y)$ contenute nella striscia di asse la retta $y = y_0$ ed altezza δ, con δ convenientemente piccolo. Facciamo vedere anzitutto che almeno un punto di AB è d'accumulazione per I'. Infatti ([11]), se ciò non fosse, sarebbe possibile associare ad ogni punto di AB un intorno quadrato non contenente (punti di I' diversi da quello e perciò non contenente) punti di I' esterni alla retta $y = y_0$. Per il teorema di Borel si potrebbero trovare, in AB, n punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ tali che i loro corrispondenti intorni quadrati $U(P_1)$, $U(P_2)$, ..., $U(P_n)$ ricoprano AB. Se ε è la misura del lato del più piccolo fra gli intorni $U(P_i)$, indichiamo con $U_\varepsilon(y_0)$ l'intervallo di centro y_0 ed ampiezza ε. Per ogni $y \neq y_0$ di $U_\varepsilon(y_0) \cdot I_y$ la sezione $S(y)$ non contiene punti di I', contro l'ipotesi fatta su y_0. Dunque c'è almeno un punto (x_0, y_0) di AB d'accumulazione per I'. La semicontinuità superiore di $S(y)$ ci permette di affermare che tale punto è un punto di I e poichè I' è chiuso su I, il punto (x_0, y_0) appartiene pure ad I' ed y_0, in quanto proiezione di un punto di I', è un punto di I'_y: quest'ultimo insieme è pertanto chiuso su I_y.

4. - I teoremi di Scorza Dragoni e Bonnesen sono ora suscettibili di essere diversamente formulati. Precisamente, il secondo teorema del n. 1 diventa:

Se $S(y)$ è inferiormente semicontinua in I_y, $e''(y)$ è inferiormente ($e'(y)$ è superiormente) semicontinua in I_y, se $f(x, y)$ è inferiormente (superiormente) semicontinua in I.

Quanto al primo, esso può essere posto nella seguente forma più generale:

Se l'insieme I è limitato nell'intorno di ogni sua sezione $S(y)$ e se $S(y)$ è superiormente semicontinua in I_y, $e'(y)$ è inferiormente ($e''(y)$ è superiormente) semicontinua in I_y, se $f(x, y)$ è inferiormente (superiormente) semicontinua in I.

---

11) Il ragionamento che segue è di tipo notissimo ed il risultato pure non è nuovo.

Se le sezioni $S(y)$ fossero chiuse, questo teorema sarebbe equivalente al primo teorema del n. 1, in virtù delle considerazioni del numero precedente; poichè così non è, bisogna darne una dimostrazione diretta.

Ma prima voglio osservare che questo teorema fornisce la spiegazione di alcune circostanze rilevate da Scorza Dragoni in casi particolari ([12]). Egli aveva osservato appunto che $e'(y)$ era inferiormente semicontinua in I_y se $f(x,y)$ era tale nell'insieme I ottenuto aggregando il segmento $1 < x < 2$, $y = 1$ al quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, mentre invece lo stesso non si poteva dire se $f(x, y)$ era inferiormente semicontinua nell'insieme $0 < x < 1$, $0 \leq y \leq 1$. Ebbene, nel primo caso $S(y)$ è appunto superiormente semicontinua, nel secondo no.

Ecco ora la dimostrazione del teorema.

Sia y_0 un punto di I_y, poniamo $e'(y_0) = \alpha$, e supponiamo, se possibile, che, dati comunque un numero $\varepsilon > 0$ e un intorno $U(y_0)$ di y_0, per qualche y di $U(y_0) \cdot I_y$ sia $e'(y) \leq \alpha - \varepsilon$. In tal caso ogni striscia di asse la retta $y = y_0$ contiene punti (x, y) di I in cui è $f(x, y) \leq \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$, cioè contiene punti appartenenti all'insieme, chiuso su I, $I\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, in cui è $f(x, y) \leq \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$. Supposta l'altezza di una tal striscia abbastanza piccola, sia AB un segmento della retta $y = y_0$ contenente tutte le proiezioni ortogonali su tale retta delle sezioni comprese nella striscia considerata; dico che l'insieme $I\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, il quale non ha ovviamente punti su AB, ha almeno un punto di accumulazione su AB. Infatti, se così non fosse, ad ogni punto di AB si potrebbe associare un intorno quadrato non contenente punti di $I\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e quindi per il teorema di Borel si potrebbe ricoprire AB con un numero finito di tali intorni e di qui seguirebbe l'esistenza di un intorno di y_0 per tutti gli y del quale, appartenenti ad I_y, l'intersezione $S(y) \cdot I\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ sarebbe vuota.

---

[12]) loc. cit. [1]), n. 4.

Dunque, dall'ipotesi che in ogni intorno di y_0 ci siano punti (di I_y) in cui $e'(y) \leq \alpha - \varepsilon$, si deduce che c'è certamente un punto (x_0, y_0) di AB d'accumulazione per $I\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Ma questo insieme non ha punti sulla retta $y = y_0$; pertanto la semicontinuità superiore di $S(y)$ ci assicura che (x_0, y_0), appartiene ad $S(y_0)$ e quindi anche ad $I\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, attesa la chiusura di quest'ultimo insieme su I. Ma tutto ciò è manifestamente assurdo; perciò si deve poter trovare un intorno $U(y_0)$, di y_0 tale che per tutti gli y di $U(y_0) \cdot I_y$ risulti $e'(y) > \alpha - \varepsilon$, e questo significa appunto che $e'(y)$ è inferiormente semicontinua in y_0.

Il confronto di questa dimostrazione con quella seguita per provare che, se l'insieme I è limitato nell'intorno di ogni sua sezione ed $S(y)$ è superiormente semicontinua in I_y, l'insieme I gode della proprietà *c*), mostra come il ragionamento rimanga in sostanza immutato. E lo stesso si può dire nei riguardi della dimostrazione, diciamo così, diretta del primo teorema enunciato in questo numero e di quella usata per provare che, se $S(y)$ è inferiormente semicontinua, l'insieme I gode della proprietà *a*).

Dai teoremi precedenti, limitandosi per semplicità al caso degli insiemi limitati, si deduce che:

Se l'insieme I è limitato ed $S(y)$ è continua in I_y, $e'(y)$ ed $e''(y)$ sono continue in I_y, se $f(x, y)$ è tale in I.

Per chiarire la portata delle ipotesi di questo teorema, è opportuno osservare esplicitamente che:

Se $S(y)$ è continua nel punto y_0, di conseguenza $S(y_0)$ è chiusa ([18]).

Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto della retta $y = y_0$ di accumulazione per $S(y_0)$. Poichè in ogni intorno di P_0 cadono punti di $S(y_0)$, un tale intorno può sempre essere pensato anche quale intorno di un punto di $S(y_0)$ e quindi, per la semicontinuità inferiore di $S(y)$ in y_0, in corrispondenza ad ogni intorno $U(x_0, y_0)$ di P_0 è possibile determinare un intorno $U(y_0)$ di y_0 tale che per

[18]) Ci troviamo così condotti naturalmente a considerare sezioni chiuse; cfr. la nota [9]).

ogni y di $U(y_0)\cdot I_y$ l'intersezione $S(y)\cdot U(x_0, y_0)$ non sia vuota. Pertanto, dati comunque un intorno $U(x_0, y_0)$ di P_0 ed un intorno $V(y_0)$ di y_0, per tutti gli y di $(V(y_0)\cdot U(y_0))\cdot I_y$ l'intersezione $S(y)\cdot U(x_0, y_0)$ non è vuota; ma allora, per la semicontinuità superiore di $S(y)$ in y_0, il punto P_0 appartiene ad $S(y_0)$, che risulta così chiusa, come appunto volevasi.

Si osservi che la dimostrazione è indipendente da ogni ipotesi di limitazione per l'insieme I.

5. - Dedichiamo questo numero a qualche osservazione complementare.

Se l'insieme I è il rettangolo definito dalle limitazioni $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, allora basta sapere che $f(x, y)$ è, in I, inferiormente semicontinua rispetto ad y per poter affermare che il suo estremo superiore, $e''(y)$, è inferiormente semicontinuo in $c \vdash\!\dashv d$.

Infatti, se y_0 è un punto di $c \vdash\!\dashv d$ per cui si ha $e''(y_0) > \alpha$, esiste certamente almeno un punto (x_0, y_0) di I in cui è $f(x_0, y_0) > \alpha$. Per la semicontinuità inferiore della funzione $f(x_0, y)$, si può trovare un intorno $U(y_0)$ del punto y_0 siffatto che per tutti gli y di $U(y_0)$ contenuti in $c \vdash\!\dashv d$ risulti $f(x_0, y) > \alpha$, e pertanto $e''(y) > \alpha$, e questo basta per affermare che $e''(y)$ è inferiormente semicontinua.

Naturalmente, se $f(x, y)$ è, nel rettangolo I, superiormente semicontinua rispetto ad y, il suo estremo inferiore, $e'(y)$, è superiormente semicontinuo in $c \vdash\!\dashv d$.

Invece, dalla sola semicontinuità inferiore (superiore) di $f(x, y)$ rispetto ad y in I, non si può dedurre la semicontinuità superiore di $e''(y)$ (inferiore di $e'(y)$) in $c \vdash\!\dashv d$.

Sia, ad esempio, I il quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ e definiamo in I la funzione $f(x, y)$ come segue: nell'origine sia

$$f(0, 0) = 0;$$

nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ privato dell'origine poniamo

$$f(x, y) = \frac{x}{y};$$

in tutti i rimanenti punti di I sia poi

$$f(x,\ y)=\frac{y}{x}.$$

La funzione $f(x,\ y)$ così definita è addirittura continua sia rispetto alla sola x che rispetto alla sola y (anzi continua senz'altro in ogni punto diverso dall'origine); ma $e''(y)$ non è superiormente semicontinua nel punto $y=0$: infatti è $e''(0)=0$ ed $e''(y)=1$ per $0<y\leq 1$.

Analogamente si vede che, per la funzione $-f(x,\ y)$, $e'(y)$ non è inferiormente semicontinua nel punto $y=0$.

Un'ultima osservazione: Bonnesen e Scorza Dragoni avevano preso in esame anche il caso in cui la funzione $f(x,\ y)$ era data in un insieme I decomposto in una infinità di porzioni prive a due a due di punti comuni e poste in corrispondenza biunivoca con un parametro z. In tal caso, I_z è l'insieme dell'asse z costituito dai valori di z cui corrispondono punti di I, $S(z)$ la porzione di I corrispondente al valore z del parametro, $e'(z)$ ed $e''(z)$ gli estremi, inferiore e superiore, di $f(x,\ y)$ su $S(z)$. Ci si può chiedere se non si possa estendere anche al caso di simili decomposizioni più generali la nuova formulazione data in questa Nota ai teoremi di Bonnesen e Scorza Dragoni, allorchè I è decomposto nelle sue sezioni con le orizzontali.