RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 84-92

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__84_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PUNTI UNITI IN TRASFORMAZIONI A CODOMINIO NON COMPATTO

Nota (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Padova*)

J. SCHAUDER [1]) ha esteso il teorema di BIRKOFF-KELLOG agli spazi lineari normali completi, dimostrando l'esistenza di un punto unito in ogni trasformazione continua di un insieme convesso e chiuso in un sottinsieme di una sua porzione bicompatta. R. CACCIOPPOLI, in una Nota [2]) pressochè contemporanea a quella dello SCHAUDER, ha dimostrato il teorema per alcuni spazi funzionali particolari, mostrandone la sua utilità con varie interessanti applicazioni. A. TYCHONOFF [3]), successivamente, ha tolto alcune restrizioni circa la natura dello spazio lineare mantenendosi tuttavia nell'ipotesi della bicompattezza.

Ha interesse, per le numerose applicazioni di cui è suscettibile questo teorema, la ricerca di nuove estensioni, particolarmente nell'intento di eliminare ipotesi sulla compattezza dell'insieme trasformato. Un primo interessante risultato in tal senso, è stato raggiunto recentemente da M. VOLPATO [4]), per particolari spazi funzionali.

(*) Pervenuta in Redazione il 10 novembre 1954.

1) J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, [Studia Math., T. II, (1930)], pp. 171-180.

2) R. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, [Rend. Acc. Lincei, s. VI, t. 11. (1930)], pp. 794-799; per ulteriori applicazioni si veda anche: *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti*, [Rend. Acc. Lincei, s. VI, t. 13, (1931)], pp. 498-502.

3) A. TYCHONOFF, *Ein Fixpunktsatz*, [Math. Annalen, T. 111, (1930)], pp. 767-776.

4) M. VOLPATO, *Sugli elementi uniti di trasformazioni funzionali: un problema ai limiti per una classe di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*, [Ann. Univ. Ferrara, Vol. II, N. 8, (1953)] pp. 93-109.

Scopo del presente lavoro è di estendere il teorema nella forma più generale datagli da SCHAUDER, per una categoria di trasformazioni a codominio non compatto.

1. - Al fine propostoci, faremo uso di una notevole generalizzazione del teorema di CANTOR, relativa all'intersezione di una successione d'insiemi di uno spazio metrico completo. Prendiamo perciò le mosse dalla seguente

DEFINIZIONE [5]: *Sia X un insieme limitato di uno spazio metrico completo Σ. Indicheremo con $\alpha(X)$, l'estremo inferiore dei numeri positivi ε per i quali è possibile decomporre l'insieme X nella somma di un numero finito di parti di diametro inferiore ad ε.*

Se X è un generico sottinsieme di Σ, indicheremo con $\bar{X}$ la sua chiusura; con X_ε l'ε-intorno aperto di X, cioè l'insieme dei punti di Σ che distano da qualche punto di X meno di ε; con $\delta(X)$ il diametro di X.

Sono allora conseguenze immediate della precedente definizione le seguenti proprietà:

1) se X e Y sono porzioni limitate di Σ, ed è $X \subset Y$, si ha $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$;

2) per ogni $\varepsilon > 0$ è $\alpha(X_\varepsilon) \leq \alpha(X) + 2\varepsilon$;

3) $\alpha(\bar{X}) = \alpha(X)$;

4) $\alpha(X + Y) = \max \{ \alpha(X), \alpha(Y) \}$.

Tralasciamo la facile dimostrazione delle proprietà 1), 2), 3), 4). Dalla definizione di $\alpha(X)$ segue ancora che la condizione $\alpha(X) = 0$ equivale ad affermare che X è totalmente limitato, ossia compatto relativamente a Σ [6].

Sussiste la seguente generalizzazione del teorema di CANTOR [7]:

---

[5] Cfr.: C. KURATOWSKI, *Topologie*, [Warszawa (1952)], vol. I, pag. 318 e seg.

[6] Cfr.: P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie*, [Berlin, (1935)], vol. I, pag. 104 e seg.

[7] Vedi op. cit. in [5]), pag. 318 e seg.

A) *Ogni successione decrescente* $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ *di sottinsiemi limitati, chiusi e non vuoti di uno spazio metrico completo* Σ, *per cui si ha* $\lim \alpha(X_n) = 0$, *ha una intersezione* $Y_0 = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \cdot \ldots$ *non vuota e compatta.*

Nel caso della compattezza degli insiemi X_n si ha per ogni n, $\alpha(X_n) = 0$ e si ricade così nel teorema classico di CANTOR.

2. - DEFINIZIONE DI α-CONTRAZIONE: *chiameremo α-contrazione, ogni trasformazione continua*

$$x' = \xi(x)$$

di uno spazio metrico Σ *in se, che soddisfa alle seguenti due proprietà:*

I. *Ogni insieme limitato di* Σ, *venga trasformato dalla* ξ *in un insieme limitato.*

II. *Qualunque sia l'insieme limitato* $X \subset \Sigma$, *posto* $X' = \xi(X)$, *risulti*

$$\alpha(X') \leq k\alpha(X)\,, \tag{1}$$

con k un conveniente numero non negativo, minore di 1, *e indipendente da* X.

Da questa definizione segue che ogni trasformazione *completamente continua* è una α-contrazione, poichè il trasformato di ogni insieme limitato è compatto in Σ, ed è $\alpha(X') = 0$; basterà prendere dunque $k = 0$ perchè le condizioni I e II siano entrambe soddisfatte. Così pure sono α-contrazioni le contrazioni ordinarie degli spazi metrici, cioè le trasformazioni $x' = \xi(x)$ per cui esiste una costante $k < 1$ tale che per ogni coppia x_1, x_2 di punti di Σ si abbia

$$(x_1', x_2') \leq k(x_1, x_2), \qquad x_i' = \xi(x_i)$$

le parentesi stando ad indicare la distanza tra i due punti di Σ.

Ci sarà comodo per il seguito, chiamare *modulo* di una α-contrazione ξ, il più piccolo valore non negativo di k, che indicheremo con k_ξ, per cui sussiste la (1) qualunque sia l'insieme X limitato di Σ.

Si vede allora che la classe delle trasformazioni completamente continue coincide con quella delle α-contrazioni di modulo nullo.

Si noti inoltre che l'insieme X_0 delle soluzioni dell'equazione

$$x = \xi(x),$$

ξ essendo una α-contrazione, è localmente compatto. Infatti, X_0 è chiuso; se H è una porzione limitata di X_0 è $H = \xi(H)$, per cui $\alpha(H) \leq k_\xi \alpha(H)$, ossia $\alpha(H) = 0$, donde la compattezza di H in Σ.

Facciamo osservare infine che ogni porzione limitata e chiusa X_1 di Σ che venga trasformata in sé da una α-contrazione ξ, contiene un insieme compatto (non vuoto) Y_0 coincidente con il proprio trasformato $\xi(Y_0)$. Infatti, posto $X_2 = \xi(X_1)$, ..., $X_{n+1} = \xi(X_n)$, ..., si ottiene una successione decrescente d'insiemi chiusi limitati e non vuoti. Inoltre essendo $\alpha(X_{n+1}) \leq k_\xi \alpha(X_n)$ con $0 \leq k_\xi < 1$, si ha pure $\lim \alpha(X_n) = 0$ e per il teorema A) sarà $Y_0 = X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n ... ... = \lim X_n$, l'insieme compatto e non vuoto di cui sopra.

L'esistenza di un insieme compatto unito per una α-contrazione, non è in generale sufficiente per poter affermare senz'altre ipotesi, l'esistenza di punti uniti. Fino a questo momento però, non abbiamo fatto alcuna ipotesi sullo spazio metrico Σ oltre alla completezza. Vedremo in seguito come sia possibile giungere a un teorema di esistenza di punti uniti, nel caso che Σ sia uno spazio lineare normale completo.

3. - Alcuni lemmi sugli spazi lineari normali. — Supporremo d'ora in avanti, che Σ sia uno *spazio lineare normale*, in cui, cioè è definita una *norma* per ogni elemento $x \in \Sigma$, che indicheremo con $||x||$, con le seguenti proprietà:

a) $||x|| \geq 0$, l'uguaglianza valendo solo per l'elemento nullo di Σ;

b) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

c) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

x e y essendo elementi di Σ e λ un numero reale.

Se X è un generico insieme di un tale spazio Σ, indicheremo con X^* l'involucro convesso di X, l'intersezione, cioè, di tutti gli insiemi convessi contenenti X.

Negli spazi lineari normali, vale il seguente

LEMMA I. - *Un insieme limitato X e il suo involucro convesso X^* hanno ugual diametro.*

Infatti, da $X \subset X^*$ segue $\delta(X) \leq \delta(X^*)$. Supponiamo allora, per assurdo, $\delta(X) < \delta(X^*)$: potremo trovare due punti x_1 e x_2 in X^* la cui distanza $\| x_1 - x_2 \|$ è maggiore di $\delta(X)$. Consideriamo la sfera S_1, di centro x_1 e raggio $\delta(X)$: se S_1 contiene X, allora $S_1 \cdot X^*$ è convesso, contiene X, ed è una parte propria di X^* poichè esclude il punto $x_2 \in X^*$, il che è assurdo. Se S_1 non contiene X, vi sarà un punto $\bar{x} \in X$ fuori di S_1. Allora la sfera $\bar{S}$ di centro $\bar{x}$ e raggio $\delta(X)$ contiene X ed esclude il punto $x_1 \in X^*$; si giunge così ugualmente ad un assurdo. Possiamo ora dimostrare, sempre nell'ipotesi che Σ sia uno spazio lineare normale il seguente

LEMMA II. - *Per ogni insieme limitato $X \subset \Sigma$ si ha $\alpha(X) = \alpha(X^*)$.*

Supponiamo X decomposto in parti $\{X_r\}$, $(r = 1, 2, \dots, n)$ di diametro $\delta(X_r) < \varepsilon$ essendo $\varepsilon > \alpha(X)$. Sarà anche $\delta(X_r) \leq \varepsilon' < \varepsilon$ per una scelta conveniente di ε' e quindi in virtù del lemma I, $\delta(X_r^*) \leq \varepsilon'$. Fissata una n-upla di numeri $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ e $\sum_{1}^{n}{}_i \lambda_i = 1$, che potremo considerare come un punto di un simplesso euclideo T, indichiamo con $Y(\lambda)$ l'insieme descritto dal punto

$$x = \Sigma_i \lambda_i x_i$$

al variare comunque dei punti x_i nei corrispondenti insiemi convessi X_i^*.

L'insieme $Y(\lambda)$, per ogni $\lambda \in T$ è di diametro non superiore a ε'; infatti se

$$x' = \Sigma_i \lambda_i x_i' \quad , \quad x_i' \in X_i^*,$$

$$x'' = \Sigma_i \lambda_i x_i'' \quad , \quad x_i'' \in X_i^*$$

sono punti di $Y(\lambda)$ si ha

$$\|x'-x''\| = \|\Sigma_i \lambda_i(x_i'-x_i'')\| \leq \Sigma_i \lambda_i \|x_i'-x_i''\| \leq \Sigma_i \lambda_i \delta(X_i^*) \leq \varepsilon' \Sigma_i \lambda_i = \varepsilon',$$

da cui segue $\delta[Y(\lambda)] \leq \varepsilon'$.

Ogni punto di X appartiene a un insieme $Y(\lambda)$ con λ convenientemente scelto in T. Invero, se è $\lambda_i = 0$ per $i \neq r$ e $\lambda_r = 1$, si ha $Y(\lambda) = X_r^* \supset X_r$, ed è $\sum_1^n {}_r X_r = X$.

Al variare di λ in T, $Y(\lambda)$ descrive un insieme convesso $Y(T)$ coincidente con X^*. Di fatto, siano x e y punti di $Y(T)$; allora si potrà scrivere $x = \Sigma_i \lambda_i x_i$, $y = \Sigma_i \mu_i y_i$ con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ punti di T e x_i, y_i scelti in X_i^*. Un punto z del segmento di estremi x, y è della forma

$$z = hx + ky \quad , \quad \text{con } h \geq 0,\ k \geq 0,\ h + k = 1$$

ed esprimibile mediante

$$z = \Sigma_i \theta_i z_i$$

con gli $z_i \in X_i^*$, scelti in modo che

$$\theta_i z_i = h\lambda_i x_i + k\mu_i y_i,$$

avendo posto $\theta_i = h\lambda_i + k\mu_i$. Sarà quindi $z \in Y(\theta)$ essendo $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in T$. L'insieme $Y(T)$ è convesso dunque. ed essendo $X \subset Y(T) \subset X^*$, dovrà coincidere con X^*.

D'altronde $Y(\lambda)$, come risulta da semplici considerazioni, è funzione di λ semicontinua superiormente, vale a dire, per ogni $\bar{\lambda} \in T$ e per ogni $\eta > 0$, si può trovare un intorno σ di $\bar{\lambda}$ tale che al variare di λ in σ risulti sempre

$$Y(\lambda) \subset [Y(\bar{\lambda})]_\eta .$$

Per il lemma di PINCHERLE-BOREL, sarà poi possibile ricoprire T con un numero finito di intorni $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(v)}$, di certi punti $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(v)}$ di T, tali che nel generico di essi si abbia

$$Y(\lambda) \subset [Y(\lambda^{(j)})]_\eta \quad \text{per } \lambda \in \sigma^{(j)}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, v)$$

Supponiamo di aver fissato $\eta = (\varepsilon - \varepsilon')/3$;

avremo

$$Y(\sigma^{(j)}) \subset [Y(\lambda^{(j)})]_\eta ,$$

da cui per le proprietà 1) e 2)

$$\delta\{Y(\sigma^{(j)})\} \leq \delta\{[Y(\lambda^{(j)})]_\eta\} \leq \delta\{Y(\lambda^{(j)})\} + 2\eta \leq \varepsilon' + 2\eta < \varepsilon .$$

Ma è

$$\sum_{1}^{\nu}{}_j\, Y(\sigma^{(j)}) = Y(T) = X^* ,$$

quindi possiamo affermare che: *data una decomposizione di X in un numero finito di parti di diametro minore di ε, è possibile decomporre anche X^* in un numero finito di parti di diametro minore di ε.* Da ciò segue

$$\alpha(X^*) \leq \alpha(X) ,$$

e dovendo essere anche

$$\alpha(X) \leq \alpha(X^*) ,$$

si è dimostrato l'asserto.

4. - L'ESISTENZA DI PUNTI UNITI. — Ci sarà facile dimostrare ora il seguente

TEOREMA. - *Sia ξ una α-contrazione, definita in un insieme convesso e chiuso X di uno spazio lineare normale e completo Σ. Sia inoltre l'immagine $\xi(X)$ limitata e contenuta in X. In tali ipotesi esiste in X almeno un punto unito per la ξ.*

Indichiamo con X_1 la chiusura dell'involucro convesso dell'immagine di X; poniamo cioè

$$X_1 = \overline{\{\xi(X)\}^*} .$$

Per le ipotesi fatte sarà $X_1 \subset X$. In modo ricorrente costruiamo la successione decrescente d'insiemi convessi chiusi e limitati.

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots \tag{2}$$

ponendo, per ogni intero positivo n

$$X_{n+1} = \overline{\{\xi(X_n)]\}^*} .$$

Se k_ξ è il modulo dell'α-contrazione ξ, si avrà per la proprietà 3) e in virtù del lemma II

$$\alpha(X_{n+1}) = \alpha[\xi(X_n)] \leq k_\xi \alpha(X_n).$$

Di qui si ricava

$$\alpha(X_n) \leq k_\xi^{\,n-1}\, \alpha(X_1),$$

e infine

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(X_n) = 0.$$

La successione (2), per il teorema A), avrà dunque una intersezione $Y_0 = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_n \ \ldots$, non vuota e compatta. Sarà pure Y_0 convesso, tali essendo gli X_n. Inoltre dalla relazione $\xi(X_n) \subset X_n$, segue

$$\xi(Y_0) \subset Y_0.$$

Per il citato teorema dello SCHAUDER esisterà in Y_0, e perciò in X, un punto unito $x_0 = \xi(x_0)$.

5. - In vista di applicazioni del precedente teorema potrà esser utile il seguente

TEOREMA DI CONFRONTO. - *Se ξ è una α-contrazione definita in uno spazio metrico Σ, e η una trasformazione nello stesso spazio, tale che per ogni coppia x_1, x_2 di punti di Σ si abbia*

$$(\eta(x_1), \eta(x_2)) \leq (\xi(x_1), \xi(x_2)), \tag{3}$$

anche η è una contrazione, di modulo $k_\eta \leq k_\xi$

Osserviamo intanto che dalla (3) segue che η è continua e trasforma insiemi limitati in insiemi limitati.

Sia X un qualunque insieme limitato di Σ ed ε un numero positivo. Posto $X' = \xi(X)$ e $X'' = \eta(X)$, decomponiamo X' in un sistema finito di parti X'_r di diametro $\delta(X'_r) \leq \leq \alpha(X') + \varepsilon \leq k_\xi\, \alpha(X) + \varepsilon$. Detto X_r l'insieme dei punti x di X tali che $\xi(x) \in X'_r$, sarà $X = \Sigma_r X_r$ e per la (3)

$$\delta[\eta(X_r)] \leq \delta[\xi(X_r)] \leq k_\xi \alpha(X) + \varepsilon.$$

Avremo così decomposto X'' in un numero finito di parti $\eta(X_r)$, di diametro non superiore a $k_\xi\, \alpha(X) + \varepsilon$, per cui dovrà aversi

$$\alpha(X'') \leq k_\xi \alpha(X) + \varepsilon,$$

donde, per l'arbitrarietà di ε

$$\alpha(X'') \leq k_\xi \alpha(X),$$

e di qui il teorema enunciato.

PRODOTTI FUNZIONALI DI α-CONTRAZIONI. - Sussiste il seguente teorema, di cui tralasciamo la ovvia dimostrazione:

Siano ξ e η due α-contrazioni in uno spazio metrico Σ, allora il prodotto funzionale $\theta = \xi\eta$ (definito ponendo $\theta(x) = \xi[\eta(x)]$ è pure una α-contrazione ed è $k_\theta \leq k_\xi \cdot k_\eta$.

COMBINAZIONI LINEARI DI α-CONTRAZIONI NEGLI SPAZI LINEARI NORMALI. - Dimostriamo infine il teorema seguente:

Se $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sono α-contrazioni in uno spazio lineare normale Σ, la trasformazione

$$\xi(x) = \Sigma_i \lambda_i \xi_i(x), \qquad (\lambda_i \text{ costanti reali})$$

è una α-contrazione qualora sia $\sum_1^n{}_i \mid \lambda_i \mid k_{\xi_i} < 1$, ed è $k_\xi \leq \sum_1^n{}_i \mid \lambda_i \mid k_{\xi_i}$.

Sia X un insieme limitato di Σ, ε positivo arbitrario. Potremo decomporre X in un sistema finito di parti X_r in modo che risulti simultaneamente per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, e per ogni r

$$\delta\{\xi_i(X_r)\} \leq \alpha[\xi_i(X)] + \varepsilon \leq k_{\xi_i}\alpha(X) + \varepsilon.$$

Allora per ogni coppia di punti x_1, x_2 di X_r sarà

$$\|\xi(x_1) - \xi(x_2)\| = \|\Sigma_i \lambda_i \xi_i(x_1) - \Sigma_i \lambda_i \xi_i(x_2)\| \leq \Sigma_i |\lambda_i| \cdot \|\xi_i(x_1) - \xi_i(x_2)\| \leq$$
$$\leq \Sigma_i \mid \lambda_i \mid \delta\{\xi_i(X_r)\} \leq \Sigma_i \mid \lambda_i \mid (k_{\xi_i}\alpha(X) + \varepsilon),$$

ossia

$$\delta[\xi(X_r)] \leq \Sigma_i \mid \lambda_i \mid (k_{\xi_i}\alpha(X) + \varepsilon).$$

Si è decomposto così $\xi(X)$ in un sistema finito di parti $\xi(X_r)$ di diametro non superiore a $\Sigma_i |\lambda_i| (k_{\xi_i}\alpha(X) + \varepsilon)$ da cui, tenendo presente l'arbitrarietà di ε, segue facilmente il teorema.