RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GEORGES BOULIGAND

Quelques types de situations dans la recherche mathématique

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 53-69

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__53_0>

QUELQUES TYPES DE SITUATIONS DANS LA RECHERCHE MATHÉMATIQUE

Nota (*) *di* GEORGES BOULIGAND (*a Parigi*)

INTRODUCTION. — On constate une tendance récente à mieux préciser les moyens offerts au chercheur pour accroitre ses chances. Le hasard des recontres n'est pas seul en cause. Ayant rappelé des étapes franchies et qui contribuent à l'actuel climat mathématique, je rassemble ici ce qui touche à une *méthodologie de la recherche,* d'efficacité certes limitée, mais pourtant indispensable. Commentant à proximité un récent ouvrage du professeur G. Polya, je termine en donnant des exemples suggérés par les idées génerales du présent article, et extraits d'un de mes cours de la présente année scolaire (*sur quelques problemes fondamentaux de la théorie des transformations*).

1. - C'est un fait qu'en suivant certains exposés, on se sent très stimulé par eux. Ce pouvoir d'appel à la recherche s'affirmait par exemple, en 1912, dans les leçons magistrales que fit Vito Volterra, à la Sorbonne, sur les équations intégrales et intégro-différentielles. La pensée de l'illustre gèomètre prenait appui sur le *passage du fini à l'infini* et en tirait des developpements d'une grande richesse, en vue de la Physique mathématique.

Les savants d'une telle fécondité n'écrivent guère sur la conduite optima des *recherches en général.* Mais, c'est visible chez Volterra, leurs mémoires de base n'en marquent pas

(*) Pervenuta in Redazione il 3 dicembre 1954.

moins la route. Veici un autre exemple: au n. 6 de sa Thèse, *sur quelques points du calcul fonctionnel,* Paris, 18 juin 1906, travail publié aux *Rendiconti* de Palerme. M. Maurice Fréchet s'est exprimé à peu près comme suit:

Les résultats les plus importants de la théorie des ensembles dècoulent de la notion de limite. On n'introduit jamais cette notion qu'en spécifiant la nature des éléments que l'on considère. Cest le même fait qui se produisait quand on développait séparément les théories des groupes de mouvements, de substitutions, de transformations, où chaque catégorie d'éléments donne lieu à un mode de composition défini, mais dont la définition variait d'une catégorie à l'autre. On n'unifie la théorie qu'en recherchant les conditions communes aux dèfinitions particulières, ne retenant que celles indèpendantes de la nature des éléments considérés.

Le programme ainsi tracé s'est épanoui chez son auteur, comme témoignait, en 1926, sa communication au Congrès de Bologne, reproduite au début des *Pages choisies d'analyse générale.* Et d'ailleurs, ce recueil jumelé avec *les Espaces abstraits* (1928) donne une idée nette de l'oeuvre accomplie depuis 1906.

Pareils textes révêlent des secteurs de choix pour la quête du nouveau. En fait, M. Maurice Fréchet a suscité des travaux dans tous les pays, et cela, dans un sens favorable à la conception axiomatique, qui domine, après renoncement au concret. Il en est résulté une nouvelle organisation globale de la Mathématique, charpentée au moyen des *structures.* Plusieurs théories, issues de thèmes spécialisés qui les distinguaient, retrouvent même base dans une trame unique de relations accusant la raison profonde des unes et des autres. Pour la divisibilité par exemple, le cas des entiers et le cas des polynomes $f(x)$ se fondent dans la structure d'*anneau euclidien,* à laquelle les polynomes $f(x, y)$ sont étrangers.

Cette tendance, singulièrement ramifiée, indique dans la recherche la possibilité d'un type de situation: regroupement opportun de résultats déjà substantiels en les repensant d'une autre manière. On a donné primauté à des *tracés déductifs* déjà rencontrés, pour en conserver la ligne et unir, par elle, tout ce qui s'y prête naturellement. C'est ce qu'avait dèjà fait Emile Picard en montrant tout ce qu'on peut tirer d'un principe simple, celui des *approximations successives*, qui a renouvelé tant de questions.

2. - Il est dans la recherche un autre type de situation dont on a beoucoup parlé: c'est la rencontre de *problèmes chantiers,* terme qu'on peut employer pour suggérer que, dans l'évolution de la pensée mathématique, de tels problèmes dominent l'histoire de toute une période, bien que leur objectif initial fût assez localisé. A ce titre, citons l'étude des cordes et membranes vibrantes d'une part, celle de l'èquilibre et de l'évolution thermiques sur un conducteur de la chaleur d'autre part. C'est dans cette voie qu'a prospéré l'*Analyse linéaire,* avec tout ce qui touche aux vibrations propres et fréquences propres d'un système et aux dèveloppements en série qui en résultent; il y a là un vaste secteur englobant l'ètude des opérateurs fonctionnels, et notamment de ceux utilisés dans le calcul symbolique, éclairé aujourd'hui par la *théorie des distributions* de M. Laurent Schwartz. Avec l'appui de l'intégrale de Lebesgue, les dèveloppements cités à l'instant et obtenus à partir de suites de fonctions orthogonales ont mis à l'ordre du jour l'espace hilbertien et les nouveaux aspects qu'il donne aux problèmes de la Physique mathématique.

Le type de situation ainsi rappelé est assez différent de celui rencontré au n. 1, car il ne s'agit plus ici d'opter pour un principe méthodologique et d'en pousser le plus loin possible les conséquences. La portée d'une recherche, d'objet concret et bien délimité, sur les méthodes dans certaines parties des mathématiques risque fort d'échapper dans les premieres tentatives. C'est petit à petit que le thème choisi se révêle comme propre à une convergence efficace d'efforts. Ici, le coefficient individuel est assez faible au départ: il se renforce à mesure que des résultats substantiels sont atteints. Le type de situation évoqué au n. 1 se reproduit alors, ce qui permet à un esprit pénétrant d'aménager ces résultats à partir de principes simples, qui réussiront aussi dans des questions voisines.

3. - Les deux types mis à l'instant en parallèle concernent des situations oò se réalisent des conquêtes de grande ampleur. Mais pour ceux qui souhaitent rencontrer une voie propice, la contemplation des cimes est un peu décourageante. Le décor change totalement dès qu'on veut admettre la possibilité de la recherche à des niveaux variés, par exemple, quand on se propose de clarifier certaines questions en vue de l'enseignement. A cet égard, j'ai surtout expérimenté sur la géometrie différentielle en m'appliquant d'abord à lui donner, en vue des cours de licence, une forme aisément assimilable; chose facile dans les années qui suivirent 1920, les méthodes vectorielles ayant été déjà trés largement exploitées à cet égard. Par comparaison avec l'avance prise par la théorie du potentiel, je pus ainsi mesurer l'effort qui s'imposait en théorie des surfaces, pour la faire participer aux progrès accomplis en théorie des fontions; cela, tenant compte des beaux apports fournis déjà, au sujet de l'isométrie des surfaces, par la thèse de Lebesgue, *intégrale, longueur, aire,* Paris, 1902, travail publié aux *Annali di Matematica.*

Or justement, la théorie des fontions donne un exemple insigne de ce qui peut résulter du choix des notions introduites. René Baire, s'occupant des fonctions discontinues, avait su voir dans la continuité la coexistence de deuv notions,

semi-continuité inférieure, semi-continuité supérieure

impliquant respeetivement, pour la fontion étudiée, l'existence

d'un *minimum,* d'un *maximum*

quand l'élément variable, s'il a rôle de point dans un espace cartésien E_n, décrit dans cet E_n un ensemble fermé borné; ou sinon, décrit un ensemble F dont toute partie infinie a un point d'accumulation dans F (Fréchet, loc. cit.). Chacune des deux semi-continuités prend ainsi un *rôle causal,* qui à partir d'exemples rencontrés par Lebesgue dans sa thèse et des développements systématiques de L. Tonelli, a projeté une vive lumière sur le calcul des variations.

Voilà donc un cas typique où il avait été utile, dans la recherche, d'assimiler les hypothèses à des *causes,* les conclusions à des *effets*. L'exploration se fait ainsi d'une manière plus méthodique, et d'autre part, le but atteint, on s'oriente plus à l'aise vers l'étude de ses liens avec d'autres sujets.

Or il y a là un point de vue fécond en géométrie différentielle où le recours aux dérivées produisait souvent des énoncés tronqués. D'où l'opportunité d'épurer les énoncés quant aux hypothèses accessoires. Comme je l'ai ainsi montré, le théorème de Meusnier, apparu en thèorie des *surfaces*, appartient en fait à la théorie des *ensembles*. La route suivie a des aspeets que je vais rappeler.

4. - L'activité mathématique est un jeu d'échanges entre les *problèmes* et la *synthèse*. Chaque problème consiste à extraire d'un ensemble E donné les éléments x vérifiant des conditions assignées. Ces conditions peuvent d'ailleurs dépendre d'objets ayant rôle paramétrique. Cela est fréquent: c'est même la règle en Physique mathématique où l'attention se porte en fait sur un *groupement de problèmes*. S'il est d'usage de dire *le* probléme de la représentation conforme, *le* problème de Dirichlet, *le* problème de Plateau, c'est qu'il est commode d'embrasser d'un seul coup d'oeil l'ensemble des cas d'espèce chaque fois réunis sous une étiquette unique. S'organisant d'une manière progressive, la synthèse évolue à mesure que, sous l'influence de groupements naturels entre problèmes, s'installent des concepts plus englobants et aussi, de nouvelles possibilités: par exemple, il est opportun, pour le problème de Dirichlet d'unir son aspect harmonique et son aspect pré-harmonique, ce dernier faisant apparaitre sur le bloc étudié une famille partout dense de cas d'espèce se ramenant à résoudre des systémes de n équations linéaires à n inconnues.

Cela posé, revenons à ce travail de revision des résultats obtenus depuis Monge sous le titre

applications de l'Analyse à la Géométrie.

Ceci comporte, dans une théorie T à prémisses assignées, l'examen critique d'un théorème θ, lequel formule une conclusion donnée γ. On se trouve ainsi en face d'un problème p: trouver, en ayant soin d'en préciser toute l'extension, des objets ω qui vérifient γ. Mais, il importe de le noter, le passage de θ à p n'est une *opération déterminée* qu'une fois fixée la catégorie K dont on veut extraire les ω. Or, pour le théorème de Meusnier, étant parti de surfaces,, on sollicite finalement certains ensembles, K se trouvant ainsi élargie en cours de route. Ceci ne se réduit plus à une déduction s'opérant grâce à un système de structures introduites par avance. Ce qui décèle l'aspect dynamique de la recherche entreprise.

Je n'insisterai pas davantage sur ce point, car j'ai traité dans cet esprit du théorème de Meusnier, et aussi bien d'autres plus simples, parmi lesquels le théorème de Pythagore, dans mon opuscule de 1934, *la Causalité des théories mathématiques* (n. 184, Act. sc. et ind. Hermann). Puis étant revenu à ce genre de sujets en divers textes, notamment au ch. X du t. II des *Principes de l'Analyse géométrique* (1950), j'ai relaté d'une manière explicite divers aspects vécus de la recherche, en plusieurs exposés

a) *L'étalonnage et la géométrie*; déc. 1945,

b) *L'analyse géométrique*; déc. 1949,

c) *Aux lisières de la géométrie différentielle* (enquête sur l'intérêt heuristique des énoncés très généraux); mai 1954 [1]).

En particulier, j'ai rappelé dans a) comment M. Gustave Choquet a établi que la notion d'aire se laisse étendre pour une métrique

$$ds = f(x, y;\, dx, dy) \tag{1}$$

f étant une fonction positive et positivement homogène, du premier degré en dx, dy, l'indicatrice pouvant ou non être convexe. On verra mieux encore dans la note initiale [2]) le

---

[1]) Voir la série A des Conferences du Palais de la Découverte.

[2]) C. R. Ac. Sc. t. 220, 1944, p. 696-699. Voir aussi *Princ. An. géom.*, t. I, p. 385-386.

rôle que prirent alors les idées rappelées ici au n. 3. L'assimilation des hypothèses à des causes, des conclusions à des effets, incite à étudier les propositions du point de vue *topologie générale.* Si une modification infime atteint les hypothèses, verra-t-on la même situation se produire pour la conclusion? C'était là reprendre, en terrain mathématique, un thème rencontré par Duhem en 1906, au ch. II (2e partie) de *La théorie physique, son objet et sa structure*: une théorie des *notions stables* et *propositions stables* peut alors être assise sur les travaux cités de Fréchet (cf. fasc. 548 des Act. sc. et ind. Hermann et t. II des *Princ An. Géom.* nos 82, 103). Or l'aire liée à une mètrique telle que (1), si elle existe, doit être un invariant, par rapport aux changements des variables x, y, et doit être peu affecté par une faible modification de la valeur de f. Le succès tient donc ici à la recherche systématique d'une *notion stable*, condition que j'avais préalablement formulée. Mais le résultat atteint de la sorte implique une organisation optima aux recherches sur les métriques de la forme (1): dans la géométrie afférente, devront être mises à la base les notions qui, ne requérant pas les dérivées, ne sont que très peu affectées par une très faible modification de la valeur de f. Les résultats déclenchés par des prémisses soumettant les éléments (M, dM) de la variété à une connexion euclidienne sont nettement subordonnés aux précedents.

5. - En suivant la direction indiquée aux nos 3 et 4, on amorce à partir de bases précises une méthodologie de recherche, assez efficace en *analyse géométrique.* Revenant sur ce thème dans la *Revue générale des sciences* (1951, t. LVIII, p. 231-246), j'ai en outre étudié les erreurs de prospection hâtive, entre autres, celle qui consiste, pensant à deux énoncés compatibles, à prétendre que l'un entraine l'autre; chose qui n'est pas toujours aussi grossière qu'il peut paraître: par exemple, dans l'éventualité ou, prenant un ensemble de cas simultanés, la dite implication, réalisée en général, se trouve compromise en des cas exceptionnels.

Il y a d'autres aspects de la prospection, en *théorie des* *nombres* principalement, où il est difficile d'anticiper sur les résultats d'une déduction complète. On en est réduit au rôle de l'expérience et à des conjectures appuyées sur l'induction. Ce côté du sujet vient d'être fortement traité par le professeur G. Polya, dans un important ouvrage *Mathematics and Plausible Reasoning.* Très documenté en matière historique, l'exposé se divise en deux volumes, dépassant en totalité 470 pages:

I. *Introduction and Analogy in Mathematics.*

II. *Patterns of Plausible Inference* (préfaces: mai 1953), Princeton University Press.

Comme le pense l'Auteur, un théorème étant pressenti avant d'être démontré, un art du raisonnement plausible devra préluder à l'art de la preuve. Ne sous-estimant pas le point de vue pratique, il s'applique à transmettre le plausible et les cheminements qui le relient à du définitif, au moyen d'un large matériel d'exemples. Il les dispense largement à la suite des divers chapitres, où paraissent tour à tour des thèmes classiques en diverses branches des mathématiques. Ces exemples viennent chaque fois à l'appel des prototypes et des idées générales qui les accompagnent: il y a place pour les exemples historiques, pour ceux qui ont le privilège de la beauté propre et aussi bien pour ceux qui attestent un parallèlisme possible avec d'autres ordres d'études. En outre, le rôle qu'il fallait, au départ, concéder à l'*analogie*, accrédite ici le *Calcul des probabilités* sur lequel G. Polya installe une *logique* du raisonnement plausible.

Le rapprochement entre cette oeuvre et le système d'idées que j'ai rappelé s'offre d'une manière favorable pour intéresser les méthodologistes. Commes ils le verront d'ailleurs, les deux séries d'efforts sont restées indépendantes.

6. - Je dirai maintenant quelques mots de l'*analogié* [3]). J'en avais peu parlé, car elle ne vaut que par le degré de

---

3) Voir aussi R. Deltheil: les grand courants de la pensée mathématique. Cahiers du sud: 1948, p. 48-53.

précision s'y attachant. Mais, il est bon de faire cette remarque: le chercheur ne doit négliger aucune occasion de *repenser* des résultats sous une nouvelle forme, alors qu'ils sont par ailleurs établis. En effet, par de tels retours, il aperçoit souvent des similarités, et ainsi des processus généralisateurs, ce qui ramène à proximité des soucis ayant fait l'objet du n. 1.

Parfois encore, entre deux thèmes, l'analogie se dérobe, alors qu'on s'attendait à l'y trouver. Et en fait, c'est un contraste qui se présente. Il est intéressant à cet égard de donner un exemple précis à la séparation de deux versants.

Ayant pris une portion de surface $z = f(x, y)$, projetée par exemple, sur le plan $z = 0$ et parallèlement à Oz, suivant une région

$$a_1 \leq x \leq a_2 \quad , \quad b_1 \leq y \leq b_2$$

supposons qu'on retienne d'une part le cas où elle est *convexe*, d'autre part le cas où elle est à *courbures opposées;* il semble au premier abord qu'on ait mis en regard deux éventualités *tout à fait comparables*, l'une traduite par $rt - s^2 > 0$, l'autre par $rt - s^2 < 0$. C'est qu'implicitement, on a supposé l'existence de dérivées jusqu'au second ordre, avec continuité. Mais on sait que le cas de convexité peut se réaliser dans des conditions plus générales.On va préciser alors l'hypothese précédente en imposant à la dite portion de surface d'être une partie de la frontière F d'un solide convexe, dans l'espace (x, y, z). Ce solide n'est autre qu'un ensemble qui, avec deux points P et Q, contient la totalité du segment PQ. Le contingent de F n'est pas partout plan.

Considerons maintenant les surfaces du type $z = f(x) + g(y)$ où f et g sont des fonctions convexes. En ce cas, relativement à l'axe des z, leurs convexités sont ou bien *de même sens*, ce qui donne des surfaces convexes dans l'acception élargie qui précéde (surfaces K), ou bien de *sens opposés*. Ici, surgissent des réserves quant à la comparabilité mise en litige. En effet, d'une part les surfaces convexes ont la propriété de *compacité*, c'est-à-dire: chaque suface limite de surfaces convexes est une surface convexe. D'autre part, on pourrait introduire une classe F de sufaces, équivalentes entre elles à une homéomorphie près, dèfinie par des fonctions

$$x_1 = A(x, y, z) \quad , \quad y_1 = B(x, y, z) \quad , \quad z_1 = C(x, y, z)$$

ayant, outre des dérivées premieres continues, un jacobien non nul, et de manière que la classe Γ contienne les surfaces K. Toutes les surfaces de Γ auraient alors en commun cette propriété: en chaque point, les demi-tangentes se trouvent sur une des nappes du cône convexe frontière du paratingent (énoncé facile à modifier si le cône cité se réduit à deux plans ou bièn à un seul). La classe Γ inclut notamment, d'après un résultat de M. Jean Mirguet [4]), les surfaces douées de non-paratingentes (pour l'ordre 1) en chaque point et dont le paratingent supérieur n'a pas d'élément intérieur; ce qui en souligne l'objectivité. Or, dans cette classe Γ, il n'y a pas compacité pour l'ensemble H des surfaces $z = f(x) + g(y)$ avec f, g convexes de sens opposés: en effet, prenons dans E la surface particulière $z = \varphi(x) + \psi(y)$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ et de plus, qu'à l'origine, les courbes

$$z - \varphi(x) = y = 0 \quad , \quad z - \psi(y) = x = 0,$$

de la surface aient, l'une et l'autre, deux demi-tangentes distinctes. Il est alors impossible qu'en ce point, le lièu des diverses demi-tangentes à la surface se réduise à un demi-cône convexe (en tant que surface) ou même à un dièdre, cela bien que $z = \varphi + \psi$ soit limite de surfaces de E à courbures continues, et à ce titre, faisant partie de Γ. Ici, il devient manifeste que la prétendue analogie ne résiste pas à un examen attentif.

On pourrait alléguer que les effets se produisant sur le versant $rt - s^2 > 0$ et sur le versant $rt - s^2 < 0$ ont été distingués, pour ce qui est de leurs contrastes, depuis bien longtemps. La recherche des surfaces isomètriques à une surface donnée conduit par exemple à des rèsultats tout diffèrents, suivant que la courbure totale est positive ou qu'elle est nègative, ce dernier cas donnant seul des caractèristiques réelles. De ce point de vue, on pourrait mettre globalement en cause les èquations diffèrentielles partielles du second ordre les plus variées. Mais ce qui importe, c'est de voir que la séparation des deux versants ne se produit pas seulement pour des propriètés ayant déjà (comme celles du présent alinéa) un degrè affiné d'organisation. Elle commence au contraire, dans le champ, que d'aucuns dénommeraient qualitatif, où l'on s'occupe seulement de prèciser, par certaines modalités dans l'ètude des contacts du premier ordre, la nature des divers types de points qui s'offrent sur la surface.

On comprend qu'en des cas de ce genre, il est opportun d'orienter l'effort synthétique, sur le premier versant d'une part et sur le second versant d'autre part, en laissant à chacun d'eux sa pleine autonomie, du moins, à un certain stade de la recherche. Il n'est pas exclu qu'il faille ensuite rassembler, comme il est de mise dans les problèmes partagés entre le type elliptique et le type hyperbolique.

---

[4]) Mirguet, Rev. Sc. 85, 1947, p. 67-72.

7. - Sans prétendre dresser une liste exhaustive, il importe, en ce genre de travail, d'examiner le plus grand nombre de thèmes. Parmi ceux-ci, n'ya-t-il lieu toutefois de retenir que ceux qui suscitent l'apparition de nouveaux problèmes.

Examinons, à ce sujet, une circonstance qui s'offre d'une manière assez fréquente. Au début du n. 4, a été admis le partage de l'activité mathématique, avec échanges intermittents, entre les *problèmes* et la *synthèse.*

Or un *problème* prend tout son intérêt quand, une de ses solutions ayant été distinguée, on peut *construire* cette solution. On revient ici au *cas d'espèce,* car dans le groupement de problèmes, on peut au plus retenir les caractères communs aux constructions pouvant être proposées aux fins des divers cas d'espèce. En Physique mathématique, on a d'ailleurs, assez souvent, des groupements dont la décomposition en cas d'espèce s'accomplit en assurant, pour chacun de ces cas, l'unicité (cela, notamment, par recours au principe du déterminisme, préludant à la justification mathématique).

Soit maintenant un problème P en tant que cas d'espèce. Cela exige que les données en soient livrées *entiérement construites* (donc, sans ambiguité, comme s'il s'agissait d'un échantillon bien défini). Or admettre cette éventualité fait apparaitre une situation qui fait surgir de nouveaux problèmes. C'est ce que je me propose d'ètablir maintenant, en faisant l'étude détaillée de deux exemples comportant chacun une ample généralité.

8. - Le premier exemple annoncé s'obtient en remarquant la facilité d'obtenir la frontière d'une région convexe R. A ce titre, on détermine cette région comme l'intersection des demi-espaces ayant des points intérieurs communs avec R et on se borne à retenir une suite de plans d'appui ω, dont les points d'appui forment un ensemble *partout dense* sur la frontière de R. Ayant précisé cette suite, on pourra entreprendre l'étude de certaines propriétés, par exemple, celles des *gèodésiques* sur la frontière de R[5]).: il serait intéressant de lier la con-

[5]) Voir à ce sujet l'analyse par M. Kaloujnine d'un livre (en russe)

struction du plus court chemin entre deux points assez proches, sur une telle surface, à la donnée de la suite des plans ω, progressivement filtrée si possible, de manière à définir l'arc inconnu comme un ensemble limite. Chose ardue, mais qu'il faut bien reconnaitre comme un objectif de choix.

Prenons maintenant le cas d'une *surface à courbures opposées.* Comment peut-on faire pour se la donner construite? Je ne connais pas à cette fin de processus qui recourrait, comme ci-dessus, à une suite portout dense de plans tangents. Je rappelle donc maintenant une autre voie, qui se rattache aux formules de Lelieuvre [6].

A cette fin, on posera

$$(1) \qquad \overrightarrow{OM} = \int_{u_0, v_0}^{u, v} \overrightarrow{N} \wedge (\overrightarrow{N}_u du - \overrightarrow{N}_v dv)$$

en dèterminant $\overrightarrow{N}(u, v)$ comme solution d'un système de trois èquations, que synthétise l'égalité géométrique ,

$$(2) \qquad \overrightarrow{N}(u, v) - \overrightarrow{N}(u, v_0) - \overrightarrow{N}(u_0, v) + \overrightarrow{N}(u_0, v_0) = \int_{u_0}^{u} d\bar{u} \int_{v_0}^{v} f(\bar{u}, \bar{v}) \overrightarrow{N}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{v}$$

le seul terme inconnu ètant le vecteur $\overrightarrow{N}(u, v)$, qui figure au début du premier membre et dans l'intégrale. Les surfaces obtenues en ne prenant que les solutions continues sont partout à paratingent plan. Pour avoir des surfaces plus variées présentant un des types de points singuliers rencontrés au n. 6, il faudrait des solutions assurant à $\overrightarrow{N}(u, v)$, en divers points de la surface, l'indétermination dans un certain pinceau de droites. L'èventualité f discontinue n'est donc pas exclue.

Cette mèthode, qui se prête à des approximations successives, répond de la sorte à l'exigence de constructivité. Elle donnerait d'ailleurs, sous hypothèses à prèciser, des classes de solutions détenant la compacité. La chose délicate sera, en donnant accès dans (1) et (2) à des intégrales généralisées, d'expliciter la rèpercussion des prèmisses introduites

---

de A. D. Aleksandrov (au fasc. I, sèrie A, de la collection: Etudes pratiques d'accès à la recherche, Centre de doc.n univ. Paris).

[6]) G. Bouligand: *Sur les lignes asymptotiques*. Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liège, t. 5, 1936, p. 239-244.

sur l'ensemble des points de la surfaces où le contingent n'est pas plan: et aussi bien, sur le rôle élargi d'asymptotiques conservé par les lignes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$.

Il faudrait enfin comparer les résultats de la méthode pré cédente et ceux provenant d'une *représentation sphérique,* susceptible d'associer à un point de la surface un ensemble de points sur la sphère, en se conformant à cette condition:

Notant F l'image sur la sphère d'un ensemble quelconque E de la surface, les inclusions $E_1 \subset E_2$ et $F_1 \subset F_2$ ont toujours lieu simultanément. Du point de vue local, on peut d'ailleurs ici remplacer la représentation sphérique d'une surface $z = g(x, y)$ par le passage dans le plan $z = 0$ du point (x, y) au point (p, q) suivant une loi qui s'exprime, en cas de détermination univoque des dérivées premières de g, par les formules

$$p = g_x(x, y) \quad , \quad q = g_y(x, y).$$

les inclusions prescrites intervenant pour fixer la dite loi dans des cas plus généraux.

Pour exemple spécial d'un tel cas, soit la surface

$$z = \varphi(x) + \psi(y)$$

extraite de l'ensemble H rencontré au n. 6. On notera, d'après cet exemple, que la condition d'*inclusions concordantes* utilisée ci-dessus, quand on passe de la surface à une sphere ou un plan est assez naturelle pour chercher à dèfinir une surface à courbures opposées. Mais alors, qu'advient-il des exigences constructives?

9. - Revenons à des soucis plus généraux et abordons à ce niveau, l'étude d'un second genre d'exemples. On se propose d'obtenir ici, non plus des surfaces, mais cette fois des homéomorphies du plan, que définiraient deux fonctions

$$x_1 = A\,(x, y) \quad , \quad y_1 = B\,(x, y) \;,$$

ayant des dérivées premières continues et un jacobien non nul. Toute homéomorphie de ce type, appliquant la totalité du plan (x, y) sur lui-même, pris aussi en totalité, sera dite en bref une H^1. Or une H^1 s'obtient en prenant la résultante de deux autres transformations qui sont elles-mêmes du type H^1. La première est astreinte à conserver l'origine et de plus, à titre global, chaque demi-droite issue de l'origine, en remplissant cette condition: *avoir pour jacobien une fontion continue et positive donnée.* La seconde est astreinte à *conserver les aires.* Parmi toutes les H^1 assurant cette dernière condition, et qu'on peut étudier d'après les méthodes du fascicule 56 de *Gazeta de Matematica* (Lisbonne, 1953), retenons la suivante

$$(T_i) \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i - f_i(x_i \cos \alpha_i + y_i \sin \alpha_i) \sin \alpha_i \\ y_{i+1} = y_i + f_i(x_i \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i) \cos \alpha_i \end{array} \right.$$

écrite pour qu'on puisse composer plusieurs transformations de cette classe, prises dans un ordre assigné, soient (T_1), (T_2), ..., (T_n). Il suffit d'ailleurs de prendre ici chaque f_i continue. Le souci de trouver une voie constructive pose alors ce problème:

Peut-on *s'approcher* de n'importe quelle homéomorphie conservant les aires et opérant sur la totalité du plan en composant un nombre de plus en plus élévé de transformations du type des (T_i)?

L'uniformité de l'approximation ne pourrait s'obtenir qu'en une région bornée du plan (x, y), mais avec faculté de l'emboiter dans une suite de régions R_i de ce genre dont chacune a sa frontiere à l'extérieur d'un cercle K_i de centre O et de rayon infiniment grand. Mais cette prècaution nécessaire, qui revient en somme à supprimer « un voisinage du point à l'infini », ne sera suffisante que si les homéomorphies pouvant s'obtenir comme composées d'un nombre fini de T_i ou comme limites de ces composées ne conservent, de cette génération un peu spéciale, aucun caractère qui en restreigne la généralité. Là tient le point culminant de la recherche.

On notera qu'une *condition nécessaire* pour pouvoir approcher de toute homéomorphie H^1 conservant les aires, ce qu'on ferait en ne recourant qu'à la *base* des (T_i) est que la chose réussisse en se restreignant aux transformation infinitèsimales. D'où cette question: un champ vectoriel plan à divergence nulle, de composantes

$$-\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x} \text{ (avec } g \text{ fonction dérivable de } x, y)$$

se laisse-t-il engendrer linèairement à partir de champs vectoriels engendrant des transformations infinitèsimales du type des (T_i)? Cela conduit à chercher si l'on peut mettre $g(x, y)$ sous la forme

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x \cos \alpha + y \sin \alpha \,,\, \alpha) d\alpha \tag{3}$$

la fonction φ de $u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ et de α, c'est à dire notée $\varphi(u, \alpha)$ étant telle que

$$\varphi(u, \alpha + 2\pi) \equiv \varphi(u, \alpha).$$

Ce qui peut d'ailleurs s'élargir en substituant à l'intégrale (3) de Riemann une intégrale de Stieltjes, de manière à retrouver, par rèpartitions massiques concentrées en un nombre finì de points, le cas des transformations infinitèsimales répondant à un champ de vecteurs, somme géométrique d'un nombre fini de champs analogues associés aux (T_t) infinitésimales. Le recours à $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ introduirait un dèveloppement de g avec terme général en

$$A_n(r) \cos n\theta + B_n(r) \sin n\theta$$

Pareillement, on pourrait prendre pour $\varphi(u, \alpha)$ un developpement de terme général

$$\lambda_n(u) \cos n\alpha + \mu_n(u) \sin n\alpha$$

ce qui, pour déduire chaque couple λ_n, μ_n due couple A_n, B_n, fournit un système de deux èquations intégrales linéaires à limites variables, ou même une seule en acceptant des fonctions compleves d'une variable réelle.

Autre question, très importante et qui semble ouverte.

Toute homéomorphie opérant, avec son invërsè, sur la totalité du plan peut-elle s'obtenir comme limite de certaines autres qui soient du type H^1, c'est-à-dire dérivables d'ordre 1.

10. - Avec un peu d'esprit méthodique, on apposérait sans peine des étiquettes sur diverses *situations* qui se sont présentées depuis le n. 4 du présent texte. Après les recherches pouvant bénéficiér de l'idée de stabilité, sont venues celles que suggère l'idée de constructivité, elle aussi très apte à livrer des thèmes intéressants. Mais, l'enquête du n. 9 va maintenant conduire à deux sortes de remarques.

Tout d'abord, une recherche amorcée au sujet d'*homéomorphies*, malgré la nature profonde de la question, n'est pas assurée de progresser au mieux dans la voie, en apparence la meilleure, où l'on s'interdirait d'utiliser des notions métriques. Il faut, avant tout, se donner des commodités pour recueillir les premières informations. Au départ, la souplesse est préférable à l'esprit de système, destiné à reprendre en pure synthèse tous ses droits [7]).

D'un autre côté, le chercheur gagne beaucoup à constater que *certaines situations se reproduisent,* ou même seulement, le font à *certaines variantes près,* et c'est là une forme élévée de l'idée d'*analogie* sur laquelle je voudrais m'arrêter un peu, en terminant cette esquisse.

Le n. 9 a eu pour objet de préparer l'étude d'homéomorphies H^1 quand, avec leurs inverses, elles associaient 2 plans, distincts ou non, mais pris chacun dans sa totalité. Or, il est naturel de transposer la même question en s'occupant pareillement des surfaces de 2 sphères, distinctes ou non. Prenons-les coïncidentes. On va définir une H^1 sur la sphère S en la regardant encore comme résultant de deux autres, dont la première conserve, avec deux points diamétralement opposés, chacun des demi-méridiens les unissant, ceci à titre global, en ayant un certain jacobien positif dont l'intégrale, étendue à S, donne l'unité. La seconde aura partont son jacobien égal à 1. Or, parmi toutes les H^1 assurant cette dernière condition, on peut retener les suivantes

$$(T_i) \qquad \vec{V}_{i+1} = \left(\cos\frac{w_i}{2}, \vec{\delta}_i \sin\frac{w_i}{2}\right)\vec{V}_i\left(\cos\frac{w_i}{2}, -\vec{\delta}_i \sin\frac{w_i}{2}\right)$$

---

[7]) A proximité, il vonvient de souligner encore cette remarque:

La rencontre d'un problème objectif en déclenche souvent, autour de lui, tout un cortège. Il convient alors d'en dresser le tableau, pour examen comparatif. Ainsi, on pourrait reprendre les questions du n. 9 en composant, au lieu des (T_i), des homéomorphies du type suivant, lié à la parité de l'indice

$$(h_{2n}) \left| \begin{array}{l} x_{2n} = x_{2n-1}, \\ y_{2n} = f_{2n}(x_{2n-1}, y_{2n-1}); \end{array} \right. \qquad (h_{2n+1}) \left| \begin{array}{l} x_{2n+1} = f_{2n+1}(x_{2n}, y_{2n}), \\ y_{2n+1} = y_{2n}; \end{array} \right.$$

on convient de prendre les f_{2n} croissantes par rapport à la seconde variable, les f_{2n+1} croissantes par rapport à la première. Cessant ici de s'occuper des aires, on cherche les homéomorphies les plus générales dont on pourrait s'approcher en composant des (h_i) en nombre fini. Ce choix d'éléments simples (à modifier sur la sphère et sur le tore) serait plus favorable que les (T_i) à l'ultime question du n. 9.

étant entendu que les divers termes sont des *quaternions*, deux d'entre eux étant purement vectoriels: à savoir $\vec{V}_i$ et $\vec{V}_{i+1}$. La transformation (T_i) appliquée au vecteur $\vec{V}_i$ issu du centre de la sphère, fait passer au vecteur analogue $\vec{V}_{i+1}$ déduit du précédent par rotation de w_i autour de l'axe orienté, portant un diamètre *sn* et ayant $\vec{\delta}_i$ comme vecteur unité. Appelant ici u_i, v_i les coordonnées géographiques de l'extrémité de V_i quand la ligne des pôles *sn* s'oriente suivant $\vec{\delta}_i$, on aura

$$w_i = v_{i+1} - v_i = f_i(u_i) \quad \text{et} \quad u_{i+1} = u_i ,$$

ce qui achéve de déterminer (T_i). La question est ainsi posée dans la même voie qu'au n. 9. Toutefois, la sphère étant une variété compacte, la possibilité de convergence uniforme, discutée dans le cas du plan, ne se trouve plus actuellement exclue a priori. Tout l'essentiel, et sur ce point encore, la question reste ouverte, c'est de savoir, si dans les composées des (T_i), en nombre fini ou en infinité dénombrable, ne subsiste aucun caractère spécial. Et comme ci-dessus, on pourrait examiner ce que donnent à ce sujet les transformations infinitésimales.

11. - De cette enquête, il ressort nettement que chaque lot nouveau de questions proposées présente en commun avec d'autres, d'ores et déjà traitées, des caractères précis, au sujet desquels il n'y aura pas hésitation. L'interrogation se concentrera donc sur un secteur plus étroit, cela ne voulant pas dire que l'effort résiduel doive alors sûrement triompher de difficultés mieux localisées. L'histoire a certes exregistré des cas insignes de ce genre. C'est ainsi que Tchebytcheff ayant su réduire les obstacles qui empêchaient d'atteindre par voie élémentaire le résultat établi en 1893 par Hadamard et de la Vallée Poussin au moyen de la haute analyse dans le plan complexe, la question a été finalement élucidée par M. Selberg aux Annals of Mathematics (1949). Mais beaucoup d'autres énigmes subsistent et à l'exemple du livre de M. Polya, divers textes peuvent contribuer, et j'en souhaite de mombreux, à éclairer les jeunes adeptes de la recherche.