GAETANO FICHERA

Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 523-545

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__523_0>

SULL' ESISTENZA DELLE FORME DIFFERENZIALI ARMONICHE

Memoria (*) *di* GAETANO FICHERA (*a Trieste*)

In un Convegno che ebbe luogo presso l'Università di Parma nel giugno del 1949, dedicato all'Analisi funzionale, ebbi occasione di parlare di alcune mie ricerche concernenti l'applicazione dei metodi dell'Analisi funzionale lineare ai problemi relativi ad equazioni differenziali e, precisamente, affermai che con i sopradetti metodi mi era riuscito di dare una nuova dimostrazione del teorema di Hodge sull'esistenza delle forme differenziali armoniche in una varietà chiusa.

Da allora sono andato occupandomi dei metodi dell'Analisi funzionale, concernenti le applicazioni ai problemi di integrazione in grande di equazioni e sistemi di equazioni differenziali lineari, con la mira, sopratutto, di cercare di risolvere nuovi problemi. Ho però omesso di rendere di pubblica ragione le applicazioni da me fatte alla teoria delle forme armoniche, allora annunciate.

Assai recentemente è stata richiamata la mia attenzione su questa omissione, talchè ho reputato mio preciso dovere affrettarmi a presentare per la pubblicazione questo lavoro, dedicato appunto al conseguimento della dimostrazione dell'esistenza delle forme differenziali armoniche su una varietà chiusa con i procedimenti dell'Analisi funzionale lineare.

Evidentemente, l'eventuale interesse del presente scritto risiede esclusivamente nel metodo seguito, che appare parti-

---

*) Pervenuta in Redazione il 25 ottobre 1955.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Trieste.

colarmente semplice, anche rispetto ad altre dimostrazioni dello stesso teorema, basate su procedimenti funzionali, apparse in questi ultimi anni [1]).

Non è da escludere che il procedimento qui seguito, fondato essenzialmente sul preventivo conseguimento di una semplicissima *formola risolutiva* per un problema di ordine $2m$ in un dominio dello spazio euclideo, possa utilmente essere impiegato in altre questioni esistenziali relative alle forme differenziali su varietà chiuse.

1. Forme differenziali esterne [2]) in uno spazio euclideo.

Sia S_n lo spazio euclideo ad n dimensioni nel quale è stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x^1, $x^2, \dots, x^n$.

Sia B un campo (insieme aperto) di S_n e sia in esso definito il tensore k-plo emisimmetrico di componenti $u_{s_1 \dots s_k}(x)$ $[x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)]$; $s_1 \dots s_k$ denota una disposizione di classe k degli indici $1, 2, \dots, n$.

Consideriamo la *forma differenziale esterna di grado k* (brevemente *k-forma*):

$$u = \frac{1}{k!} \sum_{s_1 \dots s_k} u_{s_1 \dots s_k}(x) dx^{s_1} \dots dx^{s_k}.$$

È noto che dicesi *differenziale esterno di u* o *derivata covariante* e si indica con du la forma di grado $k+1$:

$$du = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1 \dots i_{k+1}} \left(\sum_{h=1}^{k+1} (-1)^{h-1} \frac{\partial u_{i_1 \dots i_{h-1} i_{h+1} \dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_h}} \right) dx^{i_1} \dots dx^{i_{k+1}}.$$

Sia Γ_k un k-ciclo regolare orientato in S_n $(k < n)$ contorno della varietà a $k+1$ dimensioni $V_{k+1} \subset B$.

---

1) Cfr. la Bibliografia alla fine del presente lavoro.

2) Per i fondamenti, algebrici e infinitesimali, della teoria delle forme differenziali esterne, cfr. l'Opera di B. SEGRE [22].

I numeri fra [ ] rimandano alla Bibliografia alla fine del presente lavoro.

Se u ha i coefficienti di classe $C^{(1)}$ in B (brevemente: u è di classe $C^{(1)}$ in B) si ha (formola di Green-Stokes):

$$\int_{\Gamma_k} u = \int_{V_{k+1}} du .$$

Una k-forma u dicesi *chiusa* se $du = 0$; dicesi invece *omologa a zero* se esiste una $(k-1)$-forma v tale che $dv = u$.

È noto che ogni forma omologa a zero è chiusa, cioè $du = ddv = 0$ e che, viceversa, se B è a connessione k-dimensionale semplice, ogni k-forma chiusa è omologa a zero.

Dicesi prodotto della k-forma u e della h-forma v la $(k+h)$-forma

$$u \cdot v = \frac{1}{(k+h)!} \sum_{\substack{s_1 \dots s_k \\ i_1 \dots i_h}} u_{s_1 \dots s_k} v_{i_1 \dots i_h} dx^{s_1} \dots dx^{s_k} dx^{i_1} \dots dx^{i_h}.$$

Si ha:

$$u \cdot v = (-1)^{kh} v \cdot u,$$

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + (-1)^k u \cdot dv,$$

come si verifica con calcoli elementari.

2. Prodotto di una matrice per una k-forma. Operatore differenziale del II ordine.

Siano definiti in B tutti i termini della seguente matrice simmetrica e siano di classe $C^{(2)}$:

$$A \equiv \left| \begin{array}{cccc} a^{11}(x) & a^{12}(x) & \dots & a^{1n}(x) \\ a^{21}(x) & a^{22}(x) & \dots & a^{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n1}(x) & a^{n2}(x) & \dots & a^{nn}(x) \end{array} \right| .$$

Supponiamo $a = det. A \equiv 1$ e poniamo:

$$u^*_{s_{k+1} \dots s_n} = (-1)^\sigma \sum_{p_1 \dots p_k} a^{p_1 s_1} \dots a^{p_k s_k} u_{p_1 \dots p_k} ,$$

essendo σ il numero delle inversioni che la disposizione

$s_1 s_2 \dots s_n$ presenta rispetto alla principale. La $(n-k)$-forma:

$$u^* = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{s_{k+1} \dots s_n} u^*_{s_{k+1} \dots s_n} dx^{s_{k+1}} \dots dx^{s_n}$$

sarà detta il *prodotto della matrice* A per la forma u ed indicata oltre che con u^* anche con Au. La u^* sarà anche detta l'*aggiunta* della u rispetto ad A e, quando A è fissata una volta per tutte, semplicemente, l'aggiunta di u.

Sussistono le seguenti relazioni verificabili con semplici calcoli:

α) Se f e g sono due scalari ed u e v due k-forme, si ha:

$$A(fu + gv) = fAu + gAv \; ;$$

β)
$$AAu = (-1)^{kn+k} u \; ;$$

γ)
$$u \cdot Av = v \cdot Au \; ;$$

δ)
$$u \cdot Au = \varphi dx^1 \dots dx^n$$

essendo φ una forma quadratica definita positiva nei coefficienti di u.

In seguito considereremo anche la seguente $(k-1)$-forma:

$$\delta u = AdAu \, .$$

Essa sarà detta *co-differenziale* della k-forma u od anche *differenziale regressivo* di u.

Diremo *co-chiuse* le forme per le quali $\delta u = 0$ e *co-omologa* a zero ogni k-forma u per la quale esiste una $(k+1)$-forma v tale che $\delta v = u$.

Si consideri la k-forma:

$$\mathcal{E}(u) = (-1)^{nk} AdAdu + (-1)^{nk+n} dAdAu.$$

Essa dicesi ottenuta applicando alla u l'*operatore differenziale del II ordine* $\mathcal{E}$. Noi considereremo il caso che $\mathcal{E}$ sia *totalmente ellittico positivo in* B, cioè che la forma quadratica $\sum_{hk}^{1,n} a^{hk} \lambda_h \lambda_k$ sia definita positiva in ogni punto di B [3]. Le funzioni $a^{hk}(x)$ saranno inoltre supposte di classe $C^{(2)}$ in B.

---

[3]) In tal caso l'operatore $\mathcal{E}$ è analogo a quello introdotto da DE RHAM e BIDAL [18] e da KODAIRA [14] in uno spazio di RIEMANN.

3. Estensione formale di taluni risultati relativi ai potenziali di volume. Soluzione fondamentale.

Consideriamo la funzione:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{hk}^{1,n} \alpha_{hk}(y)(x_h - y_h)(x_k - y_k)\right]^{\frac{1}{2}},$$

avendo indicato con α_{hk} l'aggiunto di a^{hk} nella matrice A, per la quale assumeremo le ipotesi specificate alla fine del n.° precedente. Supponiamo $n > 2$. Il caso $n = 2$ si tratta in modo analogo. Poniamo:

$$\alpha_{s_1 \ldots s_k i_1 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} \alpha_{s_1 i_1} & \ldots & \alpha_{s_1 i_k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{s_k i_1} & \ldots & \alpha_{s_k i_k} \end{vmatrix}, \qquad L(x, y) = \frac{[\rho(x, y)]^{2-n}}{(n-2)\omega_n},$$

$\omega_n =$ misura della ipersuperficie sferica unitaria in S_n.

Si consideri l'espressione:

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{(k\,!)^2} \sum_{\substack{s_1 \ldots s_k \\ i_1 \ldots i_k}} L(x, y)\alpha_{s_1 \ldots s_k i_1 \ldots i_k}(y) dx^{s_1} \ldots dx^{s_k} dy^{i_1} \ldots dy^{i_k}.$$

Essa rappresenta una k-forma rispetto a ciascuna delle n-ple di variabili $x^1, x^2, \ldots, x^n$ e $y^1, y^2, \ldots, y^n$. In generale una k-forma siffatta sarà indicata come una *k-forma nucleare.*

Ci proponiamo di considerare il seguente *potenziale di volume generalizzato*:

$$u(x) = \int_D \lambda(x, y) \cdot v^*(y),$$

la $v(y)$ essendo una k-forma assegnata e D un dominio contenuto nel campo B. Supporrò che D sia ad unico contorno e limitato da una ipersuperficie di classe 2.

Sia $\mathfrak{D}$ un operatore differenziale lineare del I ordine a coefficienti costanti e u una k-forma il cui coefficiente generico è $u_{s_1 \ldots s_k}$. Con $\mathfrak{D}u$ indicherò la k-forma i cui coefficienti sono le funzioni $\mathfrak{D}u_{s_1 \ldots s_k}$.

Sussiste il seguente teorema:

I. *Se i coefficienti di v sono di quadrato sommabile in D e verificano una condizione di Hölder in ogni dominio interno a D, fissato quasi ovunque ξ su FD, sono sommabili in D i coefficienti delle forme:*

$$\lambda(\xi, y) \cdot v^*(y) \qquad \mathfrak{D}_\xi \lambda(\xi, y) \cdot v^*(y)$$

e si ha, per quasi ogni $\xi \in FD$,

$$\lim_{x \to \xi \,(su\ \nu_\xi)} u(x) = \int_D \lambda(\xi, y) \cdot v^*(y),$$

$$\lim_{x \to \xi \,(su\ \nu_\xi)} \mathfrak{D} u(x) = \int_D \mathfrak{D}_\xi \lambda(\xi, y) \cdot v^*(y),$$

comunque x tenda a ξ, sulla normale ν_ξ a FD in ξ, dall'interno o dall'esterno di D.

Basta evidentemente dimostrare il teorema per ogni singolo coefficiente di u e di $\mathfrak{D}u$. Ma ogni tale coefficiente è una somma di potenziali del tipo:

$$\int_D f(y) L(x, y) dy^1 \ldots dy^n, \tag{1}$$

mentre che ogni coefficiente di $\mathfrak{D}u$ è somma di derivate prime di potenziali, quali (1), aventi una densità $f(y)$ di quadrato sommabile in D ed hölderiana nell'interno di D.

Il teorema è così ricondotto al caso degli scalari, nel quale è stato già acquisito [4]).

Con ragionamenti perfettamente analoghi al caso degli scalari si verifica che ogni coefficiente della k-forma $\mathcal{E}_x[\lambda(x, y)]$ è $0(|x-y|^{1-n})$ e che riesce:

$$\mathcal{E}(u) \begin{cases} = \displaystyle\int_D \mathcal{E}_x[\lambda(x, y)] \cdot v^*(y) & \text{per} \quad x \in B - D \\ = -v(x) + \displaystyle\int_D \mathcal{E}_x[\lambda(x, y)] \cdot v^*(y) & \text{per} \quad x \in D - FD \end{cases}$$ [5]).

---

[4]) Cfr. G. FICHERA [7], vedi anche [8], [9].

[5]) Cfr. M. PICONE [17] pp. 795-797 e C. MIRANDA [16] pp. 13-14 e pp. 23-25.

Può allora ripetersi in modo formalmente identico il classico ragionamento di E. E. Levi e dedurre l'esistenza di una k-forma $s(x, y)$ soluzione fondamentale dell'equazione $\mathcal{E}(u) = 0$, rappresentabile al modo seguente:

$$s(x, y) = \lambda(x, y) + \zeta(x, y);$$

la $\zeta(x, y)$ è una k-forma nucleare i cui coefficienti sono $0(|x-y|^{3-n})$.

Poichè, ai fini degli ulteriori sviluppi, noi possiamo restringerci a considerare domini D di diametro tanto piccolo quanto vogliamo, l'esistenza della $s(x, y)$ si consegue mercè la soluzione di equazioni integrali di Fredholm (relative alle k-forme) con lo sviluppo di Neumann [6]).

4. Teorema di reciprocità. - Teorema di media. - Completezza di un particolare spazio di *k*-forme.

Poichè sussiste l'identità:

$$d[u \cdot Adv + Au \cdot AdAv - vAdu - Av \cdot AdAu] =$$
$$= u \cdot A\mathcal{E}(v) - v \cdot A\mathcal{E}(u),$$

è subito acquisito il seguente teorema di reciprocità:

II. *Se u e v sono due k-forme di classe $C^{(1)}$ in D, di classe $C^{(2)}$ in $D - FD$ ed aventi i coefficienti con derivate seconde sommabili in D, sussiste la seguente relazione di reciprocità*:

$$\int_{FD} [\mathfrak{L}(u, v) - \mathfrak{L}(v, u)] = \int_{D} [u \cdot A\mathcal{E}(v) - v \cdot A\mathcal{E}(u)], \tag{2}$$

---

[6]) Con analoghi procedimenti possono risolversi i problemi al contorno «in piccolo» per l'equazione $\mathcal{E}(u) = \varphi$ conformemente a quanto si fa per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine relative agli scalari; cfr. C. MIRANDA [16] pp. 44-53.

Come soluzione fondamentale $s(x, y)$ si può, volendo, assumere la k-forma di GREEN di uno qualsiasi di tali problemi. Se il problema è autoaggiunto, la $s(x, y)$ è una particolare soluzione fondamentale simmetrica.

avendo posto:

$$\mathfrak{L}(u,\ v) = u \cdot Adv + Au \cdot AdAv.$$

Dalla (2) si deduce con classico procedimento, per ogni $y \in D - FD$,

$$(3) \qquad \begin{aligned} u(y) = &\int_{FD} \{ \mathfrak{L}_x[\lambda(x,\ y),\ u(x)] - \mathfrak{L}_x[u(x),\ \lambda(x,\ y)] \} + \\ &+ \int_D \{ u(x) \cdot A\mathfrak{S}_x[\lambda(x,\ y)] - \lambda(x,\ y) \cdot A\mathfrak{S}_x(u) \}. \end{aligned}$$

Se si fa uso della soluzione fondamentale $s(x,\ y)$ si ottiene:

$$(4) \qquad \begin{aligned} u(y) = &\int_{FD} \{ \mathfrak{L}_x[s(x,\ y),\ u(x)] - \mathfrak{L}_x[u(x),\ s(x,\ y)] \} - \\ &- \int_D s(x,\ y) \cdot A\mathfrak{S}_x(u). \end{aligned}$$

Introduciamo adesso la funzione:

$$M_\rho(x,\ y) \begin{cases} = L(x,\ y)\left(1 - \dfrac{\overline{xy}^{n+3}}{\rho^{n+3}}\right)^5 & \text{per } \overline{xy} \leq \rho \\ = 0 & \text{per } \overline{xy} > \rho, \end{cases}$$

essendo ρ un fissato numero positivo, ed in corrispondenza la k-forma nucleare:

$$\mu_\rho(x,\ y) = \frac{1}{(k\,!)^2} \sum_{\substack{s_1 \dots s_k \\ i_1 \dots i_k}} M_\rho(x,\ y) \alpha_{s_1 \dots s_k i_1 \dots i_k}(y) dx^{s_1} \dots dx^{s_k} dy^{i_1} \dots dy^{i_k}.$$

Sia $y \in D - FD$ e ρ minore della distanza che y ha da FD. In modo analogo che le (3), (4), si stabilisce la seguente relazione:

$$(5) \qquad u(y) = \int_D u(x) \cdot A\mathfrak{S}_x[\mu_\rho(x,\ y)],$$

valida per ogni k-forma di classe $C^{(2)}$ in $D - FD$ e soluzione ivi dell'equazione:

$$(6) \qquad \mathfrak{S}(u) = 0.$$

La (5) è caratteristica per le soluzioni della (6) di classe $C^{(2)}$ in $D - FD$.

Sussiste il seguente teorema, semplice estensione dell'analogo stabilito da Cimmino nel caso scalare: [7])

III. *Sia u una k-forma i cui coefficienti sono di quadrato sommabile in D. Detta $r(y)$ la distanza del punto y di $D - FD$ da FD, sia verificata per $\rho < r(y)$ e per quasi tutti gli y la* (5).

La u è quasi ovunque eguale [8]) *in $D - FD$ ad una k-forma di classe $C^{(2)}$ in $D - FD$ verificante ivi la* (6).

Poniamo:

$$\nu_\rho^{(1)}(x,\ y) = \int_D \mathcal{E}_x[\mu_\rho(x,\ t)] \cdot A(t)\mathcal{E}_t[\mu_\rho(t,\ y)],$$

$$\nu_\rho^{(s+1)}(x,\ y) = \int_D \nu_\rho^{(s)}(x,\ t) \cdot A(t)\mathcal{E}_t[\mu_\rho(t,\ y)].$$

Dalla (5), iterando $s+1$ volte, detto T un dominio interno a D, avente da FD distanza η, si deduce per $\rho < \frac{1}{s+1}\eta$ e y quasi ovunque in T:

$$u(y) = \int_D u(x) \cdot A\nu_\rho^{(s+1)}(x,\ y).$$

Ne segue, scegliendo s abbastanza alto, l'esistenza asserita nell'enunciato delle derivate prime e seconde dei coefficienti di una k-forma che quasi ovunque coincide con la $u(y)$. Seguiteremo a chiamare con $u(y)$ tale forma di classe $C^{(2)}$ in D—FD. Scrivendo l'analoga della (3), dove in luogo della $\lambda(x, y)$ viene adoperata la $\mu_\rho(x, y)$, per la (5) si trae:

$$\int_D \mu_\rho(x,\ y) \cdot A\mathcal{E}(u) = 0.$$

---

[7]) Cfr. [16] pag. 90.

[8]) Dicendo che due k-forme sono quasi ovunque eguali si intende che ciò accade per i loro coefficienti di eguali indici.

Tenendo conto dell'espressione di $\mu_\rho(x, y)$ e dell'arbitrarietà di ρ, si trae $\mathcal{E}(u) = 0$.

Introduciamo adesso uno spazio di Hilbert che denoteremo con $\mathcal{H}(D)$. Esso è costituito dalle k-forme soluzioni in $D - FD$ della (6) ed i cui coefficienti sono di classe $C^{(2)}$ in $D - FD$ e di quadrato sommabile in D.

Il prodotto scalare di due elementi di $\mathcal{H}(D)$ si definisce ponendo:

$$(u, v) = \int_D u \cdot Av .$$

Sussiste il seguente teorema:

IV. *Lo spazio $\mathcal{H}(D)$ è completo.*

Sia infatti $\{u_m\}$ una successione di k-forme di $\mathcal{H}(D)$ tale che:

$$\lim_{m, q \to \infty} \| u_m - u_q \| = 0.$$

Esiste allora una k-forma u tale che:

$$\lim_{m \to \infty} \| u_m - u \| = 0.$$

Ma essendo per $y \in D - FD$:

$$u_m(y) = \int_D u_m(x) \cdot A\mathcal{E}_x[\mu_\rho(x, y)]$$

e riuscendo $0(| x - y |^{1-n})$ i coefficienti di $\mathcal{E}_x[\mu_\rho(x, y)]$, sarà per quasi ogni $y \in D - FD$:

$$u(y) = \int_D u(x) \cdot A\mathcal{E}_x[\mu_\rho(x, y)].$$

Dal teorema precedente segue la tesi.

5. Un particolare problema al contorno per le k-forme.

Considereremo un particolare problema al contorno per le k-forme che, nel caso particolare $k=0$ e $a^{hk}=\delta_h^k$, è equivalente al classico problema bi-iperarmonico.

Faremo uso della k-forma $s(x, y)$ soluzione fondamentale di $\mathcal{E}(u)=0$, che — cosa lecita — supporremo definita in un campo limitato C contenente il dominio D.

Assegnata la k-forma φ in D, con coefficienti ivi continui ed hölderiani, costruiremo una k-forma u verificante in $D - FD$ l'equazione:

$$\mathcal{E}\mathcal{E}(u)=\varphi \tag{7}$$

e su FD le condizioni:

$$u_{s_1 \dots s_k}=0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x^h} u_{s_1 \dots s_k}=0 \qquad (h=1,\ 2,\ \dots,\ n), \tag{8}$$

cioè tutti i coefficienti della u e le loro derivate prime devono annullarsi su FD.

Porremo:

$$T(\varphi)=-\int_D s(x,\ y)\cdot \varphi^*(y).$$

Si ha:

$$\mathcal{E}T(\varphi)=\varphi.$$

Diciamo $\{v_s\}$ un sistema di k-forme continue in $C-D+$ $+F(C-D)$ e costituenti un sistema completo nello spazio di Hilbert delle k-forme aventi i coefficienti di quadrato sommabile in $C-D$ e per le quali il prodotto scalare è definito al modo seguente:

$$(u,\ v)=\int_{C-D} u\cdot Av.$$

Poniamo:

$$w_s(y)=\int_{C-D} s(x,\ y)\cdot v_s^*(x)$$

e diciamo $\mathfrak{S}(D)$ lo spazio di Hilbert delle k-forme, i cui coefficienti sono di quadrato sommabile in D, e nel quale il prodotto scalare è definito ponendo:

$$(u, v) = \int_D u \cdot Av .$$

Due forme che hanno i coefficienti di eguali indici quasi ovunque eguali in D sono da considerarsi come un unico elemento di $\mathfrak{S}(D)$.

Lo spazio $\mathfrak{H}(D)$, precedentemente introdotto, è una varietà lineare chiusa di $\mathfrak{S}(D)$. Le k-forme $w_s(y)$ appartengono ad $\mathfrak{H}(D)$.

Se riesce:

$$(\varphi, w_s) = 0 \qquad (s = 1, 2, ...),$$

sarà in conseguenza:

$$\int_D s(x, y) \cdot \varphi^*(y) = 0$$

per $x \in C - D$ e quindi per il teorema I la k-forma $T(\varphi)$ verifica le (8) quasi ovunque su FD.

Diciamo $P(u)$ la proiezione dell'elemento u di $\mathfrak{S}(D)$ su $\mathfrak{H}(D)$ [9]).

Sussiste il seguente teorema:

V. *La k-forma*:

$$u = T^2(\varphi) - TPT(\varphi) \tag{9}$$

è la soluzione del problema (7), (8). *Essa è tale che* $\mathfrak{E}(u)$ *ha i coefficienti di quadrato sommabile in* D.

Si ha intanto:

$$\psi = \mathfrak{E}(u) = T(\varphi) - PT(\varphi),$$

donde la sommabilità in D dei quadrati dei coefficienti di $\mathfrak{E}(u)$. Inoltre, essendo $\mathfrak{E}PT(\varphi) = 0$, rimane verificata la (6). La k-forma ψ è ortogonale a $\mathfrak{H}(D)$ e quindi, in particolare,

---

[9]) Cfr. [6] cap. V.

si ha:

$$(\psi, w_s) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Ciò implica che la k-forma:

$$u = T(\psi)$$

verifica le (8).

La k-forma (9) verrà indicata semplicemente al modo seguente:

$$u = G_D^{(1)}(\varphi).$$

Il teorema ora dimostrato può facilmente estendersi al problema relativo all'equazione:

$$\mathcal{E}^{2m}(u) = \varphi \quad \text{in} \quad D - FD, \tag{10}$$

avendo indicato con $\mathcal{E}^h$ l'operatore differenziale che si ottiene applicando h volte l'operatore $\mathcal{E}$. Alla (10) si associano le condizioni al contorno seguenti:

$$v_{s_1 \ldots s_k} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_{s_1 \ldots s_k}}{\partial x^h} = 0 \quad \text{su} \quad FD \quad (h = 1, 2, \ldots \; n), \tag{11}$$

alle quali deve soddisfare ciascuna delle m k-forme: u, $\mathcal{E}(u)$, $\mathcal{E}^2(u)$, ..., $\mathcal{E}^{m-1}(u)$.

La $v = \frac{1}{k!} \sum_{s_1, \ldots s_k} v_{s_1 \ldots s_k} dx^{s_1} \ldots dx^{s_k}$ designa la generica delle anzidette k-forme.

Nello spazio $\mathcal{S}(D)$ bisogna considerare una varietà analoga alla $\mathcal{H}(D)$: essa è quella costituita da tutte le forme dotate di $\mathcal{E}^h(u) (h \geq 0)$ di classe $C^{(2)}$ in $D - FD$ e che ivi verificano l'equazione $\mathcal{E}^m(u) = 0$. Tale varietà, che indicheremo con $\mathcal{H}_m(D)$, è chiusa. La dimostrazione di ciò si consegue in modo perfettamente analogo a quella del teor. IV, usando per le k-forme di $\mathcal{H}_m(D)$ la seguente proprietà caratteristica di media:

$$u(y) = \int_D u(x) \cdot A\mathcal{E}_x[\mu_\rho^{(m)}(x, y)]$$

dove $\mu_\rho^{(m)}(x, y)$ è la k-forma nucleare così definita:

$$\mu_\rho^{(m)}(x, y) \begin{cases} = \left(1 - \dfrac{\overline{xy}^{n+3}}{\rho^{n+3}}\right)^{2m+3} s^{(m-1)}(x, y) & \text{per } \overline{xy} \leq \rho \\ = 0 & \text{per } \overline{xy} > \rho. \end{cases}$$

Con $s^{(m-1)}(x, y)$ si è indicata la k-forma *iterata* $(m-1)$-*esima* sul campo C della $s(x, y)$, soluzione fondamentale relativa all'operatore $\mathcal{E}$.

Sussiste, con dimostrazione identica, l'analogo del teor. III. Ne segue la completezza di $\mathcal{H}_m(D)$.

L'estensione del teorema V è ormai ovvia. Basta ripeterne la dimostrazione sostituendo $T(\varphi)$ con la trasformazione $T^m(\varphi)$ ed interpretando $P(u)$ come la proiezione dell'elemento u di $\mathcal{S}(D)$ su $\mathcal{H}_m(D)$. Si perviene così alla seguente formola risolutiva del problema (10), (11):

$$u = T^{2m}(\varphi) - T^m P T^m(\varphi) \equiv G_D^{(m)}(\varphi).$$

È utile osservare che, affinchè la u rappresentata dalla $G_D^{(m)}(\varphi)$ sia una funzione di classe $C^{(2)}$ in D, qualunque sia φ appartenente a $\mathcal{S}(D)$, basta assumere $m \geq \frac{n}{4} + 2$.

È anche utile notare la seguente proprietà della trasformazione $T(\varphi)$:

VI. *Sia* $\varphi \in \mathcal{S}(D)$ *e* ψ *una* k*-forma di classe* $C^{(2)}$ *in* $D - FD$. *Se riesce quasi ovunque in* D:

$$T(\varphi) = \psi, \tag{12}$$

riesce anche quasi ovunque in D : $\varphi = -\mathcal{E}(\psi)$.

Sia I un arbitrario intervallo chiuso interno a D e su FI siano sommabili i coefficienti di $T(\varphi)$ e le loro derivate. Sia u una qualsivoglia k-forma di classe $C^{(2)}$ in D. Dalla (12) facilmente si deduce, tenendo presente la (2) e la (4) scritte relativamente a I:

$$\int_I u\varphi^* = -\int_I u \cdot A\mathcal{E}(\psi)$$

e, per l'arbitrarietà di I e u, la tesi.

6. Forme differenziali esterne su una varietà differenziabile.

Sia $V^{(n)}$ uno spazio topologico di Hausdorff connesso e compatto, tale che ogni suo punto abbia un intorno omeomorfo ad una sfera dello spazio euclideo S_n (n-sfera). Ogni insieme aperto contenuto in $V^{(n)}$ omeomorfo ad una n-sfera sarà detto una *n-cella* di $V^{(n)}$. Se E è una n-cella di $V^{(n)}$, ogni sua rappresentazione biunivoca e continua in una n-sfera introduce in E un *sistema di coordinate*, assumendo come coordinate di un punto di E quelle del suo omologo in S_n rispetto ad un sistema cartesiano, preventivamente introdotto nello S_n.

Noi ammetteremo che su $V^{(n)}$ esista una famiglia $\{E_k\}$ costituita da un numero finito di n-celle: $E_1, E_2, \ldots, E_r$, verificante le seguenti condizioni:

1) Ogni punto di $V^{(n)}$ appartiene ad almeno una n-cella del sistema.

2) Su ogni E_k è fissato un sistema di coordinate.

3) Se $E_h \cdot E_k (h \neq k)$ non è vuoto, le coordinate di un punto di $E_h \cdot E_k$ rispetto al sistema scelto in E_h sono funzioni di classe $C^{(s)}$ con jacobiano positivo delle sue coordinate rispetto al sistema scelto in E_k.

Se sono soddisfatte tali condizioni, la $V^{(n)}$ sarà detta una *varietà differenziabile chiusa di classe* $C^{(s)}$ [10]).

Si dirà che la famiglia $\{E_k\}$ verificante 1), 2), 3) introduce in $V^{(n)}$ una *famiglia di sistemi di coordinate*. Se su $V^{(n)}$ si considera una seconda famiglia $\{I_h\}$ di n-celle: $I_1, I_2, \ldots, I_q$ verificanti 1), 2), 3), si dirà che essa introduce una famiglia di sistemi di coordinate *equivalente* a quella introdotta da $\{E_k\}$, allorchè, considerando la famiglia costituita da tutte le E_k e tutte le I_h, essa ancora verifica 1), 2), 3). Ogni famiglia di sistemi di coordinate equivalente a quella introdotta da $\{E_k\}$ dicesi una famiglia *ammissibile* di sistemi di coordinate su $V^{(n)}$.

Una funzione scalare $f(x)$ definita su $V^{(n)}$ si dirà di classe

---

[10]) L'aver imposto nella condizione 3) che la trasformazione di coordinate, da un sistema all'altro, abbia sempre uno jacobiano positivo, equivale all'ipotesi che su $V^{(n)}$ è possibile fissare un *orientamento*.

$C^{(q)}$ $(q \leq s)$, se, considerata su E_k, essa è di classe $C^{(q)}$ rispetto al sistema di coordinate introdotto in E_k. È evidente che tale definizione non dipende dalla particolare famiglia $\{E_k\}$ scelta per definire il carattere differenziale di $V^{(n)}$.

Su $V^{(n)}$ un tensore si definisce assegnandone le componenti in un punto x rispetto al sistema di coordinate in una E_k che contiene x. Passando da un sistema di coordinate ad un altro, relativo ad una famiglia ammissibile di sistemi di coordinate, le componenti del tensore si trasformano con le note leggi di covarianza o contravarianza a seconda della natura del tensore stesso, per modo che le componenti rispetto al nuovo sistema si ottengono mediante combinazioni lineari delle vecchie componenti, moltiplicate per derivate parziali prime delle coordinate di un sistema, fatte rispetto a quelle dell'altro sistema. Ne viene che, se le primitive componenti erano di classe $C^{(q)}$ $(q \leq s - 1)$ rispetto alle vecchie coordinate, di tale classe saranno anche le componenti rispetto alle nuove coordinate. Si può quindi dare in modo intrinseco il concetto di *tensore di classe* $C^{(q)}$ $(q \leq s - 1)$ definito su $V^{(n)}$.

D'ora in avanti noi supporremo $s \geq 3$.

I concetti relativi alle forme differenziali esterne, già considerati in uno spazio euclideo, possono essere introdotti in modo intrinseco su una varietà differenziabile ad n dimensioni.

Sia definito su $V^{(n)}$ un tensore covariante emisimmetrico a k indici; dette $x^1, \ldots, x^n$ le coordinate di un punto x di $V^{(n)}$ rispetto a un dato sistema e $u_{s_1 \ldots s_k}(x)$ le componenti del tensore anzidetto rispetto allo stesso sistema di coordinate, la k-forma u è, rispetto a tale sistema, rappresentata dalla seguente espressione:

$$u = \frac{1}{k!} \sum_{s_1 \ldots s_k} u_{s_1 \ldots s_k} dx^{s_1} \ldots dx^{s_k}.$$

La u sia di classe $C^{(1)}$, cioè sia di classe $C^{(1)}$ il tensore che serve a definirla. Si definisce allora il suo differenziale esterno in modo perfettamente analogo al caso euclideo. Si constata che tale definizione non dipende dalla scelta delle coordinate. Sono immediate le estensioni dei concetti di forma chiusa o omologa a zero, di prodotto di una k-forma per una h-forma e della regola di differenziazione di un prodotto.

Vogliamo adesso mettere sotto forma indipendente dalle coordinate il concetto di forma aggiunta di una data k-forma. Occorre per ciò prefissare un tensore doppio, simmetrico, contravariante, di classe $C^{(2)}$, le cui componenti rispetto ad un fissato sistema di coordinate indicheremo con a^{hk}. Supporremo che la forma quadratica $\sum_{hk}^{1,n} a^{hk}\lambda_h\lambda_k$ sia definita positiva in ogni fissato punto x di $V^{(n)}$. Dette $u_{s_1\ldots s_k}$ le componenti rispetto alle stesse coordinate del tensore covariante a k indici, che definisce la k-forma u, poniamo:

$$u^*_{s_{k+1}\ldots s_n} = \frac{(-1)^\sigma}{\sqrt{det\,(a^{hk})}} \sum_{p_1\ldots p_k} a^{p_1s_1}\ldots a^{p_ks_k}u_{p_1\ldots p_k},$$

essendo σ il numero delle inversioni che $s_1,\ldots, s_n$ presenta rispetto alla disposizione principale. Le $u^*_{s_{k+1}\ldots s_n}$ sono le componenti, rispetto al sistema di coordinate scelto, di un tensore covariante emisimmetrico a $n-k$ indici. L'aggiunta u^* della k-forma u è la $(n-k)$-forma individuata da tale tensore. Essa, nel sistema di coordinate scelto, è così rappresentata:

$$u^* = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{s_{k+1}\ldots s_n} u^*_{s_{k+1}\ldots s_n} dx^{s_{k+1}}\ldots dx^{s_n}.$$

Se per il particolare sistema di coordinate adottato riesce $det\,(a^{hk}) \equiv 1$, la forma u^* è il prodotto della matrice A, avente come elementi le componenti del tensore doppio contravariante, per la k-forma u.

Per le forme aggiunte sussistono le analoghe delle proprietà α), β), γ), δ) elencate al n. 2. Il co-differenziale della k-forma u (di classe $C^{(1)}$) è la $(k-1)$-forma:

$$\delta u = (du^*)^*.$$

È evidente cosa debba intendersi per forma co-chiusa o co-omologa a zero su $V^{(n)}$. Si acquisisce anche immediatamente, in forma invariante, la definizione dell'operatore $\mathcal{E}$. Precisamente si ha:

$$\mathcal{E}(u) = (-1)^{nk}\delta du + (-1)^{nk+n}d\delta u.$$

Diremo che la k-forma u è *armonica su* $V^{(n)}$ se è di classe $C^{(2)}$ e riesce $\mathcal{E}(u) = 0$ su $V^{(n)}$.

3 6 ★

7. Spazio di Hilbert delle k-forme definite su $V^{(n)}$.

Sia u una k-forma, tale che i suoi coefficienti rispetto al sistema di coordinate esistente in E_h siano, qualunque sia h, funzioni di quadrato sommabile nel senso di Lebesgue sulla n-sfera di S_n immagine di E_h. Tale proprietà si conserva se anzichè considerare $\{E_h\}$ si considera una famiglia equivalente $\{I_m\}$.

Orbene, la totalità $\mathfrak{S}(V^{(n)})$ delle k-forme siffatte può esser considerata come uno spazio di Hilbert. A tale scopo, detti u e v due elementi di $\mathfrak{S}(V^{(n)})$ e indicate con $x^1, \dots, x^n$ le coordinate del punto x di E_i rispetto al sistema introdotto in tale n-cella, porremo:

$$H_1 = E_1\,,\ H_i = E_i - \sum_{j=1}^{i-1} E_j\,;$$

$$\int_{V^{(n)}} uv^* = \sum_{i=1}^{r} \int_{H_i} \Big(\sum_{s_1 \dots s_n} (-1)^{\sigma} u_{s_1 \dots s_k} v^*_{s_{k+1} \dots s_n} \Big) dx^1 \dots dx^n .$$

Il valore dell'integrale $\int_{V^{(n)}} uv^*$ non dipende dalla particolare famiglia $\{E_h\}$.

Definiremo il prodotto scalare (u, v) di due elementi di $\mathfrak{S}(V^{(n)})$ ponendo:

$$(u, v) = \int_{V^{(n)}} uv^* .$$

Si riconosce che sono soddisfatte le proprietà richieste al prodotto scalare e che lo spazio $\mathfrak{S}(V^{(n)})$ è completo.

Evidentemente sono da considerarsi come un unico elemento dello spazio due forme tali che, consideratine i coefficienti rispetto allo stesso sistema di coordinate, questi sono quasi ovunque eguali su $V^{(n)}$ [11]).

---

[11]) La frase «quasi ovunque su $V^{(n)}$» ha un ben preciso significato, dato che possono definirsi su $V^{(n)}$ in modo intrinseco gli insiemi di misura nulla. Precisamente è tale un insieme N di punti di $V^{(n)}$ per il quale il trasformato di $N . E_h$ $(h = 1, 2, \dots, r)$ è un insieme di misura nulla secondo LEBESGUE in S_n. Evidentemente tale definizione non dipende dalla scelta della famiglia $\{E_h\}$ che introduce le coordinate su $V^{(n)}$.

8. Teorema di esistenza delle k-forme armoniche su $V^{(n)}$.

Premettiamo il seguente lemma:

VII. *La k-forma u è armonica su $V^{(n)}$ allora e allora soltanto che è di classe $C^{(2)}$ su $V^{(n)}$ e risulta:*

$$du = 0 \quad , \quad \delta u = 0 \quad ^{12)}. \tag{13}$$

Basta solo far vedere che se u è armonica, sono verificate le (13). È elementare verificare la seguente relazione:

$$d(vw^*) = dv \cdot w^* + (-1)^{kn+n} v \cdot (\delta w)^*,$$

la quale sussiste qualunque siano la $(k-1)$-forma v e la k-forma w di classe $C^{(1)}$ su $V^{(n)}$.

Tenendo presente che $V^{(n)}$ è priva di frontiera, si deduce:

$$\int_{V^{(n)}} d(vw^*) = \int_{V^{(n)}} dv \cdot w^* + (-1)^{kn+n} \int_{V^{(n)}} v \cdot (\delta w)^* = 0$$

e quindi:

$$\int_{V^{(n)}} dv \cdot w^* = (-1)^{kn+n+1} \int_{V^{(n)}} v \cdot (\delta w)^*. \tag{14}$$

Ne segue che se w è co-chiusa, in particolare co-omologa a zero, dalla (14) si trae $(dv, w) = 0$.

Dall'equazione:

$$(-1)^{nk} \delta du + (-1)^{nk+n} d\delta u = 0,$$

moltiplicando scalarmente i due membri una volta per δdu ed una seconda volta per $d\delta u$, si trae:

$$\| \delta du \| = 0 \quad , \quad \| d\delta u \| = 0$$

e quindi, essendo u di classe $C^{(2)}$:

$$\delta du = 0 \quad , \quad d\delta u = 0 \, ;$$

---

12) Cfr. DE RHAM - BIDAL [18].

moltiplicando scalarmente i due membri di queste equazioni per u si trae:

$$(u, \delta du) = (-1)^{kn+1} \int_{V^{(n)}} du \cdot (du)^* ,$$

$$(u, d\delta u) = (-1)^{kn+1} \int_{V^{(n)}} \delta u \cdot (\delta u)^* = 0 ,$$

donde le (13).

Possiamo adesso enunciare e dimostrare il teorema di Hodge sull'esistenza delle k-forme armoniche:

VIII. *Se $V^{(n)}$ ha eguale a B_k il suo k-esimo numero di Betti, su $V^{(n)}$ esistono B_k k-forme armoniche linearmente indipendenti e non più di B_k.*

Nello spazio $\mathfrak{S}(V^{(n)})$ consideriamo la varietà lineare costituita dalle k-forme di classe $C^{(0)}$ omologhe a zero. Sia W_1 la chiusura di tale varietà. Sia poi W_2 la chiusura della varietà delle k-forme di classe $C^{(0)}$ co-omologhe a zero. Consideriamo la varietà lineare W, insieme risultante di W_1 e W_2 [13]. Sia v un qualsiasi elemento di $\mathfrak{S}(V^{(n)})$ e w la sua proiezione su W. Dimostriamo che $u = v - w$ è quasi ovunque eguale ad una k-forma armonica. Fissato x in $V^{(n)}$ si può determinare un dominio D di $V^{(n)}$ contenente nel suo interno x e, a sua volta, contenuto in una n-cella I_h, facente parte di una famiglia $\{I_h\}$, la quale introduce in $V^{(n)}$ una famiglia ammissibile di sistemi di coordinate. È lecito supporre che il sistema di coordinate esistente in I_h sia tale che le componenti rispetto ad esso del tensore doppio contravariante, da noi introdotto su $V^{(n)}$, verificano la condizione $det\,(a^{hk}) \equiv 1$.

Con la stessa lettera D sarà indicata l'immagine del dominio D di $V^{(n)}$ nella n-sfera di S_n in cui si rappresenta I_h.

Consideriamo la k-forma z che è identicamente nulla in $V^{(n)} - D$ e che in D coincide con la k-forma $\bar{z}$, la quale nel

---

[13]) Cfr. [6] pag. 75.

sistema di coordinate menzionato, è rappresentata al modo seguente:

$$\bar{z} = G_D^{(m)}(\varphi),$$

φ essendo un'arbitraria k-forma continua in D. Se si assume $m \geq \frac{n}{4} + 2$, la k-forma $\zeta = \mathcal{E}(z)$ è di classe $C^{(0)}$ e, tenendo presente la definizione dell'operatore $\mathcal{E}$, appartiene a W.

Sarà allora $(u, \zeta) = 0$ e quindi, indicando con $(u, v)_D$ il prodotto scalare di due elementi dello spazio di Hilbert $\mathfrak{H}(D)$ introdotto nel n. 5, avremo:

$$(u, \mathcal{E}(\bar{z}))_D = 0\,.$$

Ciò implica:

$$(u, T^{2m-1}(\varphi) - T^{m-1}PT^m(\varphi))_D = (T^{2m-1}(u) - T^m PT^{m-1}(u), \varphi)_D = 0$$

e per l'arbitrarietà di φ, riesce in D:

$$T^{2m-1}(u) = T^m PT^{m-1}(u)\,.$$

Ne segue per il teor. VI che la u è quasi ovunque eguale in D ad una k-forma di classe $C^{(2)}$ verificante l'equazione $\mathcal{E}(u) = 0$. Data l'arbitrarietà di D ed il fatto che i coefficienti degli elementi di $\mathfrak{H}(V^{(n)})$ sono determinati a meno di insiemi di misura nulla, possiamo affermare che u è armonica su $V^{(n)}$. Supposto $B_k > 0$ e detto $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{B_k}$ un sistema fondamentale di k-cicli di $V^{(n)}$, sia v_s una forma di classe $C^{(1)}$, chiusa ed avente nulli tutti i suoi periodi fondamentali ad eccezione di quello relativo al ciclo Γ_s che è uno. Una tale forma esiste per il primo teorema di Cartan-de Rham [14]). Per la (14) essa è ortogonale alla varietà W_2 e quindi la sua proiezione w_s su W appartiene a W_1. Poichè w_s è limite di una successione $\{w_s^{(n)}\}$ di k-forme, appartenenti a W_1 ed aventi i coefficienti continui, che converge verso w_s con la metrica di $\mathfrak{H}(V^{(n)})$, può affermarsi che esistono k-cicli Γ'_h

---

14) Cfr. DE RHAM [20].

($h = 1, 2, \ldots, B_k$) omologhi a Γ_h, sui quali ha senso l'integrale:

$$\int_{\Gamma'_h} w_s ,$$

potendo inoltre scegliersi $\{ w_s^{(n)} \}$ tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma'_h} w_s^{(n)} = \int_{\Gamma'_h} w_s .$$

Ma $w_s^{(n)}$ è omologa a zero e quindi il periodo di w_s relativo a Γ'_h è nullo. Ne segue che $u_s = v_s - w_s$ ha nulli tutti i suoi periodi tranne quello relativo a Γ_s che vale uno. Resta così provata l'esistenza di B_k forme armoniche linearmente indipendenti su $V^{(n)}$. Sia u una qualsiasi k-forma armonica. Può scegliersi la combinazione $\sum_{s=1}^{B_k} c_s u_s$ in modo tale che $u_0 = u - \sum_{s=1}^{B_k} c_s u_s$ abbia nulli tutti i suoi periodi. Allora per il secondo teorema di Cartan-de Rham [15]), la u_0 essendo chiusa e con periodi tutti nulli, è omologa a zero. La (14), ponendovi $dv = u_0$ e $w = u_0$, fornisce $\| u_0 \| = 0$ e quindi $u_0 = 0$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. CACCIOPPOLI - *Sui teoremi d'esistenza di Riemann*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1938.

[2] G. CIMMINO - *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1938.

[3] G. F. D. DUFF - *Differential forms with boundary*, Ann. of Math. 1952.

[4] G. F. D. DUFF - *Boundary value problems associated with the tensor Laplace equation*, Can. Jour. of Math. 1953.

---

[15]) Cfr. loc. cit. [14]).

[5] G. F. D. DUFF - D. C. SPENCER - *Harmonic tensor on Riemannian manifolds with boundary*, Ann. of Math. 1952.

[6] G. FICHERA - *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, Ist. Mat. Univ. Trieste, 1954.

[7] G. FICHERA - *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 1948.

[8] G. FICHERA - *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, Ann. Scuola Norm. Pisa, 1950

[9] G. FICHERA - *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, Atti del Convegno di Trieste sulle equazioni alle derivate parziali - Edit. Cremonese, 1955.

[10] W. V. D. HODGE - *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge Univ. Press, 1941.

[11] W. V. D. HODGE - *A Dirichlet problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties*, Proc. London Math. Soc., 1932.

[12] W. V. D. HODGE - *Harmonic functionals in a Riemannian space*, Proc. London Math. Soc., 1933.

[13] W. V. D. HODGE - *The existence theorem for harmonic integrals*, Proc. London Math. Soc., 1936.

[14] K. KODAIRA - *Harmonic fields in Riemannian manifolds*, Ann. of Math., 1949.

[15] C. MIRANDA - *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Ergeb. der Math. Springer 1955.

[16] C. MIRANDA - *Sull'integrazione delle forme differenziali esterne*, Ricerche di Mat. Univ. Napoli, 1940.

[17] M. PICONE - *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940.

[18] G. DE RHAM - P. BIDAL - *Les formes differentielles harmoniques*, Comm. Math. Helv., 1946-47.

[19] G. DE RAHM - K. KODAIRA - *Harmonic integrals*, Inst. for Advanced Studies, Princeton, 1953.

[20] G. DE RHAM - *Sur l'Analysis situs des varietés à n dimensions*, Jour. de Math. p. e appl., 1931.

[21] M. SCHIFFER - D. C. SPENCER - *Functionals of finite Riemann surfaces*, Princeton Univ. Press., 1954.

[22] B. SEGRE - *Forme differenziali e loro integrali*, Docet, Roma, 1951.

[23] H. WEYL - *On Hodge's theory of harmonic integrals*, Ann. of Math., 1943.