RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

Sulla teoria del potenziale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 510-522

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__510_0>

SULLA TEORIA DEL POTENZIALE

Nota di ENRICO MAGENES (*a Modena*)

In questa nota prenderò in considerazione il comportamento alla frontiera del potenziale di doppio strato obliquo e della derivata obliqua del potenziale di semplice strato (ordinari e generalizzati) con momento e densità solamente sommabili e gli integrali principali connessi; e dimostrerò la validità delle classiche relazioni limiti anche nelle nuove ipotesi sulle densità e i momenti, mettendo inoltre in relazione i problemi e i risultati con recenti lavori di A. P. CALDERON e A. ZYGMUND [2] [1]), di S. G. MIHLIN [7] e miei [6].

1. - Sia D un dominio limitato e a connessione superficiale semplice dello spazio (x, y, z) euclideo, la cui frontiera F sia dotata di piano tangente e curvature continue; nell'intorno di ogni suo punto M la frontiera si può rappresentare allora, prendendo come piano (x, y) il piano tangente in M e come asse z l'asse n_M normale interno a F in M, mediante l'equazione $z = f(x, y)$, dove $f(x, y)$ è funzione continua con le sue derivate prime e seconde in un intorno dello zero. Per ogni punto M di F sia definito un asse l_M, non situato sul piano tangente a F in M e penetrante in D, i cui coseni direttori siano funzioni hölderiane di M su F.

(*) Pervenuta in Redazione il 2 novembre 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale del presente lavoro.

Sia poi $\varphi(Q)$ una funzione sommabile su F e si consideri il potenziale di semplice strato

$$(1) \qquad u(P) = \int_F \varphi(Q) \frac{1}{PQ} d\sigma_Q .$$

È ben noto (v. [1] oppure il volume [8] di C. MIRANDA, al quale pure rinvio fin d'ora per ogni risultato noto sulla teoria del potenziale e delle equazioni ellittiche che interessi in seguito) che, se $\varphi(Q)$ è anche hölderiana su F, per ogni punto M di F vale la relazione limite

$$(2) \qquad \lim_{P \to M \text{ (su } \pm n_M)} \frac{du(P)}{dl_M} = \mp 2\pi \cos(n_M, l_M)\varphi(M) + \\ + \int_F^* \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} \frac{1}{\overline{MQ}} d\sigma_Q$$

dove $+n_M$ sta ad indicare l'asse n_M stesso e $-n_M$ l'asse opposto e l'integrale $\int_F^*$ è un integrale principale di CAUCHY, quando si assumano come « domini di esclusione » le porzioni di superficie staccate su F dai cilindri circolari retti aventi per asse n_M.

Proponiamoci ora di estendere la (2) al caso che $\varphi(Q)$ sia solo *sommabile* su F. Si pongono allora anzitutto due problemi: *dimostrare l'esistenza del limite a primo membro della* (2) *e dimostrare l'esistenza dell'integrale principale a secondo membro della* (2)..

I due problemi sono però in strettissima relazione. Si può infatti facilmente dimostrare, come ora faremo, estendendo semplici calcoli già svolti da A. ZYGMUND e A. P. CALDERON [2] nel caso che F sia un piano, che *per quasi-tutti i punti M di F l'esistenza del limite e quella dell'integrale principale sono due fatti equivalenti;* e precisamente ciò avviene in tutti i cosidetti punti di LEBESGUE per la funzione φ[2].

[2]) Tali sono i punti nei quali l'integrale $\int_B |\varphi(Q) - \varphi(M)| \, d\sigma_Q$ (B boreliano di F) ha per derivata lo zero.

Sia infatti M un tale punto. Assunta nell'intorno di M la rappresentazione $z = f(x, y)$, di cui si è sopra detto, indichiamo per $r > 0$ con Γ_r il cerchio del piano (x, y) di equazione $x^2 + y^2 \leq r^2$ e con F_r la porzione di F che si proietta ortogonalmente su Γ_r. Supponiamo anche, per semplicità e senza per questo ledere la generalità [3]), che sia $\varphi(M) = 0$; allora in quanto M è un punto di LEBESGUE per φ, si ha

$$(3) \qquad \lim_{r \to 0} \frac{\int_{F_r} |\varphi(Q)|\, d\sigma_Q}{r^2} = 0 .$$

Per le proprietà ammesse sulla funzione $f(x, y)$ è possibile determinare quattro numeri positivi R, H, p e q, con $R < 1$, tali che per ogni (x, y) di Γ_R e qualunque sia il numero z, si abbia, posto $\rho = + \sqrt{x^2 + y^2}$

$$(4) \qquad |f(x, y)| < H\rho^2 < H\rho \quad , \quad |f_x(x, y)| < H\rho \quad , \quad |f_y(x, y)| < H\rho$$

$$(5) \qquad p(\rho^2 + z^2) < \rho^2 + (z - f(x, y))^2 < q(\rho^2 + z^2) \quad {}^{4)} .$$

Supponiamo ora il punto P su n_M e per fissare le idee sia esso interno a D e dunque $P \equiv (0, 0, z)$ con $z > 0$; potremo anche supporre $z < R$. Indichiamo con α, β, γ i coseni direttori di l_M e con $\Gamma_{R,z}$ la corona circolare di equazioni $z^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$.

Si ha allora, posto per semplicità $\varphi(x, y) = \varphi(Q)$, se Q è il punto di F di cordinate $(x, y, f(x, y))$,

$$(6) \qquad \frac{du(P)}{dl_M} = \int_{F - F_R} \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\sigma_Q +$$

---

[3]) Basta ricordare che la (2) vale se φ è costante e scomporre $u(P)$ nella somma

$$\int_F [\varphi(Q) - \varphi(M)] \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\sigma_Q + \int_F \varphi(M) \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\sigma_Q .$$

[4]) I calcoli sono elementari e trovansi già svolti ad es. in [4] pag. 10-11.

$$+\iint\limits_{\Gamma_{R,z}} \varphi(x, y) \frac{\alpha x + \beta y + \gamma(f(x, y) - z)}{[x^2 + y^2 + (z - (x, y))^2]^{3/2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy +$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_z} \varphi(x, y) \frac{\alpha x + \beta y + \gamma(f(x, y) - z)}{[x^2 + y^2 + (z - f(x, y))^2]^{3/2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

Si osservi poi che, per definizione, l'integrale principale $\overset{*}{\int\limits_F} \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} \frac{1}{MQ}\, d\sigma_Q$ è il limite, se esiste finito,

$$\lim_{z \to 0} \int\limits_{F-F_z} \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} \frac{1}{\overline{MQ}}\, d\sigma_Q$$

cioè anche

$$\lim_{z \to 0} \left\{ \int\limits_{F-F_R} \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} \frac{1}{\overline{MQ}}\, d\sigma_Q + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \iint\limits_{\Gamma_{R,z}} \varphi(x, y) \frac{\alpha x + \beta y + \gamma f(x, y)}{[x^2 + y^2 + f^2(x, y)]^{3/2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy \right\}.$$

L'equivalenza sopra enunciata sarà dunque ovviamente dimostrata quando si siano dimostrate le due seguenti relazioni

$$\lim_{z \to 0} \iint\limits_{\Gamma_z} \varphi(x, y) \frac{\alpha x + \beta y + \gamma(f(x, y) - z)}{[x^2 + y^2 + (z - f(x, y))^2]^{3/2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = 0 \tag{8}$$

$$\lim_{z \to 0} \iint\limits_{\Gamma_{R,z}} \varphi(x, y) \left[\frac{\alpha x + \beta y + \gamma(f(x, y) - z)}{[x^2 + y^2 + (z - f(x, y))^2]^{3/2}} - \right. \tag{9}$$

$$\left. - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma f(x, y)}{[x^2 + y^2 + f^2(x, y)]^{3/2}} \right] \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = 0.$$

Per dimostrare la (8), posto $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \operatorname{sen} \vartheta$, indichiamo con $\chi(\rho, \vartheta)$ la funzione $|\varphi(x, y)| \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ espressa mediante le variabili ρ e ϑ; tenendo presenti le (5), si ha

$$(10) \quad \left| \iint_{\Gamma_z} \varphi(x, y) \frac{\alpha x + \beta y}{[x^2 + y^2 + (z - f(x\ y))^2]^{3/2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy \right| \leq$$

$$\leq 2 \int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{\chi(\rho, \vartheta)\rho}{p^{3/2}[\rho^2 + z^2]^{3/2}} \rho d\rho d\vartheta .$$

Introdotta la funzione

$$\psi(\rho) = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \chi(r, \vartheta) r dr d\vartheta \qquad 0 \leq \rho \leq R$$

si ha, per la (3), $\psi(\rho) = o(\rho^2)$ [5]; inoltre è $\psi'(\rho) = \int_0^{2\pi} \chi(\rho, \vartheta) d\vartheta$.

Quindi

$$\int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{\chi(\rho, \vartheta)\rho}{(\rho^2 + \vartheta^2)^{3/2}} \rho d\rho d\vartheta = \int_0^z \frac{\psi'(\rho)\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho = \frac{\psi(z) z}{\sqrt{8}\, z^3} -$$

$$- \int_0^z \frac{\psi(\rho)(z^2 - 2\rho^2)}{(\rho^2 + z^2)^{5/}} d\rho \leq \frac{\psi(z)}{\sqrt{8}\, z^2} + 3z^2 \int_0^z \frac{\psi(\rho)}{z^5} = o(1) + \frac{1}{z^3} \int_0^z o(\rho^2) d\rho = o(1).$$

Dunque l'integrale a primo membro di (10) tende a zero con z. Quanto all'integrale

$$\iint_{\Gamma_z} \varphi(x, y) \frac{f(x, y) - z}{[x^2 + y^2 (z - f(x, y))^2]^{3/2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

se si usa la stessa tecnica e si osserva che per le (4) risulta $| f(x, y) - z | < H\rho + z$, si arriva a maggiorarlo in modulo

---

[5]) Indichiamo con o il simbolo di LANDAU, vale a dire $v = o(t)$ significa che $\frac{v}{t}$ è infinitesimo.

mediante integrali del tipo

$$\int_0^z \frac{\psi'(\rho)\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,d\rho = o(1)$$

$$\int_0^z \frac{\psi'(\rho)z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,d\rho = \frac{\psi(z)}{\sqrt{8}\,z^2} + 3\int_0^z \frac{\psi(\rho)\rho z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\,d\rho \le o(1) + \frac{1}{z^3}\int_0^z o(\rho^2)\,d\rho = o(1).$$

Ne segue la validità della (8).

Per dimostrare la (9) si osservi anzitutto che, applicando il teorema del valore medio, detto $\tilde{z}$ un opportuno numero tra 0 e z si ha, tenendo presenti anche le (4), per $z \le \rho \le R < 1$,

$$\begin{aligned}
&|[\rho^2 + f^2(x, y)]^{3/2} - [\rho^2 + (z - f(x, y))^2]^{3/2}| = \\
&= 3\,|[\rho^2 + (\tilde{z} - f(x, y))^2]^{1/2}(\tilde{z} - f(x, y))z| \le 3(\rho^2 + z^2)^{1/2}z^2 + \\
&+ 3(\rho^2 + z^2)^{1/2}z\,|f(x, y)| + 3\,|f(x, y)|\,z^2 + 3f^2(x, y)z < \\
&< 3\sqrt{2}\,\rho z^2 + 3H\sqrt{2}\,\rho^2 z + 3H\rho z^2 + 3H^2\rho^2 z \le K\rho^2 z
\end{aligned}$$

con K costante opportuna.

Si ottiene allora, applicando anche le (5),

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{\Gamma_{R,z}} \varphi(x, y)(\alpha x + \beta y)\left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - f(x, y))^2]^{3/2}} - \right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{1}{[x^2 + y^2 + f^2(x, y)]^{3/2}}\right]\sqrt{1 + f_x^2 + f_x^2}\,dxdy\right| \le \\
&\le \frac{2K}{p^{3/2}}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\chi(\rho, \vartheta)\rho \cdot \rho^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}\rho^3}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta = \frac{2K}{p^{3/2}}\int_z^R \frac{\psi'(\rho)z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\,d\rho = \\
&= \frac{2K}{p^{3/2}}\,\frac{\psi(R)z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2K}{p^{3/2}}\,\frac{\psi(z)z}{\sqrt{8}\,z^3} + \frac{2K}{p^{3/2}}\cdot 3z\int_z^R \frac{\psi(\rho)\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}\,d\rho \le \\
&\le o(1) + \frac{6K}{p^{3/2}}\,z\int_z^R \frac{\psi(\rho)\rho}{\rho^5}\,d\rho = o\,1) + z\int_z^R o(\rho^{-2})\,d\rho = o(1).
\end{aligned}$$

Analogamente si tratta l'integrale

$$\left|\iint_{\Gamma_{R,z}} \varphi(x, y)\left[\frac{f(x, y)-z}{[x^2+y^2+(z-f(x, y))^2]^{3/2}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{f(x, y)}{[x^2+y^2+f^2(x, y)]^{3/2}}\right]\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy\right|$$

e d'altra parte questo integrale è ben noto nello studio della derivata normale del potenziale di semplice strato (v. ad es. [4] pag. 10-11), poichè la funzione tra parentesi quadre altro non è che la differenza $\dfrac{d}{dn_M}\dfrac{1}{\overline{PQ}}-\dfrac{d}{dn_M}\dfrac{1}{\overline{MQ}}$.

Dunque è dimostrata anche la (9) e l'equivalenza che si voleva.

2. - Ci si può dunque limitare a studiare o l'esistenza del limite a primo membro della (2) o quella dell'integrale principale a secondo membro; una volta dimostrata una delle due esistenze è immediato ricavare la validità della (2), in virtù della sua validità quando φ è costante e del risultato dimostrato nel numero precedente.

La dimostrazione diretta dell'esistenza per quasi-tutti gli M di F, dell'integrale $\int_F^* \varphi(Q)\dfrac{d}{dl_M}\dfrac{1}{\overline{MQ}}\,d\sigma_Q$ non si presenta però semplice; essa è stata ottenuta supponendo che F sia un piano, da A. ZYGMUND e A. P. CALDERON [2].

Ma si può osservare che è più semplice dimostrare l'esistenza del limite

$$\lim_{P\to M\,(\text{su}\,\pm n_M)}\frac{du(P)}{dl_M} \tag{11}$$

Tale esistenza per quasi-tutti gli M di F consegue dai lavori di C. W. OSEEN [10], come ho già avuto occasione di osservare in [6] (v. l'Osservazione del n. 3).

Infatti ogni potenziale di semplice strato (1) si può rappresentare anche nella forma

$$u(P) = \int_F \zeta(Q) H(Q, P) d\sigma_Q$$

dove $\zeta(Q)$ è una funzione sommabile su F e $H(Q, P)$ è il nucleo introdotto dall'OSEEN; e di qui consegue l'esistenza per quasi-tutti gli M di F del limite (11) (si veda appunto il n. 3 di [6] [6])).

Questa semplice osservazione mi sembra rivesta particolare interesse quando si passa a considerare gli analoghi problemi per l'equazione generale, lineare omogenea di tipo ellittico, anche in un numero qualunque di variabili

$$\sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h,k}^{1,m} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = 0. \tag{12}$$

È noto che in opportune ipotesi di regolarità sui coefficienti di (12) si possono considerare tra le soluzioni di (12) i cosidetti potenziali generalizzati di semplice strato, analoghi ad (1),

$$u(P) = \int_F \varphi(Q) G(Q, P) d\sigma_Q$$

dove $G(Q, P)$ è una soluzione fondamentale della (12) e $\varphi(Q)$ è sommabile su F. Ed è anche noto che se φ è hölderiana su F vale la relazione analoga alla (2). Si pongono dunque gli stessi problemi ora considerati per la (2).

Orbene i calcoli svolti nel numero precedente si possono estendere, anche in m variabili, in modo sostanzialmente analogo (e solo per brevità ci siamo limitati nel n. 1 al caso del potenziale ordinario), onde *dimostrare l'equivalenza dell'esi-*

---

[6]) In [6] ho considerato in particolare il caso in cui φ e ζ sono di quadrato sommabile su F, ma le considerazioni fatte valgono con le modifiche del caso, anche se ζ e φ sono solo sommabili.

stenza del limite (11) *e dell'integrale principale.*

$$(13) \qquad \int_F^{*} \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} G(M, Q) d\sigma_Q$$

E poichè i risultati dell'OSEEN sono stati estesi da G. GIRAUD [5] all'equazione (12), si può affermare *l'esistenza per quasi-tutti gli M di F del limite* (11), *anche in questo caso più generale.*

Ne viene così *l'esistenza per quasi-tutti gli M di F dell'integrale principale* (13) *relativo a una qualunque equazione* (12) *di tipo ellittico.*

Questo risultato risponde in modo esauriente, limitatamente agli integrali principali del tipo (13), ad una questione aperta nella teoria degli integrali principali (v. i lavori di A. P. CALDERON - A. ZYGMUND [2], [3] e di S. G. MIHLIN [7] e la conferenza di C. MIRANDA [9]), alla quale finora si era risposto (v. [2]) solo nel caso che l'equazione (12) si riduca all'equazione di LAPLACE e F sia un iperpiano dello spazio ad m dimensioni [7]).

3. - Le considerazioni dei n. precedenti si possono svolgere anche per i cosidetti potenziali di doppio strato « obliquo ».

Consideriamo per fissare le idee (ma valgono anche qui le estensioni al caso dell'equazione (12) in più variabili) il potenziale ordinario di doppio strato obliquo nello spazio a tre dimensioni

$$(14) \qquad w(P) = \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dl_Q} \frac{1}{\overline{PQ}} d\sigma_Q .$$

Se φ è hölderiana su F vale, come è noto, in ogni punto

---

7) Sarà bene osservare esplicitamente che quando i coefficienti della (12) non sono costanti in D l'integrale (13) non rientra in quelli studiati da CALDERON e ZYGMUND in [2]; per esso si conoscono per ora risultati riguardanti la « convergenza in media » e non quella « puntuale » che qui interesserebbe (si veda, oltre a [2], anche [3] e [7]).

M di F la relazione

$$(15)\qquad \lim_{P\to M\,(\text{su}\,\pm n_M)} w(P) = \pm\, 2\pi \cos(l_M,\, n_M)\varphi(M) + \\ + \int_F^* \varphi(Q) \frac{d}{dl_Q} \frac{1}{\overline{MQ}}\, d\sigma_Q .$$

Nel caso che φ sia sommabile su F si possono svolgere a proposito della (15) considerazioni e calcoli del tutto analoghi a quelli svolti a proposito di (2), dimostrando che per quasi-tutti gli M di F l'esistenza del limite a primo membro e quella dell'integrale a secondo membro sono due fatti equivalenti.

D'altra parte ogni potenziale (14) è anche esprimibile come un ordinario potenziale di doppio strato (normale)

$$(16)\qquad w(P) = \int_F \zeta(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\sigma_Q .$$

Basta pensare che per noti risultati di teoria del potenziale la (14) e la (16) si possono considerare come due trasformazioni lineari continue dello spazio Σ delle funzioni sommabili su F nello spazio delle funzioni armoniche in $D - FD$ e sommabili in D, normalizzati entrambi nel modo abituale; tali trasformazioni, per noti risultati sulla risoluzione del problema di DIRICHLET mediante funzioni del tipo (14) e (16), hanno lo stesso codominio se si considerano sulla varietà V delle funzioni hölderiane su F, varietà ovunque densa in Σ, e quindi devono avere lo stesso codominio anche se considerate su tutto Σ.

Ma per la (16) esiste il limite $\lim\limits_{P\to M\,(\text{su}\,\pm n_M)} w(P)$, per quasi-tutti gli M di F, come è ben noto.

Dunque *per quasi-tutti gli M di F esiste anche l'integrale* $\int_F^* \varphi(Q) \frac{d}{dl_Q} \frac{1}{\overline{MQ}}\, d\sigma_Q$ *e vale la* (15).

4. - Nei numeri precedenti si è in sostanza svolta una teoria dei potenziali « obliqui » nel caso di densità e momenti solo sommabili. Si è ora naturalmente portati a completare questa teoria.

Una prima osservazione immediata è la seguente. Si considerino due punti P^+ e P^- simmetrici rispetto al punto M di F su n_M, il primo seguente e il secondo precedente M nel verso di n_M, e le differenze

$$\frac{du(P^+)}{dl_M} - \frac{du(P^-)}{dl_M}, \quad w(P^-) - w(P^+) \tag{17}$$

dove $u(P)$ e $w(P)$ sono dati rispettivamente dalla (1) e dalla (14) con φ sommabile su F.

Dalla (2) e dalla (15) segue ovviamente che *per quasi-tutti gli M di F le due differenze tendono a* $4\pi \cos(l_M, n_M)\varphi(M)$ *quando* P^+ *(e quindi* P^-*) tende a* M. Ma si può osservare che a questo risultato si arriva rapidamente con gli stessi calcoli svolti nel n. 1, *indipendentemente* dalla validità della (2) e della (15) per quasi-tutti gli M di F.

Ci si può poi porre la questione del comportamento delle derivate del potenziale di doppio strato obliquo, analogamente a quanto è noto per il potenziale di doppio strato ordinario normale.

Procedimenti di calcolo assai vicini a quelli del n. 1 portano facilmente a dimostrare [8]) che *per quasi-tutti gli M di F la differenza*

$$\frac{dw(P^+)}{dl_M^*} - \frac{dw(P^-)}{dl_M^*} \tag{18}$$

dove l_M^* è il cosidetto asse coriflesso di l_M [9]), *tende a* $4\pi \cos(l_M, n_M)\beta^l(M)\mu(M)$ *al tendere di* P^+ *(e di* P^-*) a* M *su* n_M,

---

8) La dimostrazione è stata infatti data per esteso dal dott. A. MALFERRARI e si troverà in un lavoro di prossima pubblicazione.

9) Cioè, nel caso dei potenziali ordinari, l'asse simmetrico di l_M rispetto a n_M (si veda ad es. [8] n. 6).

essendo $\beta^{(l)}(M)$ una opportuna funzione dipendente solo dalla direzione l_M e nulla se $l_M = n_M$ [10]).

Il risultato ha interesse oltre che in sè anche perchè insieme a quello relativo alle differenze (17) permette di ritrovare rapidamente il *teorema di inversione della formula di* GREEN da me recentemente dimostrata in [6] con altro procedimento; e detto teorema di inversione si ottiene così in ipotesi sui dati μ e δ, che vi compaiono, più generali di quelle ammesse in [6] (la semplice sommabilità di μ e δ su F in luogo della sommabilità del loro quadrato [11])).

Osserviamo infine che le considerazioni relative all'equivalenza del limite a primo membro di (15) e dell'integrale principale (13) e all'analoga equivalenza del limite a primo membro di (15) e dell'integrale principale a secondo membro, così come le precedenti osservazioni sui limiti delle differenze (17) e (18), si possono svolgere anche se si considerano potenziali relativi a una distribuzione anche non sommabile di masse e precisamente quando si sostituisca (1) con

$$\int_F \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\mu_Q$$

e (14) con

$$\int_F \frac{d}{dl_Q} \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\mu_Q$$

essendo μ una misura definitiva sui boreliani di F. Considerati i punti M di F in cui la μ sia derivabile e detta φ la derivata (densità) di μ in M, i risultati sono gli stessi e i calcoli del tutto analoghi a quelli dimostrati per (1) e (14).

---

10) La funzione $\beta^{(l)}(M)$ è la funzione che compare nella formula di GREEN per assi obliqui

$$\int_D (u\Delta_2 v - v\Delta_2 u)\,d\tau = \int_F \left(\frac{1}{\cos(l,\,n)} \frac{v\,du}{dl^*} - \frac{1}{\cos(l,\,n)} \frac{u\,dv}{dl} + \beta^{(l)} uv\right) d\sigma.$$

Si veda ad es. [8] n. 6.

11) Sarà bene però osservare che le considerazioni precedenti permettono di arrivare solo al *teorema di inversione* e non ai teoremi di unicità e di completezza di cui è anche oggetto la memoria [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BOULIGAND - G. GIRAUD - P. DELENS: *Le problemè de la dérivée oblique en théorie du potentiel.* (Act. Sc. Ind. Hermann, Paris, 1935).

[2] A. P. CALDERON - A. ZYGMUND: *On the existence of certain integrals.* (Acta Math., vol. 88, 1952, pp. 85-139).

[3] A. P. CALDERON - A. ZYGMUND: *On a problem of Mihlin.* (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 55-1955).

[4] G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* (Ann. Mat. Pura e Appl., s. 4, t. XXVII, 1948, pp. 1-28).

[5] G. GIRAUD: *Nouvelle méthode pour traiter certaines problèmes rélatif aux équations du type elliptique.* (Journ. de Math. pures et appl. , s. IX, t. XVIII, 1939, pp. 111-143).

[6] E. MAGENES: *Sui problemi di derivata obliqua regolare per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* (In corso di stampa sugli Ann. di Mat. Pura e Appl.).

[7] S. G. MIHLIN: *Singular integral equations.* (Uspehi Mat. Nausk. (N. S.), 3, n. 3 (25), 1948, pp. 29-112). Trad. inglese nelle « Translations » dell'Amer. Mat. Soc., n. 24.

[8] C. MIRANDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* (Springer, Berlin, 1955).

[9] C. MIRANDA: *Gli integrali principali nella teoria del potenziale.* (Ren. Sem. Mat. Fis., Milano, vol. XXIV, 1952-53, pp. 107-122).

[10] C. W. OSEEN: *Contributions à la théorie analitique des marées.* (Arkiv for Mat. Astr. Fys. b. 25 A, n. 24, 1937, pp. 1-39).