RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Semianelli complementarizzabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 474-509

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__474_0>

SEMIANELLI COMPLEMENTARIZZABILI

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Nel § 1 si introduce anzitutto il concetto di anello complementare (sinistro) $\mathfrak{A}$ di un semianello dato S (non necessariamente commutativo) rispetto ad un suo sottinsieme M, moltiplicativamente chiuso, di elementi semplificabili (per le definizioni qui adottate si vedano i n.i seguenti, in particolare il n.° 1).

Si dimostra quindi un teorema (n.° 2) che dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè S sia complementarizzabile (a sinistra) rispetto ad M, cioè affinchè esista l'anello $\mathfrak{A}$ (che risulta individuato da S ed M a meno di isomorfismi).

In particolare, se S è un anello, $\mathfrak{A}$ non è altro che l'anello dei quozienti (a sinistra) di S rispetto ad M, e si ritrova allora (n.° 8) un teorema di ASANO ([1] [1])), che generalizza un noto risultato di ORE ([6]; cfr. [2], p. 147).

La costruzione, qui adottata, dell'anello complementare $\mathfrak{A}$ contiene come caso particolare una costruzione diretta (senza cioè l'intervento intermediario dell'anello dei numeri interi) del corpo dei numeri razionali a partire dal semianello dei numeri naturali, che fornisce una (presumibilmente nuova) definizione di numero razionale come classe di equivalenza di terne ordinate di numeri naturali (n.i 9, 10).

(*) Pervenuta in Redazione il 12 maggio 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

Nel § 2 si considera un analogo problema di immersione per uno pseudoanello P contenente un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili (sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione), problema che conduce alla nozione di pseudoanello complementare (sinistro, in senso stretto) $\mathfrak{F}$ di P rispetto a Π.

Imponendo al sottinsieme Π di P un'ulteriore restrizione, si trova, per l'esistenza di $\mathfrak{F}$, una condizione necessaria e sufficiente analoga alla precedente (n.° 12).

§ 1

1. - Sia P un insieme (non vuoto) in cui siano definite due operazioni (univoche) binarie, addizione e moltiplicazione, che ad ogni coppia ordinata (a, b) con $a, b \in P$ facciano corrispondere una somma $a + b \in P$ ed un prodotto $ab = a \cdot b \in P$. Se queste due operazioni godono delle proprietà seguenti (qualunque siano $a, b, c \in P$):

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad a + b = b + a,$$
$$(ab)c = a(bc),$$
$$(a + b)c = ac + bc, \qquad c(a + b) = ca + cb,$$

(se cioè l'addizione è associativa e commutativa, e la moltiplicazione associativa e distributiva — a destra e a sinistra — rispetto all'addizione), diremo che P è uno *pseudoanello*. Questo si dirà poi *commutativo*, se la moltiplicazione è inoltre commutativa $(ab = ba)$.

Dunque uno pseudoanello è uno pseudogruppo rispetto alla moltiplicazione ed uno pseudogruppo commutativo rispetto all'addizione (denotandosi qui con *pseudogruppo* ogni insieme in cui sia definita una operazione binaria associativa — cfr. ad es. [4], p. 117 —).

Indicando con $f(a, b)$ il risultato dell'operazione sulla coppia ordinata (a, b) di elementi di uno pseudogruppo Q qualsiasi, ricorderemo (cfr. ad es. [3], p. 22) che per elemento identico s'intende un $e \in Q$ tale che $f(e, a) = f(a, e) = a$ per ogni $a \in Q$; questo e, se esiste, è unico. Ricorderemo inoltre che, se tale elemento identico esiste, per inverso di un $a \in Q$

s'intende un $a' \in Q$ tale che $f(a', a) = f(a, a') = e$; anche a', se esiste, è unico. Per gli eventuali elemento identico ed inverso rispetto ad una qualsiasi delle due operazioni di uno pseudoanello P, adotteremo le denominazioni e i simboli usuali (e cioè 0, $-a$ per l'addizione, 1, a^{-1} per la moltiplicazione).

Ricorderemo ancora (cfr. ad es. [2], p. 42), che un elemento a di uno pseudogruppo Q dicesi semplificabile (in Q) se ciascuna delle due eguaglianze $f(b, a) = f(b', a)$, $f(a, b) = f(a, b')$ implica $b = b'$, qualunque siano $b, b' \in Q$. Uno pseudogruppo i cui elementi siano tutti semplificabili verrà detto un *semigruppo*.

In uno pseudoanello P si potrà dunque parlare di elementi *semplificabili rispetto all'addizione* oppure *rispetto alla moltiplicazione*. Un elemento di P che sia semplificabile sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione si dirà *semplificabile* (in P).

Uno pseudoanello i cui elementi siano tutti semplificabili rispetto all'addizione si dirà un *semianello*. Rispetto all'addizione un semianello è dunque un semigruppo (commutativo).

Esistono semianelli privi di elementi semplificabili. Ad es., nell'anello delle matrici quadrate del 2° ordine sopra l'anello dei numeri interi, consideriamo l'insieme $\mathfrak{S}$ delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con a, b (interi) positivi. È evidente che la somma e il prodotto di due elementi di $\mathfrak{S}$ appartengono ad $\mathfrak{S}$, ed è pure chiaro (poichè $\mathfrak{S}$ è immerso in un anello) che ogni elemento di $\mathfrak{S}$ è semplificabile rispetto all'addizione. Dunque $\mathfrak{S}$ è un semianello. Ora, se c, d, d' son numeri naturali con $d \neq d'$, qualunque sia l'elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ di $\mathfrak{S}$, si ha $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c & d' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque nessun elemento di $\mathfrak{S}$ è semplificabile.

Per contro vi sono semianelli in cui tutti gli elementi sono semplificabili. Tale è ad es. il semianello dei numeri naturali.

Esistono infine semianelli i cui elementi semplicabili costituiscono un sottinsieme proprio e non vuoto. Tale è ad es. il semianello formato dai numeri naturali e dallo zero.

2. - Sia S un semianello contenente elementi semplificabili. Detto M^* l'insieme di questi, è chiaro che il prodotto di due elementi di M^* appartiene ad M^*, cioè, come diremo, che M^* è *moltiplicativamente chiuso* (in S).

Sia M un qualsiasi insieme, moltiplicativamente chiuso, costituito da elementi semplificabili di S ($M \subseteq M^*$).Un sopra-semianello $\mathfrak{A}$ di S si dirà un *anello complementare sinistro* (*a.c.s.*) *di* S *rispetto ad* M se esso soddisfa alle tre condizioni seguenti:

I) $\mathfrak{A}$ è un anello dotato di elemento unità 1;

II) Ogni elemento α di M possiede reciproco α^{-1} in $\mathfrak{A}$;

III) Ogni elemento x di $\mathfrak{A}$ è rappresentabile nella forma $x = \gamma^{-1}(a - b)$, con $\gamma \in M$, a, $b \in S$.

Se un tale sopra-semianello $\mathfrak{A}$ esiste, S si dirà *complementarizzabile a sinistra rispetto ad* M. Denoteremo con 0 lo zero di $\mathfrak{A}$. Si osservi che, se S è dotato di zero $\bar{0}$, si ha $0 = \bar{0}$ (infatti, se $a \in S$, si ha $0 = a - a = (\bar{0} + a) - a = \bar{0} + (a - a) = \bar{0} + 0 = \bar{0}$). Analogamente, se S è dotato di elemento unità $\bar{1}$, si ha $1 = \bar{1}$.

In particolare, se $M = M^*$, si parlerà semplicemente di un *anello complementare sinistro* (*a.c.s.*) *di* S. Se questo esiste, S si dirà *complementarizzabile a sinistra*.

Nei numeri successivi (3-8) dimostreremo il seguente

TEOREMA: *Affinchè un semianello* S *sia complementarizzabile a sinistra rispetto ad un suo sottinsieme* M, *moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in* S, *è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente:*

A) *Dati comunque* a, $b \in S$, $\gamma \in M$, *esistono* a_1, $b_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$ *tali che*

$$\gamma_1 a + b_1 \gamma = \gamma_1 b + a_1 \gamma .$$

Se esiste un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ *di* S *rispetto ad* M, $\mathfrak{A}$ *è univocamente determinato da* S *ed* M *a meno di isomorfismi.*

3. - La dimostrazione della necessità della condizione A) è immediata. Supponiamo infatti che esista un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M, e siano dati comunque a, $b \in S$, $\gamma \in M$. Considerato allora (v. I), II)) l'elemento $x = (a - b)\gamma^{-1}$ di $\mathfrak{A}$, per la III) esistono a_1, $b_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$ tali che $(a - b)\gamma^{-1} = \gamma_1^{-1}(a_1 - b_1)$, donde appunto $\gamma_1 a + b_1 \gamma =$ $= \gamma_1 b + a_1 \gamma$.

Premettiamo ora il seguente

Lemma: *Se è soddisfatta la condizione* A) *del n.° 2, le eguaglianze*

$$r\gamma = s\gamma + \alpha, \qquad r_1\gamma_1 = s_1\gamma_1 + \alpha, \tag{1}$$

$$ra + sb + r_1b_1 + s_1a_1 = rb + sa + r_1a_1 + s_1b_1, \tag{1'}$$

$$r'\gamma = s'\gamma + \alpha', \qquad r'_1\gamma_1 = s'_1\gamma_1 + \alpha', \tag{2}$$

dove le lettere latine indicano elementi di S *e quelle greche di* M, *implicano*

$$r'a + s'b + r'_1b_1 + s'_1a_1 = r'b + s'a + r'_1a_1 + s'_1b_1. \tag{2'}$$

Infatti, considerati i tre elementi $2\alpha'(= \alpha' + \alpha')$, α', α, esistono, per la A), g, $h \in S$, $\delta \in M$ tali che $\delta \cdot 2\alpha' + h\alpha = \delta\alpha' + g\alpha$, cioè, semplicando per $\delta\alpha'$ (osservato che $\delta \cdot 2\alpha' = 2\delta\alpha'$), tali che

$$g\alpha = h\alpha + \delta\alpha'. \tag{3}$$

Moltiplicando a sinistra (ambo i membri de) la $(1)_1$ dapprima per g e poi per h, e la $(2)_1$ per δ, si ottengono le tre eguaglianze $gs\gamma + g\alpha = gr\gamma$, $hr\gamma = hs\gamma + h\alpha$, $\delta r'\gamma = \delta s'\gamma + \delta\alpha'$ che, sommate (membro a membro) tenendo conto della (3), danno $(gs + hr + \delta r')\gamma = (gr + hs + \delta s')\gamma$, donde, semplificando per γ,

$$gs + hr + \delta r' = gr + hs + \delta s'. \tag{4}$$

Ripetendo le stesse operazioni sulle $(1)_2$, $(2)_2$, (3) e semplificando adesso per γ_1, risulta

$$gs_1 + hr_1 + \delta r'_1 = gr_1 + hs_1 + \delta s'_1. \tag{4'}$$

Dalla (4) discende

$$(gr + hs + \delta s')a + (gs + hr + \delta r')b = \\ = (gs + hr + \delta r')a + (gr + hs + \delta s')b, \tag{5}$$

e dalla (4')

$$(5')\qquad (gs_1 + hr_1 + \delta r'_1)a_1 + (gr_1 + hs_1 + \delta s'_1)b_1 = \\ = (gr_1 + hs_1 + \delta s'_1)a_1 + (gs_1 + hr_1 + \delta r'_1)b_1 .$$

Inoltre dalla (1') si trae

$$(5'')\qquad g(rb + sa + r_1a_1 + s_1b_1) + h(ra + sb + r_1b_1 + s_1a_1) = \\ = g(ra + sb + r_1b_1 + s_1a_1) + h(rb + sa + r_1a_1 + s_1b_1).$$

Sommando adesso le tre eguaglianze (5), (5'), (5'') ed eseguendo quindi tutte le possibili semplificazioni rispetto all'addizione, si trova

$$\delta(r'b + s'a + r'_1a_1 + s'_1b_1) = \delta(r'a + s'b + r'_1b_1 + s'_1a_1),$$

donde, semplificando per δ, risulta appunto la (2').

4. - Nell'ipotesi che la condizione A) sia soddisfatta, ci proponiamo ora di costruire un sopra-semianello $\mathcal{A}$ del dato S, che soddisfi alle I), II), III) del n.° 2. Premettiamo un secondo

LEMMA: *Se è soddisfatta la condizione* A) *del n.°* 2, *dati* n *qualsiasi elementi* $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in M$, *esistono* $2n+1$ *elementi* $r_1, s_1, \dots, r_n, s_n \in S$, $\alpha \in M$ *tali che*

$$r_1\gamma_1 = s_1\gamma_1 + \alpha, \; \dots, \; r_n\gamma_n = s_n\gamma_n + \alpha.$$

Infatti, procedendo per induzione completa su n, il lemma è intanto vero per $n=1$ (basta assumere $r_1 = 2\rho$, $s_1 = \rho$ $\alpha = \rho\gamma_1$, dove ρ è un qualsiasi elemento di M che, si ricordi, è moltiplicativamente chiuso). Supposto allora che esistano r'_i, $s'_i \in S$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $\alpha' \in M$ tali che

$$(6)\qquad r'_i\gamma_i = s'_i\gamma_i + \alpha' \qquad (i = 1, \dots, n-1),$$

consideriamo i tre elementi $2\alpha'$, α', γ_n. Per la A), esistono r_n, $s_n \in S$, $\lambda \in M$ tali che $\lambda \cdot 2\alpha' + s_n\gamma_n = \lambda\alpha' + r_n\gamma_n$, cioè che

$$(6')\qquad r_n\gamma_n = s_n\gamma_n + \alpha$$

avendo posto $\alpha = \lambda\alpha'$. Posto ancora $r_i = \lambda r'_i$, $s_i = \lambda s'_i$ $(i = 1,$

..., $n-1$), le (6), moltiplicate a sinistra per λ, e la (6') provano l'asserto.

Consideriamo adesso l'insieme $\mathfrak{T}$ delle terne ordinate di elementi (γ, a, b), con $\gamma \in M$, $a, b \in S$. Porremo:

$$(7) \qquad (\gamma, a, b) \backsim (\gamma_1, a_1, b_1),$$

se esistono cinque elementi $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ per cui valgono le (1), (1').

La relazione (7) è riflessiva (v. il lemma di questo n.° per $n=1$) ed evidentemente simmetrica. Essa è inoltre transitiva. Infatti, considerati $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in M$, per il lemma di questo n.°, esistono sette elementi $r', s', r'_1, s'_1, r'_2, s'_2 \in S$, $\alpha' \in M$ tali che

$$(8) \qquad r'\gamma = s'\gamma + \alpha', \qquad r'_1\gamma_1 = s'_1\gamma_1 + \alpha', \qquad r'_2\gamma_2 = s'_2\gamma_2 + \alpha'.$$

Se allora $(\gamma, a, b) \backsim (\gamma_1, a_1, b_1)$, dalle prime due delle (8) discende, per il lemma del n.° 3, la (2'); analogamente, $(\gamma_1, a_1, b_1) \backsim (\gamma_2, a_2, b_2)$ e le ultime due delle (8) implicano

$$(9) \qquad r'_1a_1 + s'_1b_1 + r'_2b_2 + s'_2a_2 = r'_1b_1 + s'_1a_1 + r'_2a_2 + s'_2b_2\,.$$

Sommando le (2'), (9) e semplificando, si ha allora $r'a + s'b + r'_2b_2 + s'_2a_2 = r'b + s'a + r'_2a_2 + s'_2b_2$, e questa eguaglianza, assieme alle $(8)_1$, $(8)_3$, prova appunto che $(\gamma, a, b) \backsim (\gamma_2, a_2, b_2)$.

La relazione (7), sopra definita in $\mathfrak{T}$, è dunque una relazione di equivalenza. La classe delle terne equivalenti ad una qualsiasi terna (γ, a, b) verrà denotata con $[(\gamma, a, b)]$ e l'insieme avente come elementi tutte queste classi di equivalenza con $\mathfrak{A}'$:

$$[(\gamma, a, b)] \in \mathfrak{A}'.$$

Consideriamo in particolare in $\mathfrak{T}$ le due terne (γ, a, b), (γ_1, a_1, b_1), con $\gamma_1 = \mu\gamma$, $a_1 = \mu a$, $b_1 = \mu b$, $\mu \in M$. Dall'eguaglianza $2\lambda\mu\gamma = \lambda\mu\gamma + \lambda\mu\gamma$, dove λ è un qualsiasi elemento di M, posto $r = 2\lambda\mu$, $s = \lambda\mu$, $r_1 = 2\lambda$, $s_1 = \lambda$, $\alpha = \lambda\mu\gamma$, discendono le (1); ma anche la (1') è soddisfatta. Quindi in $\mathfrak{T}$ si ha

$$(10) \qquad (\mu\gamma, \mu a, \mu b) \backsim (\gamma, a, b),$$

qualunque sia $\mu \in M$. Il ragionamento fatto mostra pure che, più in generale, si ha

$$(10') \qquad (m\gamma,\ ma,\ mb) \backsim (\gamma,\ a,\ b)$$

per ogni $m \in S$ tale che $m\gamma \in M$.

In base alla (7), si ha dunque in $\mathfrak{A}'$ la seguente *definizione di eguaglianza*:

$$(11) \qquad [(\gamma,\ a,\ b)] = [(\gamma_1,\ a_1,\ b_1)]$$

se e soltanto se esistono cinque elementi $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ per cui valgono le (1), (1').

Si osservi che, *se in particolare* $\gamma = \gamma_1$, *la* (11) *è vera se e soltanto se* $a + b_1 = b + a_1$. Infatti, se $a + b_1 = b + a_1$, per il lemma del n.° 4 ($n = 1$), esistono $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$, con $r = r_1$, $s = s_1$, per cui valgono le (1); ma vale anche la (1'), che si ottiene sommando le due eguaglianze $r(a + b_1) = r(b + a_1)$, $s(b + a_1) = s(a + b_1)$. Viceversa, se la (11) è vera e ρ è un qualsiasi elemento di M, dalle (2), con $r' = r'_1 = 2\rho$, $s' = s'_1 = \rho$, $\alpha' = \rho\gamma$, discende, per il lemma del n.° 3, la (2'), donde appunto, semplificando, $a + b_1 = b + a_1$. Da questa osservazione risulta immediatamente che

$$(12) \qquad [(\gamma,\ a,\ b)] = [(\gamma,\ a + s,\ b + s)]$$

qualunque sia $s \in S$.

Si osservi ancora che, *se in particolare* $a = b$, *la* (11) *è vera se e soltanto se* $a_1 = b_1$. Infatti la (1'), con $a = b$, $a_1 = b_1$, è soddisfatta qualunque siano $r, s, r_1, s_1 \in S$. Viceversa, se la (11) è vera, considerati i tre elementi $2\gamma_1, \gamma_1, \gamma$, esistono, per la A), $r', s' \in S$, $\rho \in M$ tali che $\rho \cdot 2\gamma_1 + s'\gamma = \rho\gamma_1 + r'\gamma$, ossia tali che valga la $(2)_1$ con $\alpha' = \rho\gamma_1$. D'altra parte vale pure la $(2)_2$ con $r'_1 = 2\rho$, $s'_1 = \rho$, e quindi, per il lemma del n.° 3, la (2'). Da questa, poichè $a = b$, discende $2\rho \cdot b_1 + \rho a_1 = 2\rho \cdot a_1 + \rho b_1$, donde appunto, semplificando, $a_1 = b_1$.

Osserveremo infine che, *se* $r, s \in S$, $\alpha \in M$ *sono elementi tali che* $r\gamma = s\gamma + \alpha$, *si ha*

$$(13) \qquad [(\gamma,\ a,\ b)] = [(\alpha,\ ra + sb,\ rb + sa)].$$

Se μ è un qualsiasi elemento di M, ciò discende infatti dalle tre evidenti eguaglianze: $\mu r \cdot \gamma = \mu s \cdot \gamma + \mu \alpha$, $2\mu \cdot \alpha = \mu \cdot \alpha + \mu \alpha$, $\mu r \cdot a + \mu s \cdot b + 2\mu(rb + sa) + \mu(ra + sb) = \mu r \cdot b + \mu s \cdot a + 2\mu(ra + sb) + \mu(rb + sa)$.

5. - Diamo in $\mathcal{A}'$ la seguente *definizione di addizione*:

$$[(\gamma,\ a,\ b)] + [(\gamma_1,\ a_1,\ b_1)] = \\ = [(\alpha,\ ra + sb + r_1 a_1 + s_1 b_1,\ rb + sa + r_1 b_1 + s_1 a_1)], \tag{14}$$

dove $\alpha \in M$, r, s, r_1, $s_1 \in S$ sono cinque elementi per cui valgono le (1).

La somma a 2° membro della (14) non dipende dalla scelta degli elementi r, s, r_1, $s_1 \in S$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (1) (l'esistenza di questi elementi è assicurata dal lemma del n.° 4). Se infatti r', s', r'_1, $s'_1 \in S$, $\alpha' \in M$ son cinque elementi per cui valgono le (2), considerati i due elementi α, α', esistono per il lemma del n.° 4, p, q, p', $q' \in S$, $\delta \in M$ tali che

$$p\alpha = q\alpha + \delta, \qquad p'\alpha' = q'\alpha' + \delta. \tag{15}$$

Moltiplicando la $(1)_1$ a sinistra dapprima per p, poi per q, e tenendo conto della $(15)_1$, si trova

$$pr\gamma = ps\gamma + q\alpha + \delta, \qquad qs\gamma + q\alpha = qr\gamma, \tag{16}$$

e analogamente dalla $(2)_1$, tenendo conto della $(15)_2$ si ottiene

$$p's'\gamma + q'\alpha' + \delta = p'r'\gamma, \qquad q'r'\gamma = q's'\gamma + q'\alpha'. \tag{16'}$$

Sommando le (16), (16') e semplificando, risulta

$$pr + qs + p's' + q'r' = ps + qr + p'r' + q's'. \tag{17}$$

Ripetendo ora le stesse operazioni sulle $(1)_2$, $(2)_2$, si trova analogamente

$$pr_1 + qs_1 + p's'_1 + q'r'_1 = ps_1 + qr_1 + p'r'_1 + q's'_1. \tag{17'}$$

Moltiplichiamo adesso a destra la (17) dapprima per a e poi per b, scambiamo fra loro i due membri della seconda eguaglianza così ottenuta, quindi sommiamo con la prima. Sommiamo l'eguaglianza ricavata in tal modo con quella che si ricava analogamente moltiplicando a destra la (17') dapprima per a_1 e poi per b_1 e sommando quindi le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda; posto

$$h = ra + sb + r_1a_1 + s_1b_1, \quad k = rb + sa + r_1b_1 + s_1a_1,$$
$$h' = r'a + s'b + r'_1a_1 + s'_1b_1, \quad k' = r'b + s'a + r'_1b_1 + s'_1a_1,$$

si trova

$$ph + qk + p'k' + q'h' = pk + qh + p'h' + q'k'.$$

Questa eguaglianza e le (15) dimostrano appunto che $[(\alpha, h, k)] = [(\alpha', h', k')]$.

La somma a 2° membro della (14) non dipende neppure dalla scelta dei rappresentanti delle due classi a 1° membro. Infatti, se $[(\gamma, a, b)] = [(\gamma', a', b')]$, cioè se esistono cinque elementi $c, d, c', d' \in S$, $\beta \in M$ tali che

$$(18) \qquad c\gamma = d\gamma + \beta, \quad c'\gamma' = d'\gamma' + \beta,$$
$$(18') \qquad ca + db + c'b' + d'a' = cb + da + c'a' + d'b',$$

e se inoltre $[(\gamma_1, a_1, b_1)] = [(\gamma'_1, a'_1, b'_1)]$, cioè se esistono $c_1, d_1, c'_1, d'_1 \in S$, $\beta_1 \in M$ per cui si ha

$$(19) \qquad c_1\gamma_1 = d_1\gamma_1 + \beta_1, \quad c'_1\gamma'_1 = d'_1\gamma'_1 + \beta_1,$$
$$(19') \qquad c_1a_1 + d_1b_1 + c'_1b'_1 + d'_1a'_1 = c_1b_1 + d_1a_1 + c'_1a'_1 + d'_1b'_1,$$

allora, in corrispondenza ai due elementi β, β_1, esistono, per il lemma del n.° 4, $f, g, f_1, g_1 \in S$, $\lambda \in M$ tali che

$$(20) \qquad f\beta = g\beta + \lambda, \quad f_1\beta_1 = g_1\beta_1 + \lambda.$$

Dalla $(18)_1$, tenendo conto della $(20)_1$, si ottiene $fc\gamma = fd\gamma + f\beta = fd\gamma + g\beta + \lambda$, $gd\gamma + g\beta = gc\gamma$, donde, sommando e semplificando,

$$(21) \qquad (fc + gd)\gamma = (fd + gc)\gamma + \lambda,$$

e analogamente dalla $(19)_1$, tenendo conto della $(20)_2$, risulta

$$(21) \qquad (f_1c_1 + g_1d_1)\gamma_1 = (f_1d_1 + g_1c_1)\gamma_1 + \lambda.$$

In modo analogo dalle $(18)_2$, $(19)_2$, tenendo conto risp. delle $(20)_1$, $(20)_2$, si ottiene

$$(22) \qquad \begin{aligned} (fc' + gd')\gamma' &= (fd' + gc')\gamma' + \lambda, \\ (f_1c_1' + g_1d_1')\gamma_1' &= (f_1d_1' + g_1c_1')\gamma_1' + \lambda. \end{aligned}$$

Posto allora

$$\begin{aligned} a_0 &= (\ c + gd)a + (fd + gc)b + (f_1c_1 + g_1d_1)a_1 + (f_1d_1 + g_1c_1)b_1, \\ b_0 &= (fc + gd)b + (fd + gc)a + (f_1c_1 + g_1d_1)b_1 + (f_1d_1 + g_1c_1)a_1, \\ a_0' &= (fc' + gd')a' + (fd' + gc')b' + (f_1c_1' + g_1d_1')a_1' + (f_1d_1' + g_1c_1')b_1', \\ b_0' &= (fc' + gd')b' + (fd' + gc')a' + (f_1c_1' + g_1d_1')b_1' + (f_1d_1' + g_1c_1')a_1', \end{aligned}$$

per le (21), si ha

$$[(\gamma,\ a,\ b)] + [(\gamma_1,\ a_1,\ b_1)] = [(\lambda,\ a_0,\ b_0,)]$$

e, per le (22),

$$[(\gamma',\ a',\ b')] + [(\gamma_1',\ a_1',\ b_1')] = [(\lambda,\ a_0',\ b_0')].$$

Moltiplichiamo ora a sinistra la (18′) dapprima per f e poi per g, scambiamo fra loro i due membri della seconda eguaglianza così ottenuta, quindi sommiamo con la prima. Sommiamo l'eguaglianza ricavata in tal modo con quella che si ricava analogamente moltiplicando a sinistra la (19′) dapprima per f_1 e poi per g_1 e sommando quindi le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda: si trova

$$a_0 + b_0' = b_0 + a_0'.$$

Ma allora, per una osservazione fatta al n.° 4, $[(\lambda,\ a_0,\ b_0)] = [(\lambda,\ a_0',\ b_0')]$, come appunto si era affermato.

Osserveremo che, se in particolare $\gamma = \gamma_1$, si ha

$$(23) \qquad [(\gamma,\ a,\ b)] + [(\gamma,\ a_1,\ b_1)] = [(\gamma,\ a + a_1,\ b + b_1)].$$

Infatti, se $\rho \in M$, le (1) son soddisfatte assumendo $r = r_1 = 2\rho$, $s = s_1 = \rho$, $\alpha = \rho\gamma$; quindi $[(\gamma, a, b)] + [(\gamma,\ a_1,\ b_1)] = [(\alpha, a_2,\ b_2)]$ con $a_2 = \rho(2a + 2a_1 + b + b_1)$, $b_2 = \rho(a + a_1 + 2b + 2b_1)$.

Ma, per le (10), (12),

$$[(\alpha, a_2, b_2)] = [(\gamma, 2a + 2a_1 + b + b_1, a + a_1 + 2b + 2b_1)] =$$
$$= [(\gamma, a + a_1, b + b_1)].$$

Per l'addizione definita mediante la (14) vale evidentemente la proprietà commutativa. Ma vale pure la proprietà associativa. Dati infatti i tre addendi $[(\gamma, a, b)]$, $[(\gamma_1, a_1, b_1)]$, $[(\gamma_2, a_2, b_2)]$, per il lemma del n.° 4 esistono $r, s, r_1, s_1, r_2, s_2 \in S$, $\alpha \in M$ tali che

$$(24) \qquad r\gamma = s\gamma + \alpha, \qquad r_1\gamma_1 = s_1\gamma_1 + \alpha, \qquad r_2\gamma_2 = s_2\gamma_2 + \alpha.$$

Scritto ciascun addendo nella forma (13) in relazione alla rispettiva (24), l'associatività dell'addizione, in base alla (23), è senz'altro evidente.

L'elemento $0' = [(\gamma, a, a)]$ di $\mathfrak{A}'$ (che, in base ad una osservazione del n. 4, non dipende dai particolari elementi $\gamma \in M$, $a \in S$) ne è lo *zero* (v. le (23), (12)). Inoltre ogni elemento $[(\gamma, a, b)]$ di $\mathfrak{A}'$ è dotato di *opposto*, che è precisamente $[(\gamma, b, a)]$. Dunque $\mathfrak{A}'$, rispetto all'addizione sopra definita, è un gruppo commutativo.

6. - Diamo ora in $\mathfrak{A}'$ la seguente *definizione di moltiplicazione*:

$$(25) \qquad [(\gamma, a, b)] \cdot [(\gamma_1, a_1, b_1)] = [(\nu\gamma, pa_1 + qb_1, pb_1 + qa_1)],$$

dove $\nu \in M$, $p, q \in S$ sono tre elementi tali che

$$(25') \qquad \nu a + q\gamma_1 = \nu b + p\gamma_1 .$$

Il prodotto a 2° membro della (25) non dipendente dalla scelta degli elementi $p, q \in S$, $\nu \in M$ soddisfacenti alla (25') (i quali esistono certamente in base alla condizione A)). Se infatti si ha

$$(26) \qquad \nu' a + q'\gamma_1 = \nu' b + p'\gamma_1$$

con $p', q' \in S$, $\nu' \in M$, considerati i due elementi ν, ν', esistono, per il lemma del n.°4, $r, s, r', s' \in S$, $\alpha' \in M$ tali che

$$(27) \qquad r\nu = s\nu + \alpha', \qquad r'\nu' = s'\nu' + \alpha',$$

ossia, posto $\alpha = \alpha'\gamma$, tali che

$$(28) \qquad r \cdot \nu\gamma = s \cdot \nu\gamma + \alpha, \qquad r' \cdot \nu'\gamma = s' \cdot \nu'\gamma + \alpha.$$

Dalle (25') discende

$$(29) \qquad r(\nu a + q\gamma_1) + s(\nu b + p\gamma_1) = r(\nu b + p\gamma_1) + s(\nu a + q\gamma_1),$$

e dalla (26):

$$(29') \qquad r'(\nu' b + p'\gamma_1) + s'(\nu' a + q'\gamma_1) = r'(\nu' a + q'\gamma_1) + s'(\nu' b + p'\gamma_1 .$$

Dalla $(27)_1$ si trae: $r\nu a = s\nu a + \alpha' a$, $s\nu b + \alpha' b = r\nu\gamma$ e dalla $(27)_2$: $s'\nu' a + \alpha' a = r'\nu' a$, $r'\nu' b = s'\nu' b + \alpha' b$. Sommando queste quattro eguaglianze, si trova

$$(30) \qquad (r\nu + s'\nu')a + (s\nu + r'\nu')b = (s\nu + r'\nu')a + (r\nu + s'\nu')b.$$

Sommando le (29), (29'), e quindi semplificando dapprima in base alla (30) e poi per γ_1, risulta

$$(31) \qquad rq + sp + r'p' + s'q' = rp + sq + r'q' + s'p'.$$

Moltiplichiamo ora la (31) a destra dapprima per a_1 e poi per b_1, quindi sommiamo le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda; posto

$$l = pa_1 + qb_1, \quad m = pb_1 + qa_1, \quad l' = p'a_1 + q'b_1, \quad m' = p'b_1 + q'a_1,$$

si trova

$$rl + sm + r'm' + s'l' = rm + sl + r'l' + s'm'.$$

Dunque (v. le (28)): $[(\nu\gamma, l, m)] = [(\nu'\gamma, l', m')]$, come asserito.

Il prodotto a 2° membro della (25) non dipende neppure dalla scelta dei rappresentanti delle due classi a 1° membro. Infatti, posto

$$(32) \qquad \begin{aligned} \xi = [(\gamma, a, b)], \quad & \xi_1 = [(\gamma_1, a_1, b_1)], \\ & \xi' = [(\gamma', a', b')], \quad \xi_1' = [(\gamma_1, a_1', b_1')], \end{aligned}$$

supponiamo che sia

$$(33) \qquad \xi = \xi', \quad \xi_1 = \xi_1'.$$

Considerati i due elementi γ_1, γ_1', esistono, per il lemma del n.° 4, $h, k, h', k' \in S$, $\beta \in M$ tali che

$$(34) \qquad h\gamma_1 = k\gamma_1 + \beta, \qquad h'\gamma_1 = k'\gamma_1' + \beta.$$

D'altra parte, in corrispondenza ai tre elementi a, b, β, esistono, per la condizione A), c, $d \in S$, $\delta \in M$ tali che

$$(35) \qquad \delta a + d\beta = \delta b + c\beta.$$

Dalla $(34)_1$ si trae $ck\gamma_1 + c\beta = ch\gamma_1$, $dh\gamma_1 = dk\gamma_1 + d\beta$, da cui, sommando, $(ck + dh)\gamma_1 + c\beta = (ch + dk)\gamma_1 + d\beta$. Sommando questa con la (35), si trova $\delta a + (ck + dh)\gamma_1 = \delta b + (ch + dk)\gamma_1$, donde

$$(36) \qquad \xi\xi_1 = [(\delta\gamma, p_0a_1 + q_0b_1, p_0b_1 + q_0a_1)],$$

avendo posto

$$p_0 = ch + dk, \qquad q_0 = ck + dh.$$

Per il lemma del n.° 3, dalle $(33)_2$, (34) discende

$$(37) \qquad ha_1 + kb_1 + h'b_1' + k'a_1' = hb_1 + ka_1 + h'a_1' + k'b_1'.$$

Moltiplichiamo la (37) a sinistra dapprima per c e poi per d, quindi sommiamo le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda; posto

$$p_0' = ch' + dk', \qquad q_0' = ck' + dh',$$

si trova $(p_0a_1 + q_0b_1) + (p_0'b_1' + q_0'a_1') = (p_0b_1 + q_0a_1) + (p_0'a_1' + q_0'b_1')$, ossia, per un'osservazione del n.° 4,

$$(38) \qquad [(\delta\gamma, p_0a_1 + q_0b_1, p_0b_1 + q_0a_1)] = [(\delta\gamma, p_0'a_1' + q_0'b_1', p_0'b_1' + q_0'a_1')].$$

Operando sulle $(34)_2$, (35) analogamente a quanto fatto sopra sulle $(34)_1$, (35) si trova

$$(39') \qquad \delta a + q_0'\gamma_1' = \delta b + p_0'\gamma_1',$$

da cui

$$(39) \qquad [(\delta\gamma, p_0'a_1' + q_0'b_1', p_0'b_1' + q_0'a_1')] = \xi\xi_1'.$$

Dalle (36), (38), (39) risulta quindi

$$(40) \qquad \xi\xi_1 = \xi\xi_1' .$$

Considerati adesso tre elementi p_1, $q_1 \in S$, $\nu_1 \in M$ tali che

$$(41') \qquad \nu_1 a' + q_1\gamma_1' = \nu_1 b' + p_1\gamma_1' ,$$

si ha

$$(41) \qquad \xi'\xi_1' = [(\nu_1\gamma',\ p_1 a_1' + q_1 b_1',\ p_1 b_1' + q_1 a_1')].$$

Per il lemma del n.° 4, in corrispondenza ai due elementi $\delta\gamma$, $\nu_1\gamma'$, esistono f, g, f', $g' \in S$, $\lambda \in M$ tali che

$$(42) \qquad f\cdot\delta\gamma = g\cdot\delta\gamma + \lambda, \qquad f'\cdot\nu_1\gamma' = g'\cdot\nu_1\gamma' + \lambda.$$

Dalle $(33)_1$, (42), per il lemma del n.° 3, discende

$$(43) \qquad f\delta a + g\delta b + f'\nu_1 b' + g'\nu_1 a' = f\delta b + g\delta a + f'\nu_1 a' + g'\nu_1 b'.$$

Dalla (39') si trae

$$(44) \qquad f(\delta b + p_0'\gamma_1') + g(\delta a + q_0'\gamma_1') = f(\delta a + q_0'\gamma_1') + g(\delta b + p_0'\gamma_1'),$$

e dalla (41'):

$$(44') \qquad f'(\nu_1 a' + q_1\gamma_1') + g'(\nu_1 b' + p_1\gamma_1') = f'(\nu_1 b' + p_1\gamma_1') + g'(\nu_1 a' + q_1\gamma_1'),$$

Sommando le (44), (44'), e quindi semplificando dapprima in base alla (43) e poi per γ_1', si trova

$$(45) \qquad fp_0' + gq_0' + f'q_1 + g'p_1 = fq_0' + gp_0' + f'p_1 + g'q_1 .$$

Moltiplichiamo ora la (45) a destra dapprima per a_1' e poi per b', quindi sommiamo le due eguaglianze così ottenute dopo aver scambiato i due membri della seconda; posto

$$l_0 = p_0'a_1' + q_0'b_1' , \qquad m_0 = p_0'b_1' + q_0'a_1' ,$$
$$l_1 = p_1 a_1' + q_1 b_1' , \qquad m_1 = p_1 b_1' + q_1 a_1' ,$$

si trova

$$fl_0 + gm_0 + f'm_1 + g'l_1 = fm_0 + gl_0 + f'l_1 + g'm_1 ,$$

donde, per le (42), $[(\delta\gamma,\ l_0,\ m_0)] = [(\nu_1\gamma',\ l_1,\ m_1)]$, ossia

(v. le (39), (41)):

(46) $$\xi\xi_1' = \xi'\xi_1'.$$

Dal confronto delle (40), (46) risulta $\xi\xi_1 = \xi'\xi_1'$, cioè quanto si era affermato.

La moltiplicazione definita mediante la (25) è associativa. Infatti, posto ancora (cfr. le (32))

(47) $$\xi_2 = [(\gamma_2, a_2, b_2)],$$

se p_2, $q_2 \in S$, $\nu_2 \in M$ son tali che

(48) $$\nu_2 a_1 + q_2\gamma_2 = \nu_2 b_1 + p_2\gamma_2,$$

ne segue $\xi_1\xi_2 = [(\nu_2\gamma_1, a^*, b^*)]$, dove

$$a^* = p_2a_2 + q_2b_2, \qquad b^* = p_2b_2 + q_2a_2.$$

Se inoltre si ha

(49') $$\nu^*a + q^*\cdot\nu_2\gamma_1 = \nu^*b + p^*\cdot\nu_2\gamma_1,$$

con p^*, $q^* \in S$, $\nu^* \in M$, allora

(49) $$\xi(\xi_1\xi_2) = [(\nu^*\gamma, p^*a^* + q^*b^*, p^*b^* + q^*a^*)].$$

Ma poichè, per la (10), $\xi_1 = [(\nu_2\gamma_1, \nu_2a_1, \nu_2b_1)]$, dalla (49') segue pure $\xi\xi_1 = [(\nu^*\gamma, \bar{a}, \bar{b})]$, con

$$\bar{a} = p^*\nu_2a_1 + q^*\nu_2b_1, \qquad \bar{b} = p^*\nu_2b_1 + q^*\nu_2a_1.$$

Se μ è un qualsiasi elemento di M, dalla (48) discende

$$\mu p^*(\nu_2a_1 + q_2\gamma_2) + \mu q^*(\nu_2b_1 + p_2\gamma_2) = \mu p^*(\nu_2b_1 + p_2\gamma_2) + \mu q^*(\nu_2a_1 + q_2\gamma_2),$$

ossia

(50) $$\mu\bar{a} + \mu\bar{q}\cdot\gamma_2 = \mu\bar{b} + \mu\bar{p}\cdot\gamma_2.$$

avendo posto

$$\bar{p} = p^*p_2 + q^*q_2, \qquad \bar{q} = q^*p_2 + p^*q_2.$$

Dalla (50), tenuto conto della (10), segue,

$$(\xi\xi_1)\xi_2 = [(\nu^*\gamma, \bar{p}a_2 + \bar{q}b_2, \bar{p}b_2 + \bar{q}a_2)],$$

che, confrontata con la (49), in base alle posizioni fatte, porge appunto $\xi(\xi_1\xi_2) = (\xi\xi_1)\xi_2$. Dunque $\mathfrak{A}'$, rispetto alla moltiplicazione, è uno pseudogruppo (n.° 1).

Osserviamo che, *se in particolare* $a = \gamma + b$, *la* (11) *è vera se e soltanto se* $a_1 = \gamma_1 + b_1$. Infatti la (1′), con $a = \gamma + b$, $a_1 = \gamma_1 + b_1$, è soddisfatta qualunque siano r, s, r_1, $s_1 \in S$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (1). Viceversa, se la (11) è vera, esistendo (cfr. il penult. capov. del n.° 4) r', $s' \in S$, $\rho \in M$ per cui valgono le (2) con $\alpha' = \rho\gamma_1$, $r'_1 = 2\rho$ $s'_1 = \rho$, per il lemma del n.° 3 vale pure la (2′). Da questa, poichè $a = \gamma + b$, posto (per la $(2)_1$) $r'\gamma = s'\gamma + \rho\gamma_1$, segue appunto (semplificando) $a_1 = \gamma_1 + b_1$.

L'elemento $1' = [(\gamma,\ \gamma + b,\ b)]$ di $\mathfrak{A}'$ (che dunque non dipende dai particolari elementi $\gamma \in M$, $b \in S$) ne è l'*elemento unità*. Infatti, ricordando il terzult. capov. del n.° 4 e la (10), se $\nu a + q\gamma = \nu b + p\gamma$, si ha (v. la $(32)_1$): $\xi 1' = [(\nu\gamma,\ p\gamma,\ q\gamma)] = [(\nu\gamma,\ \nu a,\ \nu b)] = \xi$; se poi $\nu'(\gamma + b) + q'\gamma = \nu' b + p'\gamma$, cioè se $\nu' + q' = p'$, si ha pure $1'\xi = [(\nu'\gamma,\ p'a + q'b,\ p'b + q'a)] = [(\nu'\gamma,\ \nu'a,\ \nu'b)] = \xi$.

Osserviamo ancora che, *se in particolare* $a = \gamma s + b$ $(s \in S)$, *la* (11) *è vera se e soltanto se* $a_1 = \gamma_1 s + b_1$. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella dell'osservazione precedente. Ne segue che l'elemento $[(\gamma,\ \gamma s + b,\ b)]$ di $\mathfrak{A}'$ non dipende dai particolari elementi $\gamma \in M$, $b \in S$; porremo

$$[(\gamma,\ \gamma s + b,\ b)] \in S' \qquad (s \in S). \tag{51}$$

È immediato, in base all'ultima osservazione ed al terzult. capov. del n.° 4, che la corrispondenza

$$s \rightarrow [(\gamma,\ \gamma s + b,\ b)] \tag{52}$$

fra S ed S' è biunivoca. Essa subordina una corrispondenza biunivoca fra M ed M', avendo posto

$$[(\gamma,\ \gamma\mu + b,\ b)] \in M' \qquad (\mu \in M). \tag{51′}$$

Ogni elemento $\zeta = [(\gamma,\ \gamma\mu + b,\ b)]$ di questo sottinsieme M' di $\mathfrak{A}'$ è dotato di *reciproco*, che è precisamente $\zeta' = [(\gamma\mu,\ \gamma + b,\ b)]$. Infatti, osservato che la (25′), relativa sia al prodotto $\zeta\zeta'$ che $\zeta'\zeta$, è soddisfatta assumendo $p = q + \nu$, con $q \in S$,

$\nu \in M$ arbitrari, ricordando la (12) si trova $\zeta\zeta' = [(\nu\gamma,\ \nu\gamma + \nu b,\ \nu b)] = 1' = [(\nu\gamma\mu,\ \nu\gamma\mu + qb,\ qb)] = \zeta'\zeta$; dunque $\zeta' = \zeta^{-1}$.

7. - In $\mathfrak{A}'$ valgono le due proprietà distributive

$$\xi(\xi_1 + \xi_2) = \xi\xi_1 + \xi\xi_2, \qquad (\xi_1 + \xi_2)\xi = \xi_1\xi + \xi_2\xi.$$

I simboli ξ, ξ_1, ξ_2 avendo il significato del n.° preced. (v. le (32), (47)), supporremo infatti, com'è lecito (cfr. il penult. capov. del n.° 5), che sia

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2.$$

Se allora $p,\ q \in S$, $\nu \in M$ son tali che $\nu a + q\gamma = \nu b + p\gamma$, ricordando la (23) si ha appunto

$$\xi(\xi_1 + \xi_2) = [(\nu\gamma,\ p(a_1 + a_2) + q(b_1 + b_2),\ p(b_1 + b_2) + q(a_1 + a_2))] = \\ = \sum_{i=1}^{2} [(\nu\gamma,\ pa_i + qb_i,\ pb_i + qa_i)] = \xi\xi_1 + \xi\xi_2.$$

D'altra parte, se $p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2 \in S$, $\nu_1,\ \nu_2 \in M$ son tali che

(53) $$\nu_i a_i + q_i\gamma = \nu_i b_i + p_i\gamma \qquad (i = 1,\ 2),$$

in corrispondenza ai due elementi ν_1, ν_2 esistono, per il lemma del n.° 4, $c_1,\ d_1,\ c_2,\ d_2 \in S$, $\nu' \in M$ tali che

(54) $$c_i\nu_i = d_i\nu_i + \nu' \qquad (i = 1,\ 2).$$

Dalle (53) si trae $c_i(\nu_i a_i + q_i\gamma) + d_i(\nu_i b_i + p_i\gamma) = c_i(\nu_i b_i + p_i\gamma) + d_i(\nu_i a_i + q_i\gamma)$, donde, tenendo conto delle (54),

(55) $$\nu' a_i + q_i'\gamma = \nu' b_i + p_i'\gamma \qquad (i = 1,\ 2),$$

avendo posto $p_i' = c_i p_i + d_i q_i$, $q_i' = c_i q_i + d_i p_i$. Sommando le (55), si ottiene

(55′) $$\nu'(a_1 + a_2) + (q_1' + q_2')\gamma = \nu'(b_1 + b_2) + (p_1' + p_2')\gamma.$$

In base alle (55′), (55), si ha appunto

$$(\xi_1 + \xi_2)\xi = [(\nu'\gamma,\ (p_1' + p_2')a + (q_1' + q_2')b,\ (p_1' + p_2')b + (q_1' + q_2')a)] = \\ = \sum_{i=1}^{2} [(\nu'\gamma,\ p_i'a + q_i'b,\ p_i'b + q_i'a)] = \xi_1\xi + \xi_2\xi.$$

Dai n.[i] 4-7 risulta dunque che, *in base alle definizioni* (11), (14), (25), *l'insieme* $\mathfrak{A}'$ (n.° 4) *delle classi di equivalenza* $[(\gamma, a, b)]$ (con $\gamma \in M$, a, $b \in S$) *è un anello, dotato di elemento unità* 1', *in cui ogni elemento del sottinsieme* M' (n.° 6) *ammette reciproco.*

Si vede inoltre facilmente che *la corrispondenza* (52), *fra* S *ed* $S' \subseteq \mathfrak{A}'$, *è un isomorfismo.* Posto infatti

$$\eta_i = [(\gamma, \gamma s_i + b, b)] \qquad (i = 1, 2),$$

si ha $[(\gamma, \gamma(s_1 + s_2) + 2b, 2b)] = \sum_{i=1}^{2} [(\gamma, \gamma s_i + b, b)] = \eta_1 + \eta_2$,

cioè

$$s_1 + s_2 \rightarrow \eta_1 + \eta_2.$$

D'altra parte, se p_0, $q_0 \in S$, $\nu_0 \in M$ son tali che $\nu_0(\gamma s_1 + b) + q_0\gamma = \nu_0 b + p_0\gamma$, quindi (moltiplicando per s_2) che

(56) $$\nu_0(\gamma s_1 + b)s_2 + q_0\gamma s_2 = \nu_0 b s_2 + p_0 \gamma s_2,$$

si ha $\eta_1\eta_2 = [(\nu_0\gamma, p_0(\gamma s_2 + b) + q_0 b, p_0 b + q_0(\gamma s_2 + b))]$, ossia, per la (12) e la (56) (terzult. capov. del n.° 4), $\eta_1\eta_2 = [(\nu_0\gamma, p_0\gamma s_2 \cdot q_0\gamma s_2)] = [(\nu_0\gamma, \nu_0\gamma \cdot s_1 s_2 + \nu_0 b s_2, \nu_0 b s_2)]$, cioè

$$s_1 s_2 \rightarrow \eta_1\eta_2.$$

Posto allora

(57) $$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}' \dot{-} S') + S,$$

considerata fra $\mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{A}'$ la corrispondenza biunivoca Φ che subordina l'identità in $\mathfrak{A}' \dot{-} S'$ e l'isomorfismo (52) fra S ed S', definiti, se $x_1 \rightarrow \xi_1$ ed $x_2 \rightarrow \xi_2$ in Φ (x_1, $x_2 \in \mathfrak{A}$, ξ_1, $\xi_2 \in \mathfrak{A}'$), somma $x_1 + x_2$ e prodotto $x_1 x_2$ in $\mathfrak{A}$ risp. come corrispondenti in Φ di $\xi_1 + \xi_2$ e $\xi_1\xi_2$, l'insieme $\mathfrak{A}$ è un anello isomorfo (mediante la Φ) ad $\mathfrak{A}'$.

Per quanto sappiamo della sua immagine isomorfa $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$ è dunque un sopra-semianello del dato semianello S che soddisfa alle condizioni I), II) del n.° 2 (v. penult. capov. del n.° 6). Ma anche la III) è soddisfatta. Se infatti $x \in \mathfrak{A}$, ed in Φ si ha

$$x \rightarrow \xi = [(\gamma, a, b)],$$

si verifica facilmente che in $\mathfrak{A}'$ si ha $(c \in S)$:

$$\xi = [(\gamma^2, \gamma + c, c)] \cdot \{[(\gamma, \gamma a + c, c)] + [(\gamma, c, \gamma b + c)]\}, \tag{58}$$

bastando osservare (ricordate le (23), (12), (10)) che la somma costituente il secondo fattore vale $[(\gamma, \gamma a, \gamma b)]$ e che la (25'), relativa al prodotto di $[(\gamma^2, \gamma + c, c)]$ per questa somma, è soddisfatta assumendo $p = q + \nu$, con $q \in S$, $\nu \in M$ qualsiasi. Ma allora (ricordando le espressioni dell'opposto e del reciproco di un dato elemento di $\mathfrak{A}'$, date nei n.[i] 5, 6), dalla (58), per note proprietà dell'isomorfismo Φ, discende appunto

$$x = \gamma^{-1}(a - b).$$

Poichè è raggiunto lo scopo dichiarato all'inizio del n.° 4, la condizione A) del teorema enunciato al n.° 2 è anche sufficiente, e perciò la prima parte di tale teorema è dimostrata.

8. — Supposto S complementarizzabile a sinistra rispetto ad M, sia $\bar{\mathfrak{A}}$ un suo qualsiasi anello complementare sinistro rispetto ad M.

Si vede facilmente che $\bar{\mathfrak{A}}$ è isomorfo all'anello $\mathfrak{A}$, sopra costruito. Consideriamo infatti la corrispondenza fra $\bar{\mathfrak{A}}$ ed $\mathfrak{A}'$ così definita:

$$\bar{x} = \gamma^{-1}(a - b) \rightarrow \xi = [(\gamma, a, b)]. \tag{59}$$

Essa è biunivoca, poichè, se

$$\gamma^{-1}(a - b) = \gamma_1^{-1}(a_1 - b_1), \tag{60}$$

esistendo (per il lemma del n.° 4) $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ tali che valgano le (1), cioè tali che sia, in $\bar{\mathfrak{A}}$, $(r - s)\gamma = (r_1 - s_1)\gamma_1 = \alpha$, moltiplicando la (60) a sinistra per α si ottiene $(r - s)(a - b) = (r_1 - s_1)(a_1 - b_1)$ cioè, in S, la (1'); ma allora, per la definizione (11),

$$[(\gamma, a, b)] = [(\gamma_1, a_1, b_1)]. \tag{60'}$$

Viceversa, dalla (60') seguono le (1), (1'), quindi in $\bar{\mathfrak{A}}$ si ha $\alpha\gamma^{-1} \cdot (a - b) = \alpha\gamma_1^{-1} \cdot (a_1 - b_1)$, donde la (60). D'altra parte, se

$$\bar{x}_i = \gamma_i^{-1}(a_i - b_i), \qquad \xi_i = [(\gamma_i, a_i, b_i)] \qquad (i = 1, 2),$$

poichè esistono (n.° 4, lemma) h_1, k_1, h_2, $k_2 \in S$, $\beta \in M$ tali che $h_i\gamma_i = k_i\gamma_i + \beta$ $(i = 1, 2)$, cioè che (in $\bar{\mathfrak{A}}$): $(h_1 - k_1)\gamma_1 = (h_2 - k_2)\gamma_2 = \beta$, posto

$$c = h_1a_1 + k_1b_1 + h_2a_2 + k_2b_2, \qquad d = h_1b_1 + k_1a_1 + h_2b_2 + k_2a_2,$$

in $\bar{\mathfrak{A}}$ risulta $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \beta^{-1}(\beta\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2) = \beta^{-1}(c - d)$, quindi (nella (59)) si ha

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \to \xi_1 + \xi_2,$$

dato che appunto, per la definizione (14), $[(\beta, c, d)] = \xi_1 + \xi_2$. Inoltre, poichè (per la condizione A)) esistono p, $q \in S$, $\nu \in M$ tali che $\nu a_1 + q\gamma_2 = \nu b_1 + p\gamma_2$, cioè che (in $\mathfrak{A}$): $(a_1 - b_1)\gamma_2^{-1} = \nu^{-1}(p-q)$, risulta $\bar{x}_1\bar{x}_2 = \gamma_1^{-1}(a_1 - b_1)\gamma_2^{-1}(a_2 - b_2) = (\nu\gamma_1)^{-1}(pa_2 + qb_2 - pb_2 - qa_2)$, quindi (ricordando la definizione (25)) si ha

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \to \xi_1\xi_2.$$

Dunque (mediante la corrispondenza (59)) $\bar{\mathfrak{A}}$ è isomorfo ad $\mathfrak{A}'$; quindi, poichè $\mathfrak{A}'$ è isomorfo ad $\mathfrak{A}$ (n.° 7), si è dimostrato l'asserto. La corrispondenza che realizza l'isomorfismo fra $\bar{\mathfrak{A}}$ ed $\mathfrak{A}$ associa gli elementi che ammettono una medesima rappresentazione $\gamma^{-1}(a - b)$.

Il teorema enunciato alla fine del n.° 2 è quindi completamente dimostrato.

Si verifica facilmente che, in un anello, un elemento è semplificabile (secondo il n.° 1) se e soltanto se esso non è divisore dello zero (cfr. ad es. [3], p. 53).

Se allora, in particolare, il semianello S del n.° 2 è un anello, un sopraanello $\mathfrak{A}_0$ di S si dirà (cfr. [1], p. 73) un *anello dei quozienti a sinistra di S rispetto ad M* (M avendo il significato del n.° 2) se esso soddisfa alle I), II del n.° 2 (ove si legga $\mathfrak{A}_0$ invece di $\mathfrak{A}$) ed alla

III$_0$) Ogni elemento x di $\mathfrak{A}_0$ è rappresentabile nella forma $x = \gamma^{-1}c$, con $\gamma \in M$, $c \in S$.

Evidentemente ($c = c + b - b$, con $b \in S$) un tale $\mathfrak{A}_0$ è pure un anello completamente sinistro dell'anello S rispetto ad M, e viceversa. Quindi dal teor. del n.° 2 discende immediatamente il

COROLLARIO: *Affinchè esista un anello dei quozienti a sinistra $\mathfrak{A}_0$ di un anello S rispetto ad un suo sottinsieme M, moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi non divisori dello zero, è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente:*

A_0) *Dati comunque $c \in S$, $\gamma \in M$, esistono $c_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$ tali che*

$$\gamma_1 c = c_1 \gamma .$$

L'anello $\mathfrak{A}_0$, ove esista, è univocamente determinato da S ed M a meno di isomorfismi.

Questo risultato, qui ritrovato per altra via, è dovuto ad ASANO ([1], *Satz 1* a p. 73). (Evidentemente, se S è un anello, la condizione A) del n.° 2 è equivalente alla A_0).)

9. - I simboli S ed M avendo il significato del n.° 2, osserveremo che, *se S è complementarizzabile a sinistra rispetto ad M, l'a.c.s. di S rispetto ad M è il più piccolo sopra-semianello di S che soddisfa alle due condizioni* I), II).

Ciò perchè, se $\mathfrak{R}$ è un qualsiasi sopra-semianello di S che soddisfa alle I), II) del n.° 2 (ove si legga $\mathfrak{R}$ invece di $\mathfrak{A}$), gli elementi di $\mathfrak{R}$ della forma $\gamma^{-1}(a - b)$ ($\gamma \in M$, a, $b \in S$) costituiscono, se S è complementarizzabile a sinistra rispetto ad M, un a.c.s. $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M; dunque $\mathfrak{R}$ è un sopra-semianello di $\mathfrak{A}$. Infatti ($s \in S$, $\mu \in M$): $\gamma^{-1}(\gamma s + b - b)$, $\gamma^{-1}(a - a)$, $\gamma^{-1}(b - a)$, $\gamma^{-1}(\gamma + b - b)$, $(\gamma\mu)^{-1}(\gamma + b - b) \in \mathfrak{A}$; inoltre, per la condizione A) (che discende dall'ip. fatta su S) e per il lemma del n°. 4 che ne consegue, da x_1, $x_2 \in \mathfrak{A}$ segue (cfr. il 2° capov. del n.° 8) $x_1 x_2$, $x_1 + x_2 \in \mathfrak{A}$.

I simboli S ed M avendo sempre il significato del n.° 2, è chiaro come si possa pure parlare di un *anello complementare destro* (*a.c.d.*) *di S rispetto ad M*: esso è un sopra-semianello di S che soddisfa alle I), II), III) del n.° 2 ove si legga $(a - b)\gamma^{-1}$ invece di $\gamma^{-1}(a - b)$.

Vale il teorema che si deduce da quello del n.° 2 leggendo destra (-o) invece di sinistra (-o) e $a\gamma_1 + \gamma b_1 = b\gamma_1 + \gamma a_1$ invece di $\gamma_1 a + b_1 \gamma = \gamma_1 b + a_1 \gamma$. Infatti, quanto alla sufficienza della condizione così dedotta dalla A) (la necessità è immediata), consideriamo il semianello S' che ha gli stessi elementi e la stessa definizione di addizione del semianello S, ma questa nuova definizione di moltiplicazione $(a', b' \in S', a, b \in S)$: $a'b' = ba$, con $b = b'$, $a = a'$. Per il teor. del n.° 2, esiste allora un a.c.s di S' rispetto ad M; l'anello dedotto da questo come qui sopra S' da S è appunto un a.c.d. di S rispetto ad M. Inoltre, considerato un qualsiasi a.c.d. di S rispetto ad M (supposto esistente), l'anello dedotto da esso come sopra S' da S è un a.c.s. di S' rispetto ad M, quindi è isomorfo (per il teor. del n.° 2) all'a.c.s. prima considerato; di qui la 2ª parte del teorema in discorso.

Si osservi che *l'esistenza di un a.c.d. di S rispetto ad M è indipendente da quella di un a.c.s.*. In [1] (p. 76) è dato infatti un esempio di un anello R che possiede l'anello dei quozienti a sinistra, ma non quello a destra (si ricordi la 2ª parte del n.° 8). Quindi l'anello dedotto da R come nel capov. preced. S' da S possiede invece l'anello dei quozienti a destra ma non quello a sinistra.

Ne segue che *la condizione* A) *del n.°* 2, *sufficiente* (in base al teor. dello stesso n.°) *per l'esistenza di un sopra-semianello di S soddisfacente alle due condizioni* I), II), *non è invece necessaria.* Può dunque accadere che un tale sopra-semianello esista e che in esso l'insieme degli elementi della forma $\gamma^{-1}(a - b)$ non sia moltiplicativamente o additivamente chiuso (cfr. il 2° capov. di questo n.°).

Se S è complementarizzabile sia a sinistra che a destra rispetto ad M, ogni a.c.s. $\mathcal{A}$ di S rispetto ad M è pure un a.c.d. (*e viceversa*). Infatti, poichè esistono $a_1, b_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$ tali che (in $\mathcal{A}$) $(a - b)\gamma_1 = \gamma(a_1 - b_1)$, ogni elemento $\gamma^{-1}(a - b)$ di $\mathcal{A}$ è rappresentabile nella forma $(a_1 - b_1)\gamma_1^{-1}$.

Se in particolare S è commutativo, esso è certamente complementarizzabile rispetto ad M, sia a sinistra che a destra; infatti la condiz. A) del n.° 2 è manifestamente soddisfatta (basta assumere $a_1 = a$, $b_1 = b$, $\gamma_1 = \gamma$). Si può allora parlare (v. il capov. preced.) di *anello complementare* (*a.c.*) *di S rispetto ad M; questo a.c. è pure commutativo* (si ricordi la III) del n.° 2, e si osservi che $\gamma a + b\gamma = \gamma b + a\gamma$ implica $(a - b)\gamma^{-1} =$

$= \gamma^{-1}(a - b))$ e quindi in esso valgono le seguenti, usuali regole di calcolo (posto $\gamma^{-1}(a - b) = (a - b)/\gamma$):

$$\frac{a-b}{\gamma} = \frac{a_1 - b_1}{\gamma_1} \text{ se e soltanto se } a\gamma_1 + \gamma b_1 = b\gamma_1 + \gamma a_1, \tag{61}$$

$$\frac{a-b}{\gamma} + \frac{a_1 - b_1}{\gamma_1} = \frac{a\gamma_1 + \gamma a_1 - (b\gamma_1 + \gamma b_1)}{\gamma\gamma_1}, \tag{61}$$

$$\frac{a-b}{\gamma} \cdot \frac{a_1 - b_1}{\gamma_1} = \frac{aa_1 + bb_1 - (ab_1 + ba_1)}{\gamma\gamma_1}. \tag{61}$$

Poichè l'a.c. di cui al preced. capov. è isomorfo (n.° 8), mediante la corrispondenza (59), all'anello $\mathfrak{A}'$ delle classi di equivalenza $[(\gamma, a, b)]$ sopra costruito (n.° 7), dalle (61) discende che, *se S è commutativo, le definizioni* (11), (14), (25) *sono risp. equivalenti alle seguenti*:

$$\xi = \xi_1 \text{ se e soltanto se } a\gamma_1 + \gamma b_1 = b\gamma_1 + \gamma a_1, \tag{$\overline{11}$}$$

$$\xi + \xi_1 = [(\gamma\gamma_1, a\gamma_1 + \gamma a_1, b\gamma_1 + \gamma b_1)], \tag{$\overline{14}$}$$

$$\xi\xi_1 = [(\gamma\gamma_1, aa_1 + bb_1, ab_1 + ba_1)], \tag{$\overline{25}$}$$

avendo posto $\xi = [(\gamma, a, b)]$, $\xi_1 = [(\gamma_1, a_1, b_1)]$. Ciò può anche dedursi direttamente dalle (11), (14), (25) (assumendo $r = 2\gamma_1$, $s = \gamma_1$, $r_1 = 2\gamma$, $s_1 = \gamma$, $\alpha = \gamma\gamma_1$, $p = a$, $q = b$, $\nu = \gamma_1$).

10. - Se in particolare $M^* = S$ (n.° 2), dal teor. del n.° 2 si ha il

COROLLARIO: *Se gli elementi di un semianello S^* sono tutti semplificabili, affinchè S^* sia complementarizzabile a sinistra è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente*:

A*) *Dati comunque $\alpha, \beta, \gamma \in S^*$, esistono $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in S^*$ tali che*

$$\gamma_1\alpha + \beta_1\gamma = \gamma_1\beta + \alpha_1\gamma.$$

Se esiste un a.c.s. $\mathfrak{A}^*$ di S^*, $\mathfrak{A}^*$ è univocamente determinato da S^* a meno di isomorfismi.

Questo anello $\mathfrak{A}^*$ (supposto esistente) può benissimo *non* essere un corpo, come risulta dall'esempio seguente. Nell'anello $I[x]$ dei polinomi $f = f(x)$ a coefficienti interi, consideriamo l'insieme $\mathfrak{S}^*$ dei polinomi non nulli coi coefficienti ≥ 0. $I[x]$ essendo un campo d'integrità, è chiaro che $\mathfrak{S}^*$ è un semianello (commutativo) i cui elementi sono tutti semplificabili (n.° 8). Nel corpo dei quozienti di $I[x]$, l'insieme delle frazioni $(f^* - g^*)/h^*$, con f^*, g^*, $h^* \in \mathfrak{S}^*$, è un a.c. di $\mathfrak{S}^*$ (n.° 9, 2° capov.); ebbene, questo a.c. non è un corpo. Ciò risulta ad es. dal fatto che il reciproco $1/(x-1)$ dell'elemento $(x-1)/1$ di questo anello non appartiene all'anello stesso. Se infatti fosse $1/(x-1) = (f^* - g^*)/h^*$, con f^*, g^*, $h^* \in \mathfrak{S}^*$, ossia $(x-1)(f^* - g^*) = h^*$, il polinomio non nullo h^* coi coefficienti ≥ 0 avrebbe uno zero positivo $(x = 1)$, il che è assurdo.

Diremo che uno pseudoanello (in particolare un semianello o un anello) è *nullo* se esso contiene un solo elemento (che quindi ne è lo zero).

Al n.° 2 abbiamo osservato che l'eventuale zero di S coincide con quello del suo a.c.s. $\mathfrak{A}$ (supposto esistente). Ne segue evidentemente che, affinchè l'a.c.s. di un semianello non nullo S (complementarizzabile a sinistra) sia un corpo, è necessario che tutti gli elementi non nulli di S siano semplificabili. Questa condizione necessaria non è però sufficiente, come dimostra il precedente es. del semianello $\mathfrak{S}^*$.

Teorema: Affinchè l'a.c.s. $\mathfrak{A}$ di un semianello non nullo S (complementarizzabile a sinistra) sia un corpo, è *sufficiente* che S soddisfi alle due condizioni seguenti:

i) tutti gli elementi non nulli di S sono semplificabili;

ii) qualunque siano a, $b \in S$ con $a \neq b$, una almeno delle due equazioni (risp. nelle incognite φ, ψ)

$$\varphi + a = b\,, \qquad \psi + b = a$$

è risolubile in S.

Se infatti $x = \gamma^{-1}(a - b)$ è un qualsiasi elemento $\neq 0$ di $\mathfrak{A}$ (quindi $a \neq b$), esiste, per la ii), $\alpha \in S$ oppure $\beta \in S$ tale risp. che $\alpha + a = b$ oppure $\beta + b = a$. Poichè $a \neq b$, sia α che β è $\neq 0$ e quindi, per la i), semplificabile. Avendosi allora $x = -\gamma^{-1}\alpha$ oppure $x = \gamma^{-1}\beta$, risulta risp. $x^{-1} = -\alpha^{-1}\gamma$

oppure $x^{-1} = \beta^{-1}\gamma$. L'esistenza in $\mathfrak{A}$ del reciproco x^{-1} di ogni $x \neq 0$ prova l'asserto. Questo teorema vale naturalmente anche per un a.c.d..

Le i), ii) sono ad es. soddisfatte nel semianello dei numeri naturali. Dunque l'a.c. di questo semianello (commutativo) è un corpo, che evidentemente coincide (a meno di isomorfismi) col corpo dei numeri razionali, (cfr. l'introduzione).

§ 2

11. - Se P è uno pseudoanello (n.° 1) contenente elementi semplificabili (sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione — n.° 1 —) l'insieme di questi può *non* essere un sotto-pseudoanello di P, (cioè può non essere sia additivamente che moltiplicativamente chiuso). Consideriamo infatti ad es., nell'anello delle matrici quadrate $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{ik})$ del 2° ordine sopra il corpo dei numeri razionali, l'insieme Γ delle matrici (a_{ik}) cogli elementi a_{ik} tutti positivi. Γ è evidentemente uno pseudoanello (non commutativo), anzi un semianello. Facilmente si verifica che, affinchè un elemento (a_{ik}) di questo semianello Γ sia semplificabile (in Γ), è necessario e sufficiente che il suo determinante $|a_{ik}|$ sia $\neq 0$. Difatti, la sufficienza di questa condizione essendo manifesta (se $|a_{ik}| \neq 0$, esiste, nell'anello suddetto, $(a_{ik})^{-1}$), se $(a_{ik}) \in \Gamma$ ed $|a_{ik}| = 0$, l'equazione $(a_{ik})(x_{ik}) = (0)$, con (0) matrice nulla, ammette evidentemente una soluzione non nulla $(x_{ik}) = (d_{ik})$ nell'anello suddetto; se (b_{ik}), (c_{ik}) sono allora due qualsiasi elementi di Γ (certo esistenti) tali che $(b_{ik}) - (c_{ik}) = (d_{ik})$, in Γ si ha $(a_{ik})(b_{ik}) = (a_{ik})(c_{ik})$ con $(b_{ik}) \neq (c_{ik})$, ossia (a_{ik}) non è ivi semplificabile. Quindi l'insieme Σ degli elementi semplificabili di Γ non è additivamente chiuso (si ha ad es. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$) e perciò Σ non è uno pseudoanello.

D'altra parte esistono evidentemente (basta pensare al semianello dei numeri naturali) pseudoanelli non nulli P contenenti un sotto-pseudoanello costituito da elementi semplificabili in P. Lo stesso pseudoanello Γ dell'es. precedente ne contiene uno: tale è infatti l'insieme Γ' delle matrici di Γ del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a > b$ (a, b numeri razionali positivi). Ciò si riconosce osservando che, se $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in \Gamma'$, da $a = b + c$, $a' = b' + c'$ con c, $c' > 0$ segue $aa' + bb' = (ab' + a'b) + cc'$ con $cc' > 0$, dunque $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in \Gamma'$. È poi chiaro che Γ' è anche additivamente chiuso e che ogni suo elemento è semplificabile in Γ (perchè ha il determinante $\neq 0$).

Esistono pure pseudoanelli non nulli P che contengono un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili in P tale che:

Δ) Dati comunque a, $a_1 \in P$, β, $\beta_1 \in \Pi$ si ha

$$a\beta_1 + \beta a_1 \in \Pi.$$

(Basta pensare ancora al semianello dei numeri naturali, assumendo ad es. in questo come sotto-pseudoanello Π quello costituito dai numeri pari.)

12. - Sia P uno pseudoanello contenente un sotto-pseudoanello Π costituito da elementi semplificabili in P.

Un sopra-pseudoanello $\mathfrak{S}$ di P si dirà uno *pseudoanello complementare sinistro* (*p.c.s.*) (*in senso stretto*) *di P rispetto a* Π se esso soddisfa alle tre condizioni seguenti:

1) $\mathfrak{S}$ è dotato sia di 0 che di 1;

2) Ogni elemento α di Π possiede sia opposto $-\alpha$ che reciproco α^{-1} in $\mathfrak{S}$;

3) Ogni elemento x di $\mathfrak{S}$ è rappresentabile nella forma $= \gamma^{-1}(a - \beta)$ con $a \in P$, β, $\gamma \in \Pi$.

Se un tale sopra-pseudoanello $\mathfrak{S}$ esiste, P si dirà *strettamente complementarizzabile a sinistra rispetto a* Π, (la locuzione « rispetto a Π » si tralascerà se in particolare $\Pi = P$). Come subito si verifica (cfr. n.° 2) gli eventuali $\bar{0}$ ed $\bar{1}$ di P coincidono risp. con 0 ed 1.

Dimostreremo (nel n. 14) il seguente

Teorema: *Affinchè uno pseudoanello P, contenente un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili in P per cui vale la*

Δ) (*n.° 11*), *sia strettamente complementarizzabile a sinistra rispetto a* Π, *è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente:*

B) *Dati comunque* $a \in P$, β, $\gamma \in \Pi$, *esistono* $a_1 \in P$, β_1, $\gamma_1 \in \Pi$ *tali che*

$$\gamma_1 a + \beta_1 \gamma = \gamma_1 \beta + a_1 \gamma .$$

Per dimostrare questo teorema (a differenza di quanto fatto per quello del n.° 2) sfrutteremo dei risultati già noti, riguardanti problemi d'immersione per pseudogruppi. Avremmo però potuto dimostrarlo anche per via diretta, con procedimento analogo a quello seguito nei n.[i] 4-7.

13. - **Premettiamo alcune osservazioni.**

Se in uno pseudoanello P, dotato di zero $\bar{0}$, *vi è un sottinsieme M moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in P rispetto all'addizione, qualunque sia* $\alpha \in M$ *si ha*

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}\alpha = \bar{0} . \tag{62}$$

Infatti, se β è un qualsiasi elemento di M, da $\alpha\beta + \bar{0} = \alpha\beta = \alpha(\beta + \bar{0}) = \alpha\beta + \alpha\bar{0}$, segue (semplificando per $\alpha\beta \in M$) $\bar{0} = \alpha\bar{0}$; analogamente da $\beta\alpha + \bar{0} = \beta\alpha + \bar{0}\alpha$ segue $\bar{0} = \bar{0}\alpha$. La (62) vale dunque in particolare se il sottinsieme M di P è un sotto-pseudoanello costituito da elementi semplificabili (cfr. il 2° capov. del n.° 11). Altro caso particolare notevole:

Se un semianello S è dotato di zero $\bar{0}$, *si ha* $a\bar{0} = \bar{0}a = \bar{0}$, *qualunque sia* $a \in S$.

Dalla precedente osservazione segue che: *Se uno pseudoanello P, dotato di zero* $\bar{0}$, *contiene un sotto-pseudoanello* Π *costituito da elementi semplificabili in P e soddisfacente alla condizione* Δ) **(n.° 11),** *esso è necessariamente nullo* **(n.° 10): $P = \{\bar{0}\}$. Infatti, (per la Δ)) da $\alpha \in \Pi$ segue $\bar{0}\alpha + \alpha\bar{0} \in \Pi$, ossia (2° capov. di questo n.°) $\bar{0} + \bar{0} \in \Pi$; quindi intanto $\bar{0} \in \Pi$. Se Π contenesse un altro elemento $\alpha \neq \bar{0}$, poichè $\alpha\bar{0} = \bar{0}\bar{0} (= \bar{0})$, α non sarebbe semplificabile, contro l'ip.; quindi $\Pi = \{\bar{0}\}$. Se allora P contenesse un $a \neq \bar{0}$, poichè (per la Δ)) $a\bar{0} + \bar{0}\bar{0} = a\bar{0} + \bar{0} = a\bar{0} \in \Pi = \{\bar{0}\}$, si avrebbe $a\bar{0} = \bar{0}\bar{0}$ con $a \neq \bar{0}$, il**

che è assurdo (poichè $\bar{0}$, appartenendo a Π, è semplificabile in P); dunque appunto $P = \{\bar{0}\}$.

Dunque, se lo pseudoanello P è dotato di zero (*in particolare se P è un anello*) il teorema del n.° 12 diventa banale. Nella dimostrazione di tale teorema escluderemo perciò che P possegga lo zero.

Se uno pseudoanello P contiene un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili in P per cui vale la Δ), P è un semianello. Infatti, se $a + c = b + c$ $(a, b, c \in P)$ e β è un qualsiasi elemento di Π, si ha $(a\beta + c\beta) + \beta c = (b\beta + c\beta) + \beta c$, donde, semplificando per $c\beta + \beta c \in \Pi$ (vedi Δ)), $a\beta = b\beta$, da cui appunto $a = b$.

In uno pseudoanello $\mathfrak{S}$ dotato di zero 0, affinchè tutti i multipli $x\alpha$, αx di ogni elemento α dotato di opposto siano pure dotati di opposto è necessario e sufficiente che sia

$$x0 = 0x = 0, \tag{62'}$$

qualunque sia $x \in \mathfrak{S}$. Infatti, se $x\alpha$ è dotato di opposto, da $x\alpha + x(\alpha - \alpha) = x(\alpha + \alpha - \alpha) = x\alpha$ segue $x(\alpha - \alpha) = x\alpha - x\alpha$, ossia appunto $x0 = 0$; analogamente, se esiste $-\alpha x$, si ha $0x = 0$. Viceversa, se vale la (62'), gli opposti di $x\alpha$, αx sono risp. $x(-\alpha)$, $(-\alpha)x$. Dunque:

La condizione (62') *è necessaria e sufficiente affinchè in uno pseudoanello $\mathfrak{S}$, dotato di* 0, *valgano le solite proprietà moltiplicative del segno meno,* ossia

$$x(-\alpha) = -x\alpha, \qquad (-\alpha)x = -\alpha x, \qquad (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta, \tag{63}$$

$(x, \alpha, \beta \in \mathfrak{S}$; α, β dotati di opposto). Infatti la terza delle (63) è un'immediata conseguenza delle prime due.

14. - I simboli P e Π abbiano il significato dichiarato all'inizio del n.° 12, ed esista uno p.c.s. $\mathfrak{S}$ di P rispetto a Π. Dati allora comunque $a \in P$, $\beta, \gamma \in \Pi$, esistono (per la 3)) $a_1 \in P$, $\beta_1, \gamma_1 \in \Pi$ tali che in P si abbia (cfr. il n.° 3) $\gamma_1(a - \beta) = (a_1 - \beta_1)\gamma$, donde (addizionando ai due membri $\gamma_1\beta$) $\gamma_1 a = \gamma_1\beta + (a_1 - \beta_1)\gamma$, e di qui: $\gamma_1 a + \beta_1\gamma = \gamma_1\beta + a_1\gamma$. La necessità della condizione B) del teorema del n.° 12 è così dimostrata.

Nelle ipotesi dell'enunciato di tale teorema, dimostriamo ora la sufficienza della B).

Rispetto all'addizione P è un semigruppo (terzult. capov. del n.° 13) commutativo, di cui Π è un sotto-semigruppo. Per un noto teorema ([2], p. 150), esiste allora uno pseudogruppo delle differenze di P rispetto a Π, cioè un sopra-pseudogruppo P_0 di P, dotato di zero, in cui ogni elemento di Π ammette opposto, ed ogni elemento del quale è rappresentabile nella forma $a - \beta$ con $a \in P$, $\beta \in \Pi$; in P_0 valgono le regole di calcolo:

$$(64) \qquad a - \beta = a_1 - \beta_1 \text{ se e soltanto se, in P, } a + \beta_1 = \beta + a_1,$$

$$(65) \qquad (a - \beta) + (a_1 - \beta_1) = (a + a_1) - (\beta + \beta_1).$$

Poichè P è un semigruppo, anche lo pseudogruppo P_0 (come subito si verifica) è un semigruppo (commutativo). Diamo ora in P_0 la seguente *definizione* di moltiplicazione:

$$(66) \qquad (a - \beta)(a_1 - \beta_1) = (aa_1 + \beta\beta_1) - (a\beta_1 + \beta a_1).$$

Questa definizione ha intanto senso perchè, per la Δ), $a\beta_1 + \beta a_1 \in \Pi$ (e quindi è dotato di opposto in P_0). Inoltre, se (in P)

$$a + \beta' = \beta + a', \qquad a_1 + \beta_1' = \beta_1 + a_1',$$

in virtù di queste due eguaglianze si ha successivamente

$$a\beta_1 + \beta'\beta_1 + a'a_1' = \beta\beta_1 + a'\beta_1 + a'a_1' = \beta\beta_1 + a'a_1 + a'\beta_1',$$

$$(\beta a_1 + \beta'a_1') + \beta\beta_1 + a'a_1 + a'\beta_1' = a\beta_1 + \beta'\beta_1 + a'a_1' + (\beta a_1 + \beta'a_1'),$$

$$aa_1 + \beta'a_1' + \beta\beta_1 + \beta'a_1 + a'\beta_1' = a\beta_1 + \beta'a_1 + a'a_1' + \beta a_1 + \beta'\beta_1',$$

donde, semplificando per $\beta'a_1$ (e ricordando la Δ)), in P_0 risulta

$$(aa_1 + \beta\beta_1) - (a\beta_1 + \beta a_1) = (a'a_1' + \beta'\beta_1') - (a'\beta_1' + \beta'a_1').$$

dunque la moltiplicazione definita dalla (66) è univoca. Facilmente si verifica che questa moltiplicazione è associativa e distributiva (sia a destra che a sinistra) rispetto all'addizione (65). Dunque P_0 è un semianello (in cui valgono le regole di calcolo (64), (65), (66)) dotato di zero $0(=\pi-\pi$, con $\pi \in \Pi)$ tale che (n.° 13, 3° capov.):

$$(a-\beta)0=0(a-\beta)=0. \tag{67}$$

Se in particolare $a-\beta=b$, $a_1-\beta_1=b_1$ con b, $b_1 \in$ P, come prodotto in P_0 di $(b+\beta)-\beta$ per $(b_1+\beta_1)-\beta_1$ si trova proprio (mediante la 66)) il prodotto bb_1 di b per b_1 in P; dunque P_0 *è un sopra-pseudoanello di* P. In P_0 la moltiplicazione, in virtù della (67), è distributiva anche rispetto alla sottrazione, (n.° 13, ult. capov.); ne segue subito che *ogni elemento di* Π *è semplificabile in* P_0.

Rispetto alla moltiplicazione P_0 è dunque un sopra-pseudogruppo di Π, in cui tutti gli elementi di questo sono semplificabili. In virtù della B) del n.° 12, in P_0 è soddisfatta inoltre la seguente condizione:

B$_0$) Dati comunque $(a-\beta) \in P_0$, $\gamma \in \Pi$, esistono $(a_1-$ $-\beta_1) \in P_0$, $\gamma_1 \in \Pi$ tali che

$$\gamma_1(a-\beta)=(a_1-\beta_1)\gamma.$$

Questa condizione, in base ad un teorema dimostrato da Murata ([5], Th. 1 a p. 2) (che generalizza un noto risultato di Ore — [6]; cfr. [2], p. 142 —), è sufficiente affinchè esista uno pseudogruppo dei quozienti a sinistra di P_0 rispetto a Π, cioè un sopra-pseudogruppo $\mathfrak{S}$ di P_0, dotato di 1, in cui ogni elemento di Π ammette reciproco, ed ogni elemento x del quale è rappresentabile nella forma $x=\gamma^{-1}(a-\beta)$ con $\gamma \in \Pi$, $(a-\beta) \in P_0$; questo $\mathfrak{S}$ è individuato da P_0 e Π a meno di isomorfismi.

Poichè dalla B$_0$) segue immediatamente che, dati comunque γ, $\gamma_1 \in \Pi$, esistono r, $r_1 \in P$, σ, σ_1, $\alpha \in \Pi$ tali che, in P,

$$r\gamma=\sigma\gamma+\alpha, \qquad r_1\gamma_1=\sigma_1\gamma_1+\alpha, \tag{68}$$

(si pensi, in P_0, ai due elementi $2\gamma-\gamma$, γ_1), se, in $\mathfrak{S}$ $\gamma^{-1}(a-\beta)=\gamma_1^{-1}(a_1-\beta_1)$, moltiplicando a sinistra per α ne viene che, in P,

$$ra+\sigma\beta+r_1\beta_1+\sigma_1 a_1=r\beta+\sigma a+r_1 a_1+\sigma_1\beta_1; \tag{68'}$$

viceversa, se esistono r, $r_1 \in P$, σ, σ_1, $\alpha \in \Pi$ per cui valgono (in P) le (68), (68′), in $\mathfrak{S}$ si ha $\alpha\gamma^{-1}(a - \beta) = \alpha\gamma_1^{-1}(a - \beta_1)$. Poichè inoltre, per la B_0), in corrispondenza ai due elementi $(a - \beta)$, γ_1, esistono $(p - \rho) \in P_0$, $\nu \in \Pi$ tali che, in $\mathfrak{S}$, $(a - \beta)\gamma_1^{-1} = \nu^{-1}(p - \rho)$, ne viene $\gamma^{-1}(a - \beta)\cdot\gamma_1^{-1}(a_1 - \beta_1) = (\nu\gamma)^{-1}(p - \rho)(a_1 - \beta_1)$. In conclusione, nello pseudogruppo (moltiplicativo) $\mathfrak{S}$ valgono le regole di calcolo:

$$(69) \qquad \gamma^{-1}(a - \beta) = \gamma_1^{-1}(a_1 - \beta_1)$$

se e soltanto se esistono r, $r_1 \in P$, σ, σ_1, $\alpha \in \Pi$ per cui valgono (in P) le (68), (68′);

$$(70) \quad \gamma^{-1}(a - \beta)\cdot\gamma_1^{-1}(a_1 - \beta_1) = (\nu\gamma)^{-1}((pa_1 + \rho\beta_1) - (p\beta_1 + \rho a_1)).$$

dove $p \in P$, ρ, $\nu \in \Pi$ sono tali che (in P)

$$(70') \qquad \nu a + \rho\gamma_1 = \nu\beta + p\gamma_1 .$$

Dati, in $\mathfrak{S}$, $x = \gamma^{-1}(a - \beta)$, $x_1 = \gamma_1^{-1}(a_1 - \beta_1)$, esiste (v. (68)) un $\alpha \in \Pi$ tale che $\alpha x = (r - \sigma)(a - \beta)$, $\alpha x_1 = (r_1 - \sigma_1)(a_1 - \beta_1)$, con $(r - \sigma)$, $(r_1 - \sigma_1) \in P_0$, dunque tale che αx, $\alpha x_1 \in P_0$. Diamo allora in $\mathfrak{S}$ la seguente *definizione* di addizione: $x + x_1 = \alpha^{-1}(\alpha x + \alpha x_1)$ (la somma $\alpha x + \alpha x_1$ essendo calcolata nello pseudoanello P_0), ossia:

$$(71) \quad \gamma^{-1}(a - \beta) + \gamma_1^{-1}(a_1 - \beta_1) = \alpha^{-1}((ra + \sigma\beta + r_1a_1 + \sigma_1\beta_1) - (r\beta + \sigma a + r_1\beta_1 + \sigma_1 a_1)),$$

dove r, $r_1 \in P$, σ, σ_1, $\alpha \in \Pi$ son cinque elementi per cui valgono le (68). La somma $\alpha^{-1}(\alpha x + \alpha x_1)$ non dipende ([5], p. 4, 4° capov.) dalla scelta di α (tale che αx, $\alpha x_1 \in P_0$), quindi l'addizione ora definita è univoca. Inoltre, se in particolare x, $x_1 \in P_0$, qualunque sia $\alpha \in \Pi$ si ha αx, $\alpha x_1 \in P_0$, quindi in $\mathfrak{S}$: $x + x_1 = \alpha^{-1}\cdot\alpha(x + x_1) = x + x_1$, quest'ultima somma essendo calcolata in P_0.

Osserviamo che, se in particolare (con le notazioni del preced. capov.) $\gamma = \gamma_1$, allora $\gamma x = (a - \beta) \in P_0$, $\gamma x_1 = (a_1 - \beta_1) \in P_0$; dunque in $\mathfrak{S}$ si ha

$$(72) \qquad \gamma^{-1}(a - \beta) + \gamma^{-1}(a_1 - \beta_1) = \gamma^{-1}((a - \beta) + (a_1 - \beta_1))$$

$(\gamma \in \Pi$, $(a - \beta)$, $(a_1 - \beta_1) \in P_0)$.

3 4

Ne segue che l'addizione in $\mathfrak{S}$ è associativa. Dati infatti x, x_1, $x_2 \in \mathfrak{S}$, esiste ([5], Lemma 3) un $\lambda \in \Pi$ tale che λx, λx_1, $\lambda x_2 \in P_0$, quindi, in virtù della (72), si ha: $(x+x_1)+$ $+x_2=\lambda^{-1}(\lambda x+\lambda x_1)+\lambda^{-1}\cdot\lambda x_2=\lambda^{-1}(\lambda x+\lambda x_1+\lambda x_2)=x+(x_1+x_2)$.

In $\mathfrak{S}$ la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione ([5], p. 4, penult. ed ult. capov.). Dunque (poichè, come sopra osservato, la somma di due elementi di P_0, calcolata in $\mathfrak{S}$, coincide con quella calcolata in P_0) $\mathfrak{S}$ *è un sopra-pseudo-anello* (di P_0 e quindi) *di* P. Inoltre, per la (67), in $\mathfrak{S}$ si ha

$$0 = 1 \cdot 0 = \pi^{-1} \cdot \pi 0 = \pi^{-1} \cdot 0, \tag{73}$$

dove 0 è lo zero di P_0 e π è un qualsiasi elemento di Π. In base alla (73) si vede subito che $\mathfrak{S}$ *è dotato di zero* (che coincide con lo zero di P_0), *il quale gode della proprietà* (62′). La prima affermazione ($x+0=x$ per ogni $x \in \mathfrak{S}$) risulta dalla (72), la seconda dalle (70), (70′) assumendo dapprima $a_1=\beta_1$ e poi $a=\beta$. Si noti che, come vedremo al n.° successivo, la (62′) implica che $\mathfrak{S}$ *è un semianello*.

È ormai chiaro che lo pseudoanello $\mathfrak{S}$ (in cui valgono le regole di calcolo (69), (70), (71)) è uno p.c.s. di P rispetto a Π; quindi il teorema enunciato al n.° 12 è dimostrato.

15. - Oltre al teorema di esistenza enunciato al n.° 12, vale anche adesso (cfr. il n.° 2) il seguente teorema di unicità:

I simboli P e Π avendo il significato detto nell'enunciato del teorema del n.° 12, *se esiste uno p.c.s.* (*in senso stretto*) $\mathfrak{S}$ *di* P *rispetto a* Π, $\mathfrak{S}$ è *univocamente determinato da* P *e* Π *a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione: Se $\mathfrak{S}'$ è un qualsiasi p.c.s. di P rispetto a Π, dalla Δ) del n.° 11 segue anzitutto che ogni elemento di P è semplificabile *in* $\mathfrak{S}'$ rispetto all'addizione. Infatti, in $\mathfrak{S}'$, da $y+a=z+a$ (y, $z \in \mathfrak{S}'$ $a \in \mathfrak{S}$) segue $(y\beta+a\beta)+\beta a=$ $=(z\beta+a\beta)+\beta a$, qualunque sia $\beta \in \Pi$; ma poichè $a\beta+\beta a \in \Pi$ e quindi (per la 2)) esiste in $\mathfrak{S}'$ l'opposto $-(a\beta+\beta a)$, ne viene che $y\beta=z\beta$, donde appunto, semplificando per β (che, per la 2), è dotato di reciproco in $\mathfrak{S}'$), $y=z$. Ma allora (2° capov. del n.° 13), in $\mathfrak{S}'$ si ha

$$a0 = 0a = 0 \tag{74}$$

qualunque sia $a \in P$; ne segue (cfr. gli ultimi due capoversi del n.° 13) che in $\mathfrak{S}'$ si ha pure

$$(63') \quad a(-\beta) = -a\beta, \qquad (-\beta)a = -\beta a, \qquad (-\beta)(-\gamma) = \beta\gamma$$

qualunque siano $a \in P$, β, $\gamma \in \Pi$. In virtù delle (63′), le differenze $a - \beta$ ($a \in P$, $\beta \in \Pi$) costituiscono in $\mathfrak{S}'$ un sotto -pseudoanello P_0' in cui valgono le regole di calcolo (64), (65), (66) e che soddisfa alla condizione B_0) (ove si legga P_0' invece di P_0), onde basta ripetere il ragionamento fatto per $\mathfrak{S}$ al n.° preced. per concludere che anche in $\mathfrak{S}'$ valgono le regole di calcolo (69), (70), (71). Ne segue immediatamente che, associando gli elementi di $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ che ammettono una medesima rappresentazione $\gamma^{-1}(a-\beta)$ ($a \in P$, β, $\gamma \in \Pi$), la corrispondenza così ottenuta fra $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{S}'$ è appunto un isomorfismo. Si osservi che, in virtù di questo isomorfismo, in $\mathfrak{S}'$ (oltre alla (74)) vale pure la (62′) (per ogni $x \in \mathfrak{S}'$).

Osserveremo adesso che, i simboli P e Π avendo il significato dichiarato all'inizio del n.° 12, *se uno p.c.s* $\mathfrak{S}$ *di* P *rispetto a* Π (supposto esistente) *soddisfa alla condizione* (62′), $\mathfrak{S}$ (e quindi P) *è necessariamente un semianello.* Infatti la (62′) implica (v. il penult. capov. del n.° 13) che tutti i multipli $x\alpha$, αx ($x \in \mathfrak{S}$) di ogni $\alpha \in \Pi$ (dotato, per la 2), di opposto) siano pure dotati di opposto in $\mathfrak{S}$, e perciò quivi semplificabili rispetto all'addizione. Ne segue che, in $\mathfrak{S}$, da $x + y = x + z$ si trae $x\alpha + y\alpha = x\alpha + z\alpha$ qualunque sia $\alpha \in \Pi$, donde $y\alpha = z\alpha$ e di qui appunto (moltiplicando a destra per α^{-1}) $y = z$. Con ciò abbiamo giustificato un'affermazione fatta alla fine del penult. capov. del n.° precedente.

Dalla precedente osservazione discende dunque che, ove per uno p.c.s. di P rispetto a Π (questi due simboli avendo il significato detto all'inizio del n. 12) si intendesse un sopra-pseudoanello $\mathfrak{S}$ di P soddisfacente, oltre che alle condizioni 1), 2), 3) del n.° 12, anche alla (62′), il problema d'immersione illustrato al n.° 12 (prima dell'enunciato del teor.) perderebbe notevolmente in generalità, in quanto resterebbero allora esclusi dalla sua considerazione tutti quegli pseudoanelli P che (pur contenendo un sotto-pseudoanello Π di elementi semplificabili in P) non fossero semianelli.

Quanto si è detto fin qui in questo n.° porge lo spunto per osservare che il teorema del n.° 12 fornisce condizioni *sufficienti* affinchè un semianello (n.° 13, terzult. capov.) P, contenente un sotto-semianello Π di elementi semplificabili in P, si possa immergere in un semianello (v. la fine del penult. capov. del n.° preced.) $\mathfrak{S}$, dotato di 0 ed 1, in cui ogni elemento di Π ammetta sia reciproco che opposto: queste condizioni sono la B) e la Δ) (n.[i] 12, 11). L'interesse, in questo senso, del teorema in discorso sta nel fatto che non si può escludere a priori (cfr. n.° 9, 6° capov.) che per una coppia P, Π non sia soddisfatta la condizione A) del n.° 2 (ove si legga P, Π invece risp. di S, M), ma lo siano invece la B) e la Δ).

Per quanto riguarda poi il problema d'immersione illustrato al n.° 12 (prima dell'enunciato del teor.), osserveremo ancora che il teorema del n.° stesso non lo risolve in modo completo, nel senso che (i simboli P, Π avendo il significato detto all'inizio del n.° 12) esso fornisce condizioni sufficienti (la B) e la Δ)) per l'esistenza di uno p.c.s. di P rispetto a Π, delle quali la sola B) è anche necessaria (n.° 14, 1° capov.). Che tale non sia invece la Δ) si riconosce infatti assumendo ad es. $P = I =$ anello dei numeri interi, $\Pi = N =$ semianello dei numeri naturali. N è evidentemente un sotto-pseudoanello di I cogli elementi tutti semplificabili in I, ma la coppia I, N non soddisfa certo alla Δ) (cfr. n.° 13, 4° capov.); ciò nonostante il corpo dei numeri razionali è evidentemente uno p.c.s. di I rispetto ad N, (la B) è verificata perchè I è commutativo — cfr. n.° 9 —).

Intendendo per un *ideale* di uno pseudoanello P un sotto-pseudoanello Π di P tale che $\beta \in \Pi$ implica $a\beta$, $\beta a \in \Pi$ qualunque sia $a \in P$, osserveremo infine che dal teor. del n.° 12 e dal 2° capov. di questo n.° segue immediatamente il

Corollario: *Affinchè uno pseudoanello P, contenente un ideale Π costituito da elementi semplificabili in P, sia strettamente complementarizzabile a sinistra rispetto a Π, è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione* B) *del* n.° 12. *Se esiste uno p.c.s. $\mathfrak{S}$ di P rispetto a Π, $\mathfrak{S}$ è univocamente determinato da P e Π a meno di isomorfismi.*

Naturalmente anche il teorema del n.° 12 si presta (entro opportuni limiti) a considerazioni analoghe a quelle svolte nei n.[i] 9, 10, che qui però tralasciamo.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. ASANO: *Über die Quotientenbildung von Schiefringen*, Journ. Math. Soc. Japan, vol 1 (1949), pp. 73-78.
[2] P. DUBREIL: *Algèbre, I*, Gauthier-Villars (1946).
[3] N. JACOBSON: *Lectures in Abstract Algebra, Vol. I*, Van Nostrand (1951).
[4] U. MORIN: *Algebra astratta e geometria algebrica, Parte prima*, (litografie), Cedam (1955).
[5] K. MURATA: *On the Quotient Semi-group of a Noncommutative Semi-group*, Osaka Math. Journ., vol. 2 (1950), pp. 1-5.
[6] O. ORE: *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math., vol. 32 (1931), pp. 463-477.