RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO DOLCHER

Topologia delle famiglie di filtri

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 443-473

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__443_0>

TOPOLOGIA DELLE FAMIGLIE DI FILTRI

Nota (*) *di* MARIO DOLCHER (*a Ferrara*)

Introduzione.

1. - In questa Nota mostro che una famiglia qualunque di filtri sopra un insieme può riguardarsi come uno spazio topologico, quando le relazioni di carattere combinatorio esistenti fra i filtri della famiglia vengano opportunamente interpretate. E poichè una tale *opportuna* interpretazione è anche la più naturale, in quanto si riduce alla pura e semplice descrizione della situazione dei filtri gli uni rispetto agli altri, possiamo sommariamente affermare che *una famiglia di filtri sopra un insieme costituisce di per sè uno spazio topologico.*

2. - Si noti la diversità fra il ruolo che usualmente i filtri giocano nella teoria degli spazi topologici e quello che qui vien fatto loro giocare. Usualmente, l'introduzione di una topologia in un insieme S, a priori amorfo [1]), consiste nell'assegnare — direttamente o no — la famiglia $\Sigma = \{ \sigma_p \}_{p \in S}$ dei filtri d'intorni dei punti di S, ossia una famiglia di filtri associati rispettivamente ai punti dell'insieme S, la quale ri-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 22 settembre 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

1) Ossia, non dotato di struttura. Per la nozione precisa di *struttura* vedasi M. DOLCHER, *Nozione generale di struttura per un insieme.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **18** (1949), p. 265-291. Comunque, agli effetti del presente lavoro, è sufficiente attribuire alla parola *struttura* l'usuale significato, alquanto generico.

spetti certe condizioni[2]). Qui invece, data una famiglia Φ di filtri, assolutamente qualunque, sull'insieme S, vengono prese in considerazione le relazioni esistenti fra i filtri della Φ, che risulta costituire essa stessa, per così dire spontaneamente, uno spazio topologico, i cui « punti » sono dunque filtri: l'insieme S può venire completamente trascurato, dopo essere servito soltanto di supporto per i filtri e per la constatazione delle relazioni esistenti in seno alla loro famiglia.

La considerazione di un tale *spazio di filtri*[3]) si giustistifica constatando che quando sia dato uno spazio topològico S di cui sia Σ la famiglia $\{\sigma_p\}_{p \varepsilon S}$ dei filtri d'intorni, la topologia dello spazio di filtri Σ coincide con quella dello spazio S quando s'identifichi ogni filtro $\sigma_p \in \Sigma$ col punto $p \in S$ di cui esso è il filtro degl'intorni[4]).

Più in generale, se Φ è una famiglia di filtri contenente Σ come sottofamiglia, allora il sottospazio Σ dello spazio di filtri Φ è un isomorfismo topologico con lo spazio S preesistente. Pertanto, lo spazio Φ può riguardarsi come un *ampliamento dello spazio* S.

Dopo questo cenno generale, consideriamo separatamente il significato che ha il concetto di *spazio di filtri* dal punto di vista critico, e l'interesse che esso può presentare nel senso applicativo.

---

[2]) Precisamente: ad ogni punto $x \varepsilon S$ sia associato un filtro σ_x per modo che: (a) per ogni $U \varepsilon \sigma_x$, si abbia $x \varepsilon U$; (b) per ogni $U \varepsilon \sigma_x$ esista $V \varepsilon \sigma_x$ tale che per ogni $y \varepsilon V$ si abbia $U \varepsilon \sigma_y$.

[3]) Dicendo spazio di filtri ci si riferisce, nell'Introduzione, allo *spazio forte* (*di filtri*), definito al n. **12**. Lo *spazio debole* (n. **20**) appare assai meno interessante, e la sua considerazione può avere qualche importanza soltanto unitamente a quella dello spazio forte.

[4]) Più esattamente, la *giustificazione* di cui si parla sussiste se e soltanto se lo spazio S soddisfa alla condizione (T_0). E' evidente che quando — com'è il caso in questo lavoro — per *famiglia* di filtri si vuole intendere *insieme* di filtri, l'eventualità che punti distinti dello spazio S abbiano filtri d'intorni coincidenti (eventualità che equivale alla negazione della (T_0)) esclude a priori la possibilità di corrispondenza biunivoca, e con ciò quella di isomorfismo topologico, fra lo spazio S e lo spazio Φ. Vedasi anche n. **19** e nota [21]).

3. - Dal punto di vista critico, la nozione di spazio topologico (astratto) ha trovato giustificazioni di carattere logico-formale in primo luogo nei risultati di K. KURATOWSKI [5]), e cioè nella formulazione dei ben noti assiomi della chiusura, ossia nell'espressione della struttura topologica di un insieme in termini dell'Algebra di BOOLE. La trattazione della Topologia degli spazi in tale senso, ossia senza ricorso alla nozione di « punto » ha avuto successivamente un notevole sviluppo, per opera di vari Autori [6]). Il problema, invece, di ricercare se esistano e quali siano degli *enti* logicamente semplici, e cioè definiti in base a sole considerazioni di teoria degl'insiemi astratti, i quali per la loro stessa natura si prestino ad essere interpretati come *punti* di uno spazio topologico, non mi consta essere stato sufficientemente considerato [7]).

A chiarimento del significato di un tale problema (che è di natura critico-interpretativa più che logico-formale) riporto, a titolo di confronto, uno schema analogo tratto da tutt'altra teoria.

---

5) *Sur l'opération $\bar{A}$ et l'Analysis Situs.* Fund. Math. **3** (1922). p. 182-199.

6) Per un'interpretazione logico-formale della nozione di spazio topologico vedasi: A. TARSKI, *Der Aussagenkalkül und die Topologie,* Fund. Math. **31** (1938) p. 103-134; J. C. C. MCKINSEY and A. TARSKI, *The algebra of Topology,* Annals of Math. **45** (1955), p. 141-191; degli stessi Autori, *On closed elements in closure algebras,* ibid. **47** (1946), p. 122-162.

Un'esposizione completa della teoria degli spazi topologici in tale senso, e precisamente mediante la teoria degl'insiemi ordinati trovasi nel recente libro: G. NÖBELING, *Grundlangen der analytischen Topologie* (Berlin, Springer 1954).

7) Intendo: enti, i quali in base alle loro proprietà intrinseche assumono la struttura del *più generale* spazio topologico. Ad. es. i numeri razionali costituiscono uno spazio topologico in virtù della loro struttura algebrica, ma non consta che da sistemi numerici più generali si possano ottenere con lo stesso criterio spazi topologici alquanto generali In tale senso, potremmo dire che la nozione di spazio topologico è giustificata dalla esistenza di enti di natura algebrica i quali *ne costituiscono i punti.*

Sia F una configurazione (geometrica, o di natura astratta) consistente in un determinato insieme di « punti » legati da determinate relazioni, e si consideri l'insieme Γ delle sostituzioni α, β, ... sull'insieme dei punti di F le quali sono compatibili con la struttura di F [8]). Fra gli elementi di Γ, in virtù della loro stessa natura di *sostituzioni*, e quindi senz'altro arbitrio se non di opportune convenzioni di linguaggio, si crea allora una legge di composizione (prodotto $\alpha \cdot \beta =$ applicazione successiva di α, β), per la quale l'insieme Γ risulta un *gruppo* (*di sostituzioni*). Se, a questo punto, ci si sbarazza idealmente della figura F, ritenendo soltanto la struttura algebrica di Γ, tale insieme rimane un *gruppo* (*astratto*). In tale maniera, la nozione stessa di gruppo (astratto) trova una giustificazione a priori nell'esistenza di enti (sostituzioni) i quali per la loro stessa natura si prestano ad essere interpretati come elementi di un gruppo astratto. L'analogia potrebbe essere proseguita, confrontando la considerazione svolta nel n. prec. (Teorema di subordinazione, n. **18**) con i più elementari risultati relativi alla rappresentazione dei gruppi.

4. - Torna qui a proposito menzionare un argomento, atto, in particolare, a dissipare l'eventuale sospetto, che nella considerazione dello spazio di filtri vi sia alcunchè di artificioso: invero, il definire, come qui si fa, i punti di uno spazio topologico come filtri urta contro l'abitudine, di pensare i punti come gli elementi primi, con i quali si fanno gl'insiemi e poi i filtri.

L'idea dello *spazio di filtri* trova riscontro in un procedimento fondamentale dell'Analisi, al quale è, anzi, condizionata la stessa costruibilità degli spazi più significativi: si tratta della definizione dello *spazio dei numeri reali* come *spazio di sezioni*, a partire dall'insieme ordinato R dei numeri razionali.

---

[8]) Ossia, quelle sostituzioni attraverso le quali si conservano le relazioni esistenti in F (automorfismi dell'insieme relativamente al sistema di dati in esso esistente). Vedasi, più in particolare, il lavoro citato in [1]).

Come mostro nei n. **27** e **28** (Appendice), la retta topologica è, in sostanza, uno spazio di filtri. Le descrizione del procedimento di DEDEKIND [9]) nei termini abituali è resa possibile dall'essere ivi le topologie — quella preesistente in R e quella desiderata nello spazio ampliato — esprimibili nei termini di strutture d'ordine.

Pertanto, la costruzione che presento va riguardata come *la formulazione dello schema topologico più generale in cui il procedimento classico di costruzione del continuo rientra.*

5. - I primi, semplici risultati contenuti in questa Nota non mi consentono un giudizio anticipato sulle possibili applicazioni. Comunque, un campo nel quale lo *spazio di filtri* può presentarsi come strumento di ricerca è da vedersi nello studio delle questioni di *immersione* e, in particolare, di *compattizzazione* e di *completamento.* Esistono, in materia, risultati di fondamentale importanza, come quelli di STONE, ČECH, WALLMAN sulla compattizzazione, i quali, a causa dei metodi con i quali sono ottenuti, riescono del tutto inutilizzabili per le questioni nelle quali interessa l'effettiva costruibilità, esigenza che — indipendentemente da ogni obiezione sulla legittimità dei metodi — interessa anche il lato non strettamente applicativo, in quanto ad essa è condizionata la definibilità e in generale anche la possibilità dell'effettivo studio degli spazi. Comunque, l'utilità dei filtri come strumento di ricerca in tale campo è confortata dal fatto che anche i risultati dei detti Autori implicano la considerazione di ultrafiltri, o ad essa possono facilmente ricondursi.

Un primo risultato indipendente dall'assioma di ZERMELO è stato ottenuto in tale senso dalla Sig.na A. GEROLINI [10]) alla quale, appunto per saggiare l'efficacia del metodo, avevo sug-

---

9) Non propriamente quella originaria: vedi nota 27).

10) A. GEROLINI, *Compactification des espaces séparés*, C. R. Acad. Sci. Paris, **232** (1951), p. 1056-1058. Tale pubblicazione è un estratto della Tesi, presentata nell'Università di Trieste nel luglio 1950.

gerito come tema di ricerca lo studio delle famiglie dei filtri compattizzanti: dunque, un procedimento del tipo di *aggiunzione*. Per quanto al risultato debba riconoscersi una notevole importanza per la molto maggiore generalità rispetto ai precedenti [11]), pure esso appare di non facile applicazione.

È stata tale esperienza, assieme all'impressione generale, che con i procedimenti di aggiunzione (e non solo della Topologia) sia connaturata una certa debolezza che si palesa nelle applicazioni, a convincermi dell'opportunità di ricercare uno strumento d'indagine più completo.

6. - Terminologia e notazioni.

Figurano, nel seguito, enti di quattro tipi: *elementi primi* (o « atomi », in partic. punti, quando trattasi di uno spazio), *insiemi di atomi, famiglie di insiemi di atomi* (quasi sempre: *filtri*), *famiglie di filtri*.

Il tipo dell'ente risulta dal carattere tipografico, secondo lo schema

$$p \in A \in \gamma \in \Phi.$$

(Le poche eccezioni a tale convenzione di notazioni saranno di per sè ovvie).

Alle parole *insieme* e *famiglia* s'intende attribuire il medesimo significato.

Col simbolo $\{a_\iota\}_{\iota \in I}$ viene indicato l'insieme degli enti a per $\iota \in I$; in particolare, $\{a\}$ è l'insieme costituito dal solo elemento a.

L'accento acuto sopra un segno di relazione indica la negazione della medesima. Ad es.

$$(a \acute{\in} F) \equiv (a \text{ non appartiene ad } F).$$

Il significato della parentesi quadra è detto al n. **7**, quello dei simboli $\circ$, $\lhd$ è detto risp. ai nn. **9** e **10**.

---

11) Vedasi la recensione in Math. Reviews, **12** (1951), p. 626.

7. - Richiamo delle prime nozioni sui filtri.

DEF. - Chiamasi *filtro sopra un insieme* S[12]) ogni famiglia φ non vuota di sottoinsiemi di S soddisfaciente alle seguenti condizioni:

(φ1) $0 \notin \varphi$;

(φ2) da $A_1 \in \varphi$, $A_2 \in \varphi$ segue $A_1 \cdot A_2 \in \varphi$;

(φ3) da $A \in \varphi$, $B \supset A$ segue $B \in \varphi$.

DEF. - Chiamasi *base* di un filtro φ ogni famiglia β d'insiemi tale che

(β1) $\beta \subset \varphi$;

(β2) per ogni $F \in \varphi$ esiste $B \in \beta$ tale che $B \subset F$.

Ogni base di un filtro φ individua (s'intende: sopra il dato insieme S) il filtro stesso, nel senso che la stessa non può essere base per alcun altro filtro. Affinchè una famiglia β di sottoinsiemi di S sia base per un qualche filtro occorre e basta che ogni coppia d'insiemi di β abbia intersezione non vuota e contenente almeno un insieme di β. Il filtro avente β come base resta allora individuato come la totalità di quei sottoinsiemi di S i quali contengono almeno un insieme di β.

Indicheremo che β è una base del filtro φ scrivendo

$$\varphi = [\beta].$$

Notiamo in particolare che un filtro del tipo

$$\varphi = [A] \quad (\text{più propriamente: } \varphi = [\{A\}])$$

(A essendo un sottoinsieme non vuoto di S) consta di tutti e

---

12) La nozione di filtro è stata introdotta da H. CARTAN, nelle Note: *Théorie des filtres*, C. R. Acad. Sci. Paris, **205** (1937), p. 595-598; *Filtres et ultrafiltres*, ibid., p. 777-779. Per l'utilizzazione di tale nozione nella teoria degli spazi topologici vedasi N. BOURBAKI, *Topologie générale, Chap. I, II* (Paris, Hermann, 1940). Sui filtri vedasi anche G. CHOQUET, *Sur les notions de filtre et de grille*, C. R. Acad. Sci. Paris, **224** (1947), p. 171-173. Ulteriori contributi in J. SCHMIDT, *Beiträge zur Filtertheorie*: *I*, Math. Nachr. **7**, p. 359-378 (1952); *II*, ibid. **10**, p. 197-232 (1953).

soli i sottoinsiemi di S i quali contengono A. Pertanto, $B \in [A]$ equivale a $B \supset A$.

Def. - Detti φ, ψ due [13]) filtri su S, si dice che φ è *più fine di* ψ se è $\varphi \supset \psi$.

Tale relazione, consistendo in un'inclusione, è transitiva e disimmetrica: in base ad essa, dunque, ogni famiglia di filtri sopra un dato insieme potrà pensarsi ordinata. Due filtri dei quali uno sia più fine dell'altro si diranno *confrontabili*; quando così non sia, *inconfrontabili*.

Notiamo che:

(1) $$F \in \varphi \text{ equivale a } [F] \subset \varphi;$$

(2) $$F \subset G \text{ equivale a } [F] \supset [G].$$

8. - **Richiami di Topologia.** - Dicendo *spazio topologico* intendiamo che l'operazione di *chiusura* in esso definita soddisfi agli assiomi di Kuratowski [14]).

Una famiglia α d'insiemi di uno spazio topologico S costituisce una *base d'insiemi aperti* [*base d'insiemi chiusi*] se: (1) ogni insieme di S è aperto [chiuso]; (2) ogni insieme aperto di S è l'insieme-riunione [l'insieme-intersezione] di una conveniente sottofamiglia di α. Se α è una base d'insiemi aperti per S, la famiglia costituita dagl'insiemi $S - A$, con $A \in \varphi$, è una base d'insiemi chiusi per S; e viceversa.

La famiglia degl'intorni di un punto $p (\in S)$ [di un insieme $P (\subset S)$] costituisce un filtro, che indicheremo costantemente con σ_p [con σ_P]. Per *base d'intorni di un punto* p s'intende una base del filtro σ_p. La totalità degl'intorni aperti di un punto p [di un insieme P] costituisce una base d'intorni di p [di P] [15]).

---

[13]) Dicendo *due* intendo: *distinti*.

[14]) (K1) $\bar{0} = 0$; (K2) per ogni $A (\subset S)$ è $\bar{A} \supset A$; (K3) per ogni $A (\subset S)$, $B (\subset S)$ è $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$; (K4) per ogni $A (\subset S)$ è $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Ricordiamo che sono *chiusi* gl'insiemi tali che $\bar{A} = A$; *aperti* quelli tali che $\overline{S - A} = S - A$; un punto p è *aderente ad un insieme* A se $p \in \bar{A}$; è intorno di un punto p ogni insieme U tale che $p \notin \overline{S - U}$.

[15]) Non così, in generale, per la totalità degl'intorni chiusi di un punto.

Data che sia per ogni punto p di S una base d'intorni aperti β_p, la famiglia-riunione $\alpha = \bigcup_{p \in S} \beta_p$ è una base d'insiemi aperti per lo spazio. Viceversa, se α è una base d'insiemi aperti per S, allora la famiglia costituita da quegl'insiemi di α i quali contengono un dato punto p è una base d'intorni (aperti) di p.

Riportiamo, nella forma più adatta ai nostri fini, alcune usuali condizioni, restrittive della generalità della nozione di spazio topologico.

(T_0) Da $p \in \overline{\{q\}}$, $q \in \overline{\{p\}}$ segue $p = q$ (ossia: da $\sigma_p = \sigma_q$ segue $p = q$).

(T_1) Da $p \in \overline{\{q\}}$ segue $p = q$ (ossia: da $\sigma_p \subset \sigma_q$ segue $p = q$).

(T_2) Da « per ogni $U \in \sigma_p$, $V \in \sigma_q$ si ha $U \cdot V \neq 0$ [16]) segue $p = q$ »

(condizione di HAUSDORFF).

Evidentemente: da (T_2) segue (T_1); da (T_1) segue (T_0).

Uno spazio topologico S è *regolare* se: (a) soddisfa alla condizione (T_0); (b) per ogni $p \in S$ il filtro σ_p ha una base d'insiemi chiusi. Od anche: (a); (b') da $p \bar{\in} \bar{Q}$ segue l'esistenza di $U \in \sigma_p$, $V \in \sigma_Q$ tali che $U \cdot V = 0$ [17]) [18]).

---

[16]) Ossia, con le notazioni che introduciamo al n. 9, da $\sigma_p \circ \sigma_q$ segue $p = q$.

[17]) Dalla (b) segue la (b'). Infatti, essendo $S - \bar{Q} \in \sigma_p$ esiste $V \in \sigma_p$ tale che $\bar{V} = V$, $V \subset S - Q$. Gl'intorni $V \in \sigma_p$, $S - V \in \sigma_Q$ soddisfano alla (b').

Dalla (b') segue la (b). Detto U in intorno di p, sia U_0 un intorno aperto di p, $U_0 \subset U$. Posto $Q = S - U_0$, esistono, per la (b'), due intorni aperti $V \in \sigma_p$, $W \in \sigma_Q$ tali che $V \cdot W = 0$; è $W \supset S - U$. Dunque $U \supset S - W = \overline{S - W} \in \sigma_p$.

[18]) Uno spazio regolare soddisfa necessariamente alla condizione (T_2). Detti infatti p, q due punti qualunque e detto U un intorno p. es. di p tale che $q \bar{\in} U$, sia V un intorno chiuso di p contenuto in U; allora $S - V$ è un intorno di q: p e q ammettono dunque una coppia d'intorni disgiunti.

9. - Relazioni fondamentali fra filtri e famiglie di filtri. - Stabiliamo in questo n. quelle relazioni che consentiranno l'espressione più concisa del seguito, in quanto contengono in sè quei concetti di « vicinanza » in seno ad una famiglia di filtri, per i quali la famiglia stessa si riconoscerà poi dotata di topologia.

Le relazioni $\circ$ e $\lhd$ che introduciamo rappresentano la naturale estensione, al caso di filtri e famiglie di filtri, delle relazioni $A \cdot B \neq 0$ e $A \subset B$ fra insiemi [19]).

I filtri di cui si parla nel seguito s'intendono sempre sopra un medesimo insieme S, affatto arbitrario, che non verrà menzionato.

DEF. - Diciamo che *un filtro* α *è legato con un filtro* β se da $A \in \alpha$, $B \in \beta$ segue $A \cdot B \neq 0$. Lo indichiamo scrivendo

$$\alpha \circ \beta .$$

Si tratta evidentemente di una relazione riflessa e simmetrica; sussiste, in particolare, ogni volta che dei due filtri uno è più fine dell'altro.

In particolare:

$$(\alpha \circ [B]) \equiv (\text{per ogni } A \in \alpha \text{ si ha } A \cdot B \neq 0), \tag{3}$$

$$([A] \circ [B]) \equiv (A \cdot B \neq 0). \tag{4}$$

In tale senso, la relazione $\circ$ può interpretarsi come sussistente fra un filtro e un insieme (*filtro* α *legato con l'insieme me* B) e, più banalmente, fra due insiemi (*insiemi* A, B *legati fra loro*).

Dalla definizione data discendono immediatamente le seguenti proposizioni.

(5) Da $\alpha \circ \beta$, $\alpha_1 \subset \alpha$, $\beta_1 \subset \beta$ segue $\alpha_1 \circ \beta_1$.

---

[19]) Come si intravede dal contenuto di questo n. **9** e del n. **10**, la trattazione potrebbe configurarsi in uno schema logico-algebrico di molto maggiore generalità ed eleganza formale; un tale studio mi sembra presentare interesse per l'Algebra degli insiemi.

L'esposizione che qui si dà è intesa soltanto a soddisfare alle esigenze del seguito.

(6) « Per ogni $B \in \beta$ si ha $\alpha \circ [B]$ » equivale a $\alpha \circ \beta$.

(7) Da $\gamma \circ [A + B]$ (quindi, in particolare, da $A + B \in \gamma$) segue « $\gamma \circ [A]$ oppure $\gamma \circ [B]$ ».

(8) Da $\gamma \circ [A]$, $\gamma \circ [B]$, $A \cdot B = 0$ segue $A \notin \gamma$, $B \notin \gamma$.

DEF. - Diciamo che *una famiglia di filtri* Γ *è legata con un filtro* α se per ogni $A \in \alpha$ esiste un filtro $\gamma \in \Gamma$ tale che $\gamma \circ [A]$. Indichiamo tale relazione con

$$\Gamma \circ \alpha, \quad \text{oppure} \quad \alpha \circ \Gamma.$$

L'adozione del segno già impiegato si giustifica osservando che

(9) $$\alpha \circ \{\beta\} \text{ equivale a } \alpha \circ \beta.$$

Dalla definizione ora data discendono immediatamente le seguenti proposizioni.

(10) Da $\alpha \circ \Gamma$, $\alpha_1 \subset \alpha$, $\Gamma_1 \supset \Gamma$ segue $\alpha_1 \circ \Gamma_1$.

(11) « Per ogni $A \in \alpha$ si ha $[A] \circ \Gamma$ » equivale a $\alpha \circ \Gamma$.

(12) Da $\alpha \circ (\Gamma + \Delta)$ segue « $\alpha \circ \Gamma$ oppure $\alpha \circ \Delta$ ».

(13) Da $\alpha \,\acute{\circ}\, \Gamma$, $\gamma \in \Gamma$ segue $\alpha \,\acute{\circ}\, \gamma$; dunque, a fortiori, $[A] \,\acute{\circ}\, \gamma$ per ogni $A \in \alpha$.

10. - DEF. Diciamo che *una famiglia di filtri* Γ *entra in un filtro* α se per ogni $A \in \alpha$ esiste un filtro $\gamma \in \Gamma$ tale che $A \in \gamma$. Indichiamo tale relazione scrivendo

$$\Gamma \lhd \alpha.$$

In particolare:

(14) $$(\{\beta\} \lhd \alpha) \equiv (\beta \supset \alpha),$$

(15) $$(\{\beta\} \lhd [A]) \equiv (A \in \beta),$$

(16) $$(\{[B]\} \lhd [A]) \equiv (B \subset A).$$

La relazione $\lhd$ può pertanto interpretarsi come sussistente fra due filtri (un filtro entra in un altro se è più fine di questo), fra un filtro e un insieme (il filtro entra nell'insieme se questo gli appartiene) e, banalmente, fra due insiemi (un insieme entra in un altro se è contenuto in questo).

(17) Da $\Gamma \lhd \alpha$ segue $\alpha \circ \Gamma$; non viceversa.

(18) Da $\alpha \in \Gamma$ segue $\Gamma \lhd \alpha$ (quindi anche $\alpha \circ \Gamma$).

(19) Da $\Gamma \lhd \alpha$, $\Gamma_1 \supset \Gamma$, $\alpha_1 \subset \alpha$ segue $\Gamma_1 \lhd \alpha_1$.

11. - Def. Diciamo che una famiglia di filtri Φ sopra un insieme S è *regolare* se da $\alpha \in \Phi$, $\Gamma \subset \Phi$, $\alpha \circ \Gamma$ segue $\Gamma \lhd \alpha$; (ossia, tenuta presente la (17), se entro Φ le due relazioni $\alpha \circ \Gamma$, $\Gamma \lhd \alpha$ si equivalgono).

Condizione di regolarità per una famiglia di filtri. - *Affinchè una famiglia di filtri Φ sopra un insieme S sia regolare è necessario e sufficiente che per ogni filtro α di Φ, in ogni insieme $A \in \alpha$ sia contenuto un insieme $A' \in \alpha$ tale che A appartenga ad ogni filtro di Φ il quale sia legato con A'.*

Dim. - Proviamo la necessità della condizione. Posto $A \in \alpha \in \Phi$, indichiamo con Γ_A la totalità dei filtri di Φ legati con A ai quali A non appartiene. Ammettendo che per ogni $A' \in \alpha$, $A' \subset A$ esistano filtri di Φ legati con A', ai quali A non appartenga (ossia che fra i filtri di Γ_A ve ne siano di legati con ogni tale A'), ne viene che α è legato con Γ_A senza che $A (\in \alpha)$ appartenga ad alcun filtro di Γ_A; ossia, che la famiglia Φ non è regolare.

Proviamo la sufficienza della condizione. Sia $\alpha \circ \Gamma$; proviamo che per ogni $A \in \alpha$ esiste $\gamma \in \Gamma$ tale che $A \in \gamma$. Sia $A' \subset \alpha$, $A' \subset A$ tale che A appartenga ad ogni filtro di Φ il quale sia legato con A'. Per l'ipotesi che $\alpha \circ \Gamma$, esiste un filtro γ di Γ legato con A'. Per la proprietà ammessa si ha allora $A \in \gamma$.

Topologia forte in una famiglia di filtri.

12. - Sia S un insieme qualunque[20]) e sia Φ una famiglia di filtri su S.

Conveniamo di associare ad ogni sottofamiglia Θ di Φ la famiglia Θ' definita da

$$(\lhd) \qquad (\varphi \in \Theta') \equiv (\varphi \in \Phi,\ \Theta \lhd \varphi).$$

---

20) Salvo quando è esplicitamente assegnata una struttura sull'insieme S, esso s'intende a priori amorfo.

Sussistono le proposizioni seguenti:

(K1) $0' = 0$;

(K2) per ogni $\Theta(\subset \Phi)$ si ha $\Theta \subset \Theta'$;

(K3) per ogni $\Theta_1(\subset \Phi)$, $\Theta_2(\subset \Phi)$ si ha $(\Theta_1 + \Theta_2)' = \Theta_1' + \Theta_2'$;

(K4) per ogni $\Theta(\subset \Phi)$ si ha $(\Theta')' = \Theta'$.

La (K1) è evidente; la (K2) segue immediatamente dalla prop. (18).

Proviamo l'uguaglianza (K3), come coesistenza di due inclusioni opposte. Suppongasi dapprima $\varphi \in \Theta_1' + \Theta_2'$; sia p. es. $\varphi \in \Theta_1'$. Ne segue $\Theta_1 \lhd \varphi$ e quindi (prop. (19)) $(\Theta_1 + \Theta_2) \lhd \varphi$; essendo inoltre $\varphi \in \Phi$, si ha $\varphi \in (\Theta_1 + \Theta_2)'$. Inversamente, suppongasi $\varphi \in \Phi$, $\varphi \notin \Theta_1' + \Theta_2'$. Essendo $\varphi \in \Phi - \Theta_i'$ $(i = 1, 2)$ si ha $\Theta_i \not\lhd \varphi$; ossia, esiste $F_i \in \varphi$ tale che per ogni $\theta_i \in \Theta_i$ si ha $F_i \notin \theta_i$; allora (poichè, se γ è un filtro, da $A \notin \gamma$, $A_1 \subset A$ si deduce $A_1 \notin \gamma$), per ogni $\theta \in \Theta_1 + \Theta_2$ si ha $F_1 \cdot F_2 \notin \theta$ $(F_1 \cdot F_2 \in \varphi)$. Si ha dunque $(\Theta_1 + \Theta_2) \not\lhd \varphi$, ossia $\varphi \notin (\Theta_1 + \Theta_2)'$.

Proviamo la (K4). Stante la (K2), basta provare che $(\Theta')' \subset \Theta'$. Sia $\varphi \in (\Theta')'$, dunque $\Theta' \lhd \varphi$: ciò significa che per ogni $F \in \varphi$ esiste θ' tale che $F \in \theta' \in \Theta'$. Ne viene, dalla stessa $(\lhd)$, che per ogni $F \in \varphi$ esiste θ' tale che: (a) $F \in \theta'$; (b) per ogni $T' \in \theta'$ esiste $\theta \in \Theta$ tale che $T' \in \theta$. Ponendo nella (b) $T' = F$ (il che è legittimo a seguito della (a)) si ottiene: per ogni $F \in \varphi$ esiste $\theta \in \Theta$ tale che $F \in \theta$; il che significa $\Theta \lhd \varphi$, ossia $\varphi \in \Theta'$.

Poichè le proprietà (K1),... (K4) di cui gode la corrispondenza definita fra i sottoinsiemi di Φ sono i noti « assiomi di KURATOWSKI », concludiamo che: *una famiglia di filtri Φ sopra un insieme S costituisce uno spazio topologico quando come chiusura di un insieme Θ $(\subset \Phi)$ si assuma l'insieme Θ' di tutti e soli i filtri di Φ in cui Θ entra.*

Chiameremo **topologia forte** (in una famiglia di filtri Φ sopra un insieme S) la topologia ora stabilita; chiameremo **spazio forte** lo spazio Φ così ottenuto.

Tenuto conto delle (K2), $(\lhd)$, si ha

$$(\Theta' = \Theta) \equiv (\Theta' \subset \Theta) \equiv ((\varphi \in \Phi,\ \Theta \lhd \varphi) \rightarrow (\varphi \in \Theta)),$$

ossia: nella topologia forte un insieme risulta *chiuso* se e solo se contiene tutti i filtri in cui entra; risultano *aderenti* ad un insieme tutti e soli quei filtri nei quali l'insieme entra; un insieme risulta *aperto* se e solo se l'insieme complementare non entra in alcuno dei suoi filtri.

13. - Notiamo che: *ogni spazio forte di filtri soddisfa alla condizione* (T_0).

DIM. - Suppongasi $\varphi \in \{\psi\}'$, $\psi \in \{\varphi\}'$. Tenuto conto della prop. (14), se ne deduce $\varphi \subset \psi$, $\psi \subset \varphi$; donde $\varphi = \psi$.

14. - Per poter riconoscere una particolare base (d'insiemi aperti o d'insiemi chiusi) nello spazio Φ, premettiamo una considerazione che giova anche come chiarimento del significato della topologia forte.

Detta Φ una famiglia qualunque di filtri sopra un insieme S, consideriamo, per ogni sottoinsieme A di S, i due insiemi di filtri Φ_A^*, Φ_A^0 definiti da

$$(\varphi \in \Phi_A^*) \equiv (\varphi \in \Phi,\ A \in \varphi) \tag{20}$$

$$(\varphi \in \Phi_A^0) \equiv (\varphi \in \Phi,\ \varphi \circ [A]). \tag{21}$$

Proviamo che sussistono le relazioni:

$$\Phi_A^* \subset \Phi_A^0, \tag{22}$$

$$\Phi_A^* \cdot \Phi_{S-A}^0 = 0, \tag{23}$$

$$\Phi_A^0 + \Phi_{S-A}^* = \Phi, \tag{24}$$

La (22) è evidente.

Per provare la (23), basta osservare che da $\varphi \in \Phi_A^*$, ossia da $A \in \varphi$, segue $\varphi \not\circ [S - A]$, ossia $\varphi \notin \Phi_{S-A}^0$.

Per provare la (24), si osservi che da $\varphi \in \Phi - \Phi_A^0$ segue che esiste $F \in \varphi$ tale che $F \cdot A = 0$, ossia $F \subset S - A$; essendo allora $S - A \in \varphi \in \Phi$, si ha $\varphi \in \Phi_{S-A}^*$.

Dalle (23) e (24) segue

$$\Phi_A^0 - \Phi_A^* = \Phi - ((\Phi - \Phi_A^0) + \Phi_A^*) = \Phi - (\Phi_{S-A}^* + \Phi_A^*) \tag{25}$$

donde, attesa la simmetria di quest'ultima espressione in A ed $S-A$:

$$\Phi_A^0 - \Phi_A^* = \Phi_{S-A}^0 - \Phi_{S-A}^* . \tag{26}$$

Si ha pertanto la seguente *decomposizione di Φ in tre parti a due a due disgiunte, in dipendenza dall'assegnazione del sottoinsieme A di S*: filtri di Φ cui appartiene A, filtri di cui appartiene $S-A$, filtri di Φ che sono legati tanto ad A quanto ad $S-A$. In simboli:

$$\Phi = \Phi_A^* + \Phi_{S-A}^* + (\Phi_A^0 - \Phi_A^*). \tag{27}$$

Ciò premesso, è facile provare che per ogni sottoinsieme A di S si ha (nella topologia forte in Φ)

$$\Phi_A^{0\prime} = \Phi_A^0 . \tag{28}$$

DIM. - Suppongasi $\varphi \in \Phi_A^{0\prime}$, ossia $\Phi_A^0 \lhd \varphi$: ciò significa che per ogni $F \in \varphi$ esiste un filtro γ tale che $F \in \gamma \in \Phi_A^0$, ossia tale che: (a) $F \in \gamma$; (b) $\gamma \circ [A]$. E poichè la (b) significa (cfr. (3)) che per ogni $G \in \gamma$ è $G \cdot A \neq 0$, dalla (a) si trae $F \cdot A \neq 0$, onde, stante l'arbitrarietà di $F (\in \varphi)$, segue $\varphi \circ [A]$; ossia $\varphi \in \Phi_A^0$.

Tenendo presente che dalle (23), (24) viene $\Phi_A^* = \Phi - \Phi_{S-A}$, la constatazione (28) può completarsi, nel senso che: *detto A un sottoinsieme qualunque di S, la totalità dei filtri di Φ i quali sono legati ad A costituisce, nella topologia forte, un insieme chiuso; la totalità dei filtri i quali entrano in A, un insieme aperto.*

Non viceversa: ossia, in generale un insieme chiuso [aperto] in Φ non è necessariamente del tipo Φ_A^0 $[\Phi_A^*]$. Basta osservare che un insieme-somma del tipo $\Phi_P^* + \Phi_Q^*$ $(P \subset S,\ Q \subset S)$ non è, in generale, del tipo Φ_A^*. È notevole al proposito il seguente risultato.

15. - Basi per la topologia forte. *Nella topologia forte in Φ, per ogni $\varphi \in \Phi$ la famiglia d'insiemi di filtri*

$$\{\Phi_F^*\}_{F \in \varphi} \qquad \text{(definiti in (20))}$$

costituisce una base d'intorni (aperti) di φ.

DIM. - Si è già provato che ogni insieme Φ_F^*, con $F \subset S$, è aperto; inoltre, dalla (20) segue $\varphi \in \Phi_F^*$; ogni tale insieme è dunque un intorno di φ. Resta da provare che per ogni $\varphi \in \Phi$, in ogni intorno di φ è contenuto un intorno del tipo Φ_F^*, con $F \in \varphi$.

La tesi sarà raggiunta provando che un insieme Ξ di filtri, il quale non contenga alcun insieme del tipo Φ_F^* con $F \in \varphi$, non può essere un intorno di φ. L'ipotesi fatta su Ξ equivale a dire che per ogni $F \in \varphi$ non è vuoto l'insieme dei filtri η di Φ tali che $F \in \eta$, $\eta \notin \Xi$; ossia, che per ogni $F \in \varphi$ esiste almeno un filtro η di Φ tale che $F \in \eta \in (\Phi - \Xi)$. Se ne deduce $(\Phi - \Xi) \lhd \varphi$, quindi $\varphi \in (\Phi - \Xi)'$, il che esclude che Ξ possa essere un intorno di φ.

Dal teorema ora dimostrato consegue immediatamente che: *le famiglie d'insiemi di filtri*

$$\{\Phi_F^*\}_{F \varepsilon \varphi \varepsilon \Phi}, \quad \{\Phi_F^0\}_{F \varepsilon \varphi \varepsilon \Phi} \qquad \text{(definiti in (20), (21))}$$

costituiscono rispettivamente una base d'insiemi aperti e una base d'insiemi chiusi per lo spazio Φ, dotato della topologia forte.

16. - Condizioni (T_1) e (T_2) per la topologia forte. È facile stabilire le condizioni che, imposte alla famiglia di filtri Φ, equivalgono alle condizioni (T_1), (T_2) e alla regolarità per lo spazio che se ne ottiene con la topologia forte.

CONDIZIONE (T_1). - *Affinchè lo spazio forte Φ soddisfi alla condizione (T_1) è necessario e sufficiente che i filtri di Φ siano a due a due inconfrontabili.*

DIM. - L'essere $\psi \in \{\varphi\}'$, ossia $\{\varphi\} \lhd \psi$, equivale (cfr. (14)) a $\varphi \supset \psi$. Pertanto, l'essere $\{\varphi\}' = \varphi$ equivale a « da $\psi \in \Phi$, $\psi \subset \varphi$ segue $\psi = \varphi$ »; la condizione (T_1) si esprime dunque col postulare che « per ogni φ, per ogni $\psi \neq \varphi$ si ha $\psi \not\subset \varphi$ ». Attesa la simmetria, si ha la tesi.

CONDIZIONE (T_2). - *Affinchè lo spazio forte Φ soddisfi alla condizione (T_2) è necessario e sufficiente che per ogni coppia φ_1, φ_2 di filtri distinti di Φ esistano $F_1 \in \varphi_1$, $F_2 \in \varphi_2$ tali che $F_1 \cdot F_2$ non appartenga ad alcun filtro di Φ.*

DIM. - Tenendo presente il teorema sulle basi d'intorni nella topologia forte, la condizione (T_2) appare equivalente all'affermazione: per ogni coppia φ_1, φ_2 di filtri distinti di Φ esistono $F_1 \in \varphi_1$, $F_2 \in \varphi_2$ tali che $\Phi^*_{F_1} \cdot \Phi^*_{F_2} = 0$. Dall'identità $\Phi^*_{F_1} \cdot \Phi^*_{F_2} = \Phi^*_{F_1 \cdot F_2}$ (di constatazione immediata) e tenendo presente che l'essere $\Phi^*_{F_1 \cdot F_2} = 0$ equivale al non appartenere $F_1 \cdot F_2$ ad alcun filtro di Φ, si ha la tesi.

COROLLARIO. - *Se per ogni coppia di filtri* φ_1, φ_2 *distinti di* Φ *si ha* $\varphi_1 \acute{o} \varphi_2$, *lo spazio forte* Φ *soddisfa alla condizione* (T_2).

DIM. - L'essere i filtri di Φ a due a due slegati implica, evidentemente, il sussistere della condizione che appare nel teorema precedente.

17. - Condizione di regolarità per la topologia forte. *Affinchè lo spazio forte* Φ *sia regolare è necessario e sufficiente che per ogni filtro* $\varphi (\in \Phi)$ *e per ogni famiglia di filtri* $\Theta = \{\theta^\iota\}_{\iota \in I}$ $(\subset \Phi)$ *la quale non entri in* φ, *esista un insieme* $F_0 \in \varphi$ *e per ogni* $\iota \in I$ *esista un insieme* $T_0^\iota \in \theta^\iota$, *tali che nessuna delle intersezioni* $F_0 \cdot T_0^\iota$ $(\iota \in I)$ *appartenga a filtri di* Φ.

DIM. - Sappiamo che $\{\Phi^*_F\}_{F \in \varphi}$ è una base d'intorni di φ. Inoltre, constatiamo che la famiglia d'insiemi di filtri $\{\bigcup_{\iota \in I} \Phi^*_{T^\iota}\}_{T^\iota \in \theta^\iota}$ è una base d'intorni per l'insieme Θ: infatti, ogni suo insieme è intorno di ogni θ^ι in quanto per ogni $\iota \in I$ in esso è contenuto un intorno $\Phi^*_{T^\iota}$ di θ^ι; d'altra parte, essendo che ogni intorno di Θ contiene necessariamente un intorno di ogni θ^ι, quindi un insieme del tipo $\Phi^*_{T^\iota}$, ne viene che ogni intorno di Θ contiene un insieme di filtri del tipo $\bigcup_{\iota \in I} \Phi^*_{T^\iota}$.

Ciò premesso, proviamo dapprima che la condizione enunciata è sufficiente. Poichè già sappiamo essere soddisfatta per lo spazio forte Φ la condizione (T_0), basta provare che un filtro qualunque φ $(\in \Phi)$ e un insieme chiuso qualunque $\Theta = \{\theta^\iota\}_{\iota \in I}$ $(\subset \Phi)$ non contenente φ ammettono rispettivamente due intorni disgiunti. Essendo $\Theta' = \Theta$, si ha $\Theta \not\triangleleft \varphi$; consideriamo allora gl'insiemi F_0, T_0^ι $(\iota \in I)$ di cui nell'enunciato, e proviamo che per l'intorno $\Phi^*_{F_0}$ di φ e per l'intorno $\Psi_0 = \bigcup_{\iota \in I} \Phi^*_{T_0^\iota}$ di Θ si ha $\Phi^*_{F_0} \cdot \Psi_0 = 0$. Per assurdo, ammesso che per un filtro ξ si avesse (a) $\xi \in \Phi^*_{F_0}$, (b) $\xi \in \Psi_0$ (dunque $\xi \in \Phi^*_{T_0^{\iota_0}}$ per un conveniente indice ι_0), ne verrebbe (a) $F_0 \in \xi$, (b) $T_0^{\iota_0} \in \xi$; si avrebbe allora $F_0 \cdot T_0^{\iota_0} \in \xi$, contro l'ipotesi fatta in enunciato.

Proviamo poi che la condizione enunciata è necessaria. La regolarità dello spazio implica che per ogni coppia φ, Θ tale che $\varphi \notin \Theta'$ esistono un intorno Φ_0 di φ ed un intorno Ψ_0 di Θ tali che $\Phi_0 \cdot \Psi_0 = 0$. Detti allora F_0, T_0^ι $(\iota \in I)$ insiemi rispettivamente di φ e di θ^ι tali che $\Phi^*_{F_0} \subset \Phi_0$, $\bigcup_{\iota \in I} \Phi^*_{T_0^\iota} \subset \Psi_0$ (insiemi esistenti in virtù delle proprietà relative alle basi d'intorni, sopra richiamate) si ha $\Phi^*_{F_0} \cdot \Phi^*_{T_0^\iota} = 0$ $(\iota \in I)$; e allora, a nessun filtro di Φ possono appartenere, per alcuno $\iota \in I$, F_0 assieme a T_0^ι. L'essere $F_0 \cdot T_0^\iota \notin \xi$ per ogni $\iota \in I$ e per ogni $\xi \in \Phi$ prova dunque che la condizione in enunciato è soddisfatta.

COROLLARIO. - *Una condizione sufficiente affinchè lo spazio forte Φ sia regolare è che Φ sia regolare come famiglia di filtri, cioè che da $\varphi \circ \Theta$ $(\varphi \in \Phi, \Theta \subset \Phi)$ segua $\Theta \triangleleft \varphi$.*

DIM. - Si constata immediatamente che la regolarità di una famiglia di filtri implica il sussistere della condizione di cui al teorema precedente, quindi la regolarità dello spazio forte.

18. - Teorema di subordinazione per la topologia forte. *Sia S uno spazio (T_0) e sia $\Sigma = \{\sigma_p\}_{p \in S}$ la famiglia dei filtri degl'intorni dei punti di S. Se Φ è una famiglia di filtri su S tale che $\Sigma \subset \Phi$, allora il sottospazio Σ dello spazio forte Φ è in isomorfismo topologico con S, secondo la corrispondenza*

$$(\bullet) \qquad p(\in S) \to \sigma_p(\in \Sigma).$$

DIM. - La condizione (T_0) ammessa per lo spazio S assicura la biunivocità della corrispondenza (.) fra S e Σ. Se $E \subset S$, indichiamo con $\bar{E}$ la chiusura di E nella topologia di S; indichiamo con Σ_E l'insieme $\{\sigma_p\}_{p \varepsilon E}$ che secondo la (.) corrisponde ad E in Σ.

Proviamo che, detto A un sottoinsieme qualunque di S, un filtro σ_p ($\in \Sigma$) è aderente a Σ_A (nella topologia forte in Φ) se e soltanto se p è aderente ad A (nella topologia di S). Ossia, proviamo che

$$p \in \bar{A} \quad \text{equivale a} \quad \sigma_p \in \Sigma'_A \cdot \Sigma.$$

L'affermazione $p \in \bar{A}$ equivale, ovviamente, a « ogni intorno di p è intorno di almeno un punto di A » ossia a « per ogni $P \in \sigma_p$ esiste $x \in A$ tale che $P \in \sigma_x$ » ossia a « per ogni $P \in \sigma_p$ esiste $\sigma_x \in \Sigma_A$ tale che $P \in \sigma_x$ », affermazione che si scrive anche $\Sigma_A \lhd \sigma_p$, ossia $\sigma_p \in \Sigma'_A$.

Attesa l'equivalenza di $\sigma_p \in \Sigma'_A$ con $\sigma_p \in \Sigma'_A \cdot \Sigma$, si ha la tesi.

COROLLARIO. - *Ogni spazio-*(T_0) *è rappresentabile come spazio forte di filtri; e precisamente, la topologia forte nella famiglia Σ dei filtri degl'intorni dei punti di uno spazio-*(T_0) *S coincide con la topologia dello spazio S, quando ogni punto $p(\in S)$ s'identifichi col filtro $\sigma_p(\in \Sigma)$ dei suoi intorni.*

DIM. Segue dal teorema precedente, quando si supponga $\Phi = \Sigma$.

Si noti che: *la topologia forte in una famiglia di filtri Φ sopra un insieme S subordina in ogni famiglia $\Phi_1 \subset \Phi$ la topologia forte su Φ_1.* (Cfr. n. **25**, in fine).

19. - OSSERVAZIONE. È evidente che uno spazio topologico S che non soddisfi alla condizione (T_0) non può pensarsi rappresentabile come spazio forte di filtri, secondo la definizione che qui si è data. Per estendere tale possibilità agli spazi non-(T_0), dovrebbe modificarsi il significato stesso di *famiglia* di filtri, nel senso di ammettere che uno stesso filtro possa comparire anche *più volte* in una famiglia [21]). Non ci è parso che siffatta modifica, la quale implica una notevole complicazione formale e concettuale, sia conveniente, dato il modesto vantaggio di generalità che se ne otterrebbe.

Topologia debole in una famiglia di filtri.

20. - Sia ancora S un insieme qualunque[22]) e sia Φ una famiglia di filtri su S.

(o) Conveniamo di dire che un insieme Γ ($\subset \Phi$) è *assolutamente chiuso* se contiene ogni filtro con cui è legato; ossia se

$$\text{da} \quad \varphi \in \Phi, \ \varphi \circ \Gamma \quad \text{segue} \quad \varphi \in \Gamma.$$

Sussistono le proposizioni seguenti:

(c1) 0 è assolutamente chiuso;

(c2) se Γ_1, Γ_2 sono assolutamente chiusi, lo è anche $\Gamma_1 + \Gamma_2$;

(c3) se Γ_ι $(\iota \in I)$ sono assolutamente chiusi, lo è anche $\bigcap_{\iota \in I} \Gamma_\iota$.

La (c1) è evidente; la (c2) segue immediatamente dalla prop. (12).

Proviamo la (c3). Detto Γ l'insieme-intersezione degl'insiemi Γ_ι $(\iota \in I)$, sia $\varphi \circ \Gamma$. Essendo, per ogni ι, $\Gamma \subset \Gamma_\iota$ da $\varphi \circ \Gamma$ si deduce che per ogni ι è $\varphi \circ \Gamma_\iota$ (prop. (10)). E poichè ogni Γ_ι è assolutamente chiuso ne segue che per ogni $\iota \in I$ si ha $\varphi \in \Gamma_\iota$, dunque $\varphi \in \Gamma$.

Poichè le proprietà ora constatate sono equivalenti alle condizioni che ad una famiglia Ω di sottoinsiemi di un insieme E debbonsi imporre affinchè nell'insieme resti definita una topologia nella quale siano « chiusi » tutti e soli gl'insiemi

---

[21]) Più precisamente: dovrebbe intendersi per *famiglia d'insiemi* $\{A\}_{\iota \in I}$ una legge la quale associ univocamente ad ogni elemento ι di un insieme I (dotato o no di struttura) un elemento A_ι di un insieme α di insiemi. Così viene definita una *Somenfamilie* in G. Nöbeling, op. cit. in [6]), p. 3. Una tale definizione riesce di utilità quando l'insieme I abbia a riguardarsi dotato di struttura (p. es. d'ordine); non qui, dove è essenziale non presupporre nell'insieme dei filtri altra struttura se non quella che risulta dalla loro situazione in S.

[22]) Vedi nota [20]).

di Ω, concludiamo che: *una famiglia Φ di filtri sopra un insieme S costituisce uno spazio topologico, quando si convenga di considerare « chiusa » una sottofamiglia Γ di Φ se e soltanto se contiene tutti i filtri di Φ con i quali è legata.*

Chiameremo **topologia debole** (in una famiglia di filtri Φ sopra un insieme S) la topologia ora stabilita; chiameremo **spazio debole** lo spazio Φ così ottenuto.

Dalla convenzione

$$\begin{pmatrix}\Gamma \text{ è chiuso nella} \\ \text{topologia debole}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\Gamma \text{ è assolutamente chiuso} \\ \text{come sottofamiglia di } \Phi\end{pmatrix}$$

segue che: per *chiusura* di un insieme Θ ($\subset \Phi$) nella topologia debole è da intendere l'intersezione, che indicheremo con Θ'', di tutti gl'insiemi chiusi contenenti Θ; un filtro φ ($\in \Phi$) risulta *aderente ad un insieme* Θ ($\subset \Phi$) se e soltanto se appartiene all'insieme Θ''.

Importa osservare che, deto Θ un insieme ($\subset \Phi$) di filtri, da $\varphi \circ \Theta$ si deduce $\varphi \in \Theta''$, *ma non inversamente* [23]).

A ragione di ciò, la caratterizzazione degl'intorni di un

---

[23]) Ove si sostituisse alla convenzione (o) la

(o*) ad ogni insieme Θ ($\subset \Phi$) si associa, come sua *chiusura*, l'insieme Θ^* di tutti e soli i filtri legati con Θ,

o l'altra equivalente,

(o*') si considera *aderente* ad un insieme Θ ($\subset \Phi$) un filtro φ se *e soltanto se* è $\varphi \circ \Theta$,

non ne risulterebbe per Φ una struttura di *spazio topologico* nel senso di KURATOWSKI. Mentre, infatti, gli assiomi (K1), (K2), (K3) risulterebbero verificati (l'ultimo, in virtù della (12)), non altrettanto si avrebbe, in generale, per (K4). (Un esempio può aversi considerando la famiglia di filtri Φ dell'esempio che si dà nel seguito, al n. **25**). La struttura topologica di un siffatto « spazio » può riconoscersi analoga (e l'analogia non è soltanto formale!) a quella della famiglia di tutte le funzioni definite per $a \leq x \leq b$ (x var. reale), quando una funzione f si dica *aderente* ad un insieme di funzioni F se e soltanto se esiste una successione di funzioni di F la quale *converga semplicemente* verso f. Cfr. M. FRÉCHET, *Sur quelques points du Calcul fonctionnel* (Thèse, Paris, 1906), Rend. Circ. Mat. Palermo, **22** (1906), p. 1-76.

filtro e l'assegnazione di una base non appare, per la topologia debole, suscettibile di una formulazione espressiva, del tipo di quella ottenuta per la topologia forte.

21. - Quanto alle proprietà di separazione, riportiamo soltanto il seguente risultato immediato.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una famiglia di filtri Φ *sopra un insieme* S *costituisca, con la topologia debole, uno spazio* (T_0) *è che i filtri di* Φ *siano a due a due slegati*:

$$(*) \qquad (\varphi \circ \psi) \equiv (\varphi = \psi).$$

Sotto tale condizione lo spazio stesso soddisfa, anzi, alla condizione (T_1).

Dim. - Tenendo presente che $\psi \in \{\varphi\}''$, ossia $\psi \circ \{\varphi\}$, equivale a $\psi \circ \varphi$ (prop. (9)), abbiamo

$$(\{\varphi\}'' = \varphi) \equiv (\psi \circ \{\varphi\} \rightarrow \psi \in \{\varphi\}) \equiv (*),$$

cioè la condizione $(*)$ equivale alla (T_1).

Poichè, d'altra parte, l'esistenza di una coppia φ, ψ di filtri distinti legati implica $\varphi \in \{\psi\}''$, $\psi \in \{\varphi\}''$, si ha che la condizione (T_0) implica la $(*)$, e la tesi resta provata.

22. - **Confronto delle due topologie.** Dalla prop. (17) segue subito che, indicando con Θ' e con Θ'' la chiusura di un insieme Θ $(\subset \Phi)$ nella topologia forte e risp. nella topologia debole, si ha per ogni Θ:

$$\Theta' \subset \Theta''.$$

Ne segue che *se un insieme di filtri risulta chiuso* [*aperto*] *nella topologia debole, esso risulta chiuso* [*aperto*] *anche nella topologia forte*; *ogni intorno di un filtro* φ *nella topologia debole è intorno del filtro stesso anche nella topologia forte.*

Ciò può anche esprimersi dicendo che *la topologia forte è più fine della topologia debole* [24]).

---

[24]) Cfr. N. Bourbaki, op. cit. in [12]), Chap. I, § 2.

In particolare, se ne deduce che la condizione provata equivalente alla (T_2) per lo spazio forte è necessaria (mentre, in realtà non è sufficiente [25])) affinchè lo spazio debole soddisfi alla (T_2).

Nulla può invece dedursi, per la topologia debole, dal teorema sulla regolarità dello spazio forte: e ciò, in quanto dall'essere regolare una certa topologia non può dedursi la regolarità delle topologie più fini, nè quella delle topologie meno fini [26]).

Ai fini del confronto delle due topologie è importante, in vista delle possibili applicazioni, la seguente constatazione.

Affinchè per una data famiglia di filtri Φ sopra un insieme S la topologia forte coincida con la topologia debole è necessario e sufficiente che la famiglia di filtri Φ sia regolare.

DIM. - Sia dapprima Φ una famiglia regolare di filtri: dall'essere, per $\varphi \in \Phi$, $\Theta \subset \Phi$

$$(\varphi \circ \Theta) \equiv (\Theta \lhd \varphi)$$

segue, per le definizioni stesse delle due topologie,

$$(\varphi \in \Theta'') \equiv (\varphi \in \Theta')$$

ossia $\Theta'' = \Theta'$.

Inversamente, se la famiglia di filtri Φ non è regolare, esistono un filtro $\varphi_0 \in \Phi$ e una sottofamiglia $\Theta_0 \subset \Phi$ tali che $\varphi_0 \circ \Theta_0$, $\Theta_0 \not\lhd \varphi_0$. Se ne deduce $\varphi_0 \in \Theta''$, $\varphi_0 \notin \Theta'$.

---

25) *Esempio* - Sia S l'insieme costituito dai simboli $a_{r,s} (r, s = 1, 2, \ldots)$. Siano $\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$, α, β i filtri aventi come basi rispettivamente le famiglie d'insiemi

$$\{\{a_{r,n}\}_{r>s}\}_{s=1,2,\ldots}\ ,\quad \{\{a_{2r,s}\}_{r,s>m}\}_{m=1,2,\ldots}\ ,\quad \{\{a_{2r+1,s}\}_{r,s>m}\}_{m=1,2\ldots}$$

Posto $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots} + \alpha + \beta$, è facile vedere che, pur essendo i filtri di Φ a due a due slegati, lo spazio debole non soddisfa alla condizione (T_2).

26) Su questa ed altre questioni circa l'indipendenza del carattere di regolarità dalla «finezza» dell atopologia vedasi R. PEREIRA COELHO, *Some properties of regular spaces*, Rev. Fac. Ciências Univ. Lisboa, 2ª série, A, vol. II (1952).

23. - **Lemma.** Condizione di regolarità per uno spazio topologico. - *Affinchè uno spazio-*(T_0) S *sia regolare è necessario e sufficiente che la famiglia* Σ *dei filtri* σ_p $(p \in S)$ *degl'intorni dei punti di* S *sia una famiglia regolare di filtri.*

DIM. - Ponendo, per $A \subset S$, $\Sigma_A = \{\sigma_p\}_{p \in S}$, si tratta di provare che la regolarità dello spazio S equivale alla validità dell'implicazione

$$\text{« da } \sigma_p \circ \Sigma_A \quad \text{segue } \Sigma_A \lhd \sigma_p \text{ »}$$

per ogni $p \in S$, $A \subset S$.

Nel nostro caso, $p \in \bar{A}$ equivale a $\Sigma_A \lhd \sigma_p$. E infatti, $p \in \bar{A}$ significa: se $U \in \sigma_p$, esiste $a \in A$ tale che $U \in \sigma_a$. L'implicazione di sopra equivale pertanto alla

$$\text{« da } \sigma_p \circ \Sigma_A \quad \text{segue } p \in \bar{A} \text{ ».}$$

Proviamo dunque il teorema, dopo questa riduzione formale.

Suppongasi dapprima S spazio regolare, e sia $\sigma_p \circ \Sigma_A$. Per ogni $U \in \sigma_p$ esiste $V \in \sigma_p$ tale che $\bar{V} = V \subset U$. Essendo, per ipotesi, $[V] \circ \sigma_a$ per un opportuno $a \in A$, si ha $a \in \bar{V}$, quindi $a \in U$. Nell'intorno, arbitrario, U di p vi sono dunque punti di A; ossia, è $p \in \bar{A}$.

Suppongasi poi Σ una famiglia regolare di filtri, ed S uno spazio-(T_0). Per provare la regolarità di S, proveremo che ogni filtro σ_p ha una base d'insiemi chiusi.

Dal teorema al n. **11** si ha che per ogni $U \in \sigma_p$ esiste $V \in \sigma_p$ tale che: (a) $V \subset U$; (b) da $\sigma_x \circ [V]$ segue $U \in \sigma_x$. Poichè $\sigma_x \circ [V]$ equivale a $x \in \bar{V}$, si ha che: (b) da $x \in \bar{V}$ segue $U \in \sigma_x$, quindi $x \in U$; ossia $\bar{V} \subset U$. Dunque, in ogni intorno U di p è contenuto un intorno chiuso $\bar{V}$ di p.

24. - **Teorema di subordinazione (per la topologia debole).** *Sia* S *uno spazio topologico e sia* $\Sigma = \{\sigma_p\}_{p \in S}$ *la famiglia dei filtri degl'intorni dei punti di* S. *Affinchè lo spazio debole di filtri* Σ *sia in isomorfismo topologico con* S *secondo la corrispondenza*

$$(\cdot) \qquad p(\in S) \to \sigma_p(\in \Sigma)$$

è necessario e sufficiente che lo spazio S *sia regolare.*

DIM. - Sia S regolare. Essendo soddisfatta la condizione (T_0), la (.) è una corrispondenza biunivoca fra i due insiemi S, Σ. Per ogni $E \subset S$, indichiamo con $\bar{E}$ la chiusura di E nella topologia di S; indichiamo con Σ_G l'insieme $\{\sigma_p\}_{p \in G}$ che secondo la (.) corrisponde ad E in Σ. Proviamo che Σ_G $(G \subset S)$ è chiuso nella topologia debole di Σ se e soltanto se G è chiuso nella topologia di S.

Dall'ipotesi che lo spazio S è regolare viene, in forza del Lemma precedente:

$$(p \in \bar{G}) \equiv (\sigma_p \circ \Sigma_G).$$

Ne segue, successivamente:

$$(G = \bar{G}) \equiv (p \in \bar{G} \rightarrow p \in G) \equiv (\sigma_p \circ \Sigma_G \rightarrow p \in G) \equiv$$

$$\equiv (\sigma_p \circ \Sigma_G \rightarrow \sigma_p \in \Sigma_G) \equiv (\Sigma_G'' = \Sigma_G).$$

Inversamente, suppongasi S irregolare. Proviamo che la (.) non è un isomorfismo topologico fra S e lo spazio debole Σ.

Se S non soddisfa alla condizione (T_0), l'asserto è evidente, dappoichè la (.) non è biunivoca.

Sia poi S uno spazio il quale: (a) soddisfi alla (T_0); (b) non sia regolare. Allora: (a) la (.) è biunivoca; (b) esistono (cfr. n. **23**) un filtro $\sigma_p \in \Sigma$ e una famiglia di filtri $\Sigma_A \subset \Sigma$ tale che

$$\sigma_p \circ \Sigma_A \quad \text{(quindi anche} \quad \sigma_p \in \Sigma_A''), \quad p \notin \bar{A}.$$

Ciò significa che in Σ il filtro σ_p è aderente all'insieme Σ_A mentre non avviene lo stesso per i loro corrispondenti secondo la (.) in S.

25. - **Osservazione.** Non sussiste per la topologia debole un teorema di subordinazione del tipo di quello stabilito per la topologia forte. Mostriamo qui di seguito con un esempio che quando anzichè $\Phi = \Sigma$ si supponga soltanto $\Phi \subset \Sigma$, il sottospazio Σ di Φ non è necessariamente in isomorfismo topologico con S.

Esempio. - Sia S l'insieme dei numeri reali x tali che

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x \neq \frac{1}{n}, \quad x \neq 1 - \frac{1}{n} \quad \text{per} \quad n = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

con la topologia subordinata da quella della retta reale.

Indicando con $I_{n,r}$, $J_{n,r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots; n = 3, 4, 5, \ldots)$ risp. gl'intervalli

$$\left| x - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{r}, \quad \left| x - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| < \frac{1}{r},$$

consideriamo i filtri (sull'insieme S)

$$\varphi_n = [\{(I_{n,r} + J_{n,r}) \cdot S\}_{r=1,2,\ldots}] \quad (n = 3, 4, 5, \ldots).$$

Indicando, al solito, con σ_x $(x \in S)$ il filtro degl'intorni di x in S, consideriamo la famiglia di filtri

$$\Phi = \{\sigma_x\}_{x \in S} + \{\varphi_n\}_{n=3,4,\ldots}.$$

Possiamo allora constatare che l'insieme G definito da $x (\in S) \leq \frac{1}{2}$ è chiuso nella topologia di S, mentre nello spazio debole Φ all'insieme corrispondente Σ_G risultano aderenti non solo i filtri φ_n (ognuno dei quali è legato con Σ_G) ma *anche il filtro* σ_1: e infatti, esso è legato con la famiglia $\Sigma_G + \{\varphi_n\}_{n=3,4,\ldots}$. Dunque $\Sigma''_G \neq \Sigma_G$; ossia, l'insieme Σ_G non è chiuso.

Si noti che l'esempio sta a mostrare anche che: *la topologia debole in famiglia* G *di filtri sopra un insieme* S *subordina in ogni famiglia* $\Phi_1 \subset \Phi$ *una topologia che, in generale, non è la topologia debole su* Φ_1. (Cfr. n. **18**).

APPENDICE

26. - Caso particolare dello « spazio d'insiemi ».

Quando la famiglia Φ sia costituita da soli filtri del tipo $[A]$ $(A \subset S)$, il relativo spazio forte può pensarsi come uno *spazio d'insiemi,* anzichè di filtri.

Sia, precisamente,

$$\Delta = \{ [A] \}_{A \subset S}, \quad \text{ovvero} \quad \mathfrak{D} = \{ A \}_{A \subset S}.$$

Si constata facilmente che, con la topologia forte, le famiglie

$$\{\{ X \}_{X \subset A} \}_{A \subset S} \quad , \quad \{\{ X \}_{X \cdot A \neq 0} \}_{A \subset S}$$

rappresentano rispettivamente una base d'insiemi aperti e una base d'insiemi chiusi.

Una base d'intorni di un elemento A di $\mathfrak{D}$ è costituita dall'intorno

$$\{ X \}_{X \supset A}.$$

Si ritrova così, espressa in termini topologici, la struttura di reticolo (più precisamente, di algebra di BOOLE) della totalità dei sottoinsiemi di S.

Anche in tale senso, la nozione di spazio di filtri appare un'estensione di una nozione classica.

Caso particolare dello « spazio di sezioni ».

27. - Aggiungo qui alcune considerazioni, a chiarimento della relazione, di cui è cenno al n. **4**, fra la definizione dello spazio dei numeri reali e il procedimento più generale qui descritto.

Nello schema originario di DEDEKIND, il continuo è ottenuto mediante l'*aggiunzione* di nuovi elementi (sezioni) all'insieme ordinato R dei numeri razionali [27]). Poichè, anche indi-

[27]) « Ogni volta che è data una sezione che non sia prodotta da « nessun numero razionale, noi *creiamo* un nuovo numero, un numero « *irrazionale* α che noi consideriamo come completamente definito da «.questa sezione; noi diremo che il numero α corrisponde a questa « sezione e che esso la produce. Adesso dunque ad ogni sezione cor« risponde uno ed un solo numero determinato, razionale o irrazionale, « e noi consideriamo come distinti due numeri, quando e solo quando « essi corrispondono a due sezioni sostanzialmente distinte.

« Dobbiamo adesso procurarci un criterio per poter ordinare tutti « i numeri *reali*, cioè tutti i numeri razionali e irrazionali. Per questo pendentemente da quanto si possa eccepire dal punto di vista logico-formale [28]), in tale procedimento vi è qualcosa d'insoddisfaciente (e particolarmente nell'aspetto topologico) nella diversità di origine degli elementi del continuo — quelli razionali sono elementi primitivi, mentre gl'irrazionali sono « *operazioni di ripartizione* » o « *coppie di classi* » dei primi — si preferisce, di solito, costruire un nuovo insieme di sezioni Ψ su R, nel quale si ritrova un sottoinsieme isomorfo ad R.

Precisamente: indicando con $[H; K]$ una sezione di R, di classi H e K, con la convenzione che nè H abbia massimo nè K abbia minimo e che *un* elemento di R possa non appartenere ad alcuna delle due classi, si pone

$$(*)\qquad ([H_1 ; K_1] \leq [H_2 ; K_2]) \equiv (H_1 \subset H_2)$$

Resta così definita in Ψ una struttura d'ordine, donde la topologia. Interessa notare che, come appare dalla $(*)$, *la topologia in Ψ viene definita indipendentemente dalla struttura preesistente in R*: il ruolo di questa è esaurito dopo che in base ad essa sono state definite le sezioni.

Ciò premesso, ecco in quali termini il procedimento *stesso* si esprime mediante i filtri.

Sia R un insieme numerabile, ordinato in guisa che: (a) non vi sia nè primo nè ultimo elemento; (b) non vi sia alcuna coppia di elementi consecutivi. È noto che queste due condizioni individuano un tipo d'ordine, che è quello dei numeri razionali [29]).

« scopo dobbiamo prima di tutto studiare le relazioni che passano tra « due sezioni, prodotte da due numeri α e β ».

Da R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, « Braunschweig, 1872, 2ª ed. 1892, 3ª ed. 1905). Traduz. ital. di O. Zariski (Roma, 1926), pag. 138.

[28]) Fra le varie argomentazioni critiche in opposizione al procedimento di aggiunzione cito quella in H. Weyl, *Das Kontinuum* (Berlin, W. de Gruyter, 1917), p. 22-23 della ristampa 1932.

[29]) Cfr. W. Sierpiński, *Leçons sur les nombres transfinis* (Paris, Gauthier-Villars, 1928), p. 145.

Chiamiamo filtro-sezione su R ogni filtro φ tale che:

(Φ1) φ ha una base di intervalli [30]);

(Φ2) assieme ad ogni intervallo, a φ ne appartiene uno il quale è da ambo i lati più ristretto del primo;

(Φ3) l'intersezione di tutti gli insiemi di φ contiene al più un punto.

Diciamo Φ la famiglia dei filtri-sezione su R, e pensiamola come spazio di filtri [31]).

Per dimostrare l'identità dei risultati forniti dai due procedimenti, ad ogni sezione $[H; K]$ si associ il filtro-sezione avente come base l'insieme di intervalli (h, k) con $h \in H$, $k \in K$. È subito visto che così ogni filtro-sezione resta associato ad una e ad una sola sezione. Si tratta di provare che la corrispondenza biunivoca così ottenuta fra gl'insiemi Φ e Ψ è un isomorfismo topologico. Ci dispensiamo dal farlo per esteso: riesce molto facile, ad esempio, confrontare una base d'intorni nella topologia delle sezioni [32]) con la base d'intorni di cui al n. **15** dei relativi filtri-sezione.

28. - Come si vede, l'impostazione della teoria dei numeri reali cambia di poco quando, anzichè all'usuale schema delle sezioni, si ricorra alla considerazione dello spazio di filtri. A mio avviso, vi è vantaggio forse anche dal lato espositivo; comunque, da quello concettuale.

Dal lato espositivo [33]), in alcuni metodi di trattazione si rende necessario il procedere per astrazione, che comporta no-

---

[30]) È sufficiente intendere la nozione d'intervallo nel senso restrittivo di: insieme definito da $a_1 < x < a_2$, con a_1, $a_2 \varepsilon R$.

[31]) Diciamo semplicemente così, in quanto la topologia forte e quella debole qui coincidono: lo si prova facilmente in base al teorema al n. **22**, tenuto conto della condizione di regolarità di cui al n. **11**.

[32]) Una tale base può essere la seguente: detta $[H; K]$ una sezione, si considerano come costituenti un intorno di quella le sezioni per le quali in un intervallo $h < x < k$ con $h \varepsilon H$, $k \varepsilon K$ sono contenuti punti di ambe le classi.

[33]) Non intendo con ciò riferirmi all'aspetto *didattico* (non fosse che per l'indeterminatezza di siffatto ordine di questioni), ma alle esigenze di semplicità, proprietà ed eleganza formale.

zioni di equivalenza e le relative giustificazioni, le quali appesantiscono la trattazione e, quel che più importa, male lasciano vedere quale sia l'oggetto definito: così è nel metodo di CANTOR delle successioni convergenti, nel metodo di PEANO dei limiti superiori, ecc. In altri metodi, si deve ovviare, mediante opportune convenzioni di esclusione o d'identificazione, alla doppia rappresentazione di particolari elementi: così è nel metodo delle scritture numeriche per es. decimali, e più in generale in tutti i metodi in cui si seguono procedimenti combinatori per pensare il numero reale come catena massimale di reticolo; lo stesso può dirsi per il metodo delle sezioni, quando si voglia intendere per sezione una *ripartizione* di R in due classi. Il solo modo d'esposizione, fra quegli usuali, che si salvi in tale riguardo è quello delle sezioni con la convenzione detta al n. precedente: tale metodo è, del resto, il più aderente all'idea dello spazio di filtri [34]).

Dal lato concettuale, si noti che, pur trattandosi di una topologia esprimibile in termini di struttura d'ordine, non può non essere sentita l'esigenza di un metodo il quale ne sia di per sè indipendente. Le altre nozioni topologiche (ad es. quella di insieme connesso) possono presentarsi, per il caso della retta, in una forma tutta particolare; ma non per questo non vengono subordinate a nozioni più generali appena ciò sia possibile.

Aggiungasi che, mentre le altre nozioni che si possono sfruttare per la definizione del campo reale trovano un impiego piuttosto ristretto nei successivi sviluppi dell'Analisi e della Topologia (quando non siano addirittura nozioni « provvisorie »), la nozione di filtro si presta ad accompagnare la

---

[34]) Così, ad esempio, in F. SEVERI, *Lezioni di Analisi, vol. I* (Bologna, Zanichelli, 1933); si confrontino le proprietà *a*), *b*), *c*) alla pag. 71 dell'edizione 1938 con le ($\Phi 1$), ($\Phi 2$), ($\Phi 3$) del n. precedente. Detto per incidenza, nel formulare e ordinare queste tre ultime, nel modo più appropriato per lo *spazio di filtri*, non ho avuto sott'occhio le dette *Lezioni*: la perfetta concordanza, anche formale, poi constatata mi convince ancor più, che fra gli usuali metodi quello in questione è il solo in cui non vi sia alcunchè di inutile o di artificioso.

trattazione in tutte le questioni di limite, continuità, compattezza ecc. e si presta bene, in particolare, nella pratica a rendere in certo senso concrete quelle pseudo-aggiunzioni che consistono nell'introdurre nuovi enti accanto a quelli preesistenti, con l'intendimento di tenerli tuttavia in diversa considerazione: l'*infinito* della retta reale ne è un tipico esempio [35]).

35) È ben curioso che nella teoria delle funzioni di variabile reale abbiano senso compiuto « intorno dell'*infinito* », « tendere all'*infinito* » e non « *l'infinito* »!