RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Moti di regime di un sistema non-lineare autonomo in due gradi di libertà, con debole accoppiamento capacitivo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 400-420

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__400_0>

MOTI DI REGIME DI UN SISTEMA NON-LINEARE AUTONOMO IN DUE GRADI DI LIBERTÀ, CON DEBOLE ACCOPPIAMENTO CAPACITIVO

Nota (*) *di* GIUSEPPE COLOMBO (*a Padova*)

Scopo del presente lavoro è quello di portare un ulteriore contributo allo studio, già altrove intrapreso [1]), del sistema autonomo

$$\text{A)} \begin{cases} \ddot{x} + \alpha(x^2 - a^2)\dot{x} + x = - my, \\ \ddot{y} + \beta(y^2 - b^2)\dot{y} + \omega^2 y = - nx. \end{cases}$$

In questa sede non si fa alcuna ipotesi nell'ordine di grandezza di α, β, a, b e ω mentre si suppongono m ed n sufficentemente piccoli (accoppiamento lasco di capacità).

Nel primo lavoro citato in [1]) ho dimostrato l'esistenza di soluzioni periodiche per il sistema A). Nel corso poi di una conferenza di Seminario tenuta la scorsa estate a Varenna [2]) ho esposto anche un criterio per riconoscere come, in certi casi che ivi vengono precisati, si riesca a provare l'esistenza di due soluzioni periodiche; queste godono della proprietà che, in corrispondenza ad una qualunque di esse, uno dei due sistemi si muove in prossimità della propria posizione di

---

(*) Pervenuta in Redazione l' 11 Agosto 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) G. COLOMBO, *Sulle oscillazioni non-lineari in due gradi di libertà*, Rend. Sem. Mat., Padova, Anno XIX, 1950, p. 413. *Sopra un sistema non-lineare in due gradi di libertà*, stessa rivista, Anno XXI, 1952, p. 64.

[2]) G. COLOMBO, *Sui sistemi autonomi di ordine superiore al secondo*, Pubblicazioni del C.I.M.E., Varenna, Settembre 1954, II parte.

equilibrio (instabile), l'altro in prossimità della propria soluzione periodica stabile e viceversa per l'altra soluzione.

Poichè queste due risultano certamente instabili e non si riesce a provare l'esistenza di altre soluzioni periodiche, (che non possano eventualmente coincidere con una di quelle dette sopra e per le quali perciò non si possa escludere a priori la stabilità) così si pone il problema della determinazione dei moti di regime di A) cioè di moti che, anche se non periodici, risultino asintoticamente stabili e perciò corrispondenti a moti reali.

All'uopo ho preso in considerazione il seguente sistema,

$$\text{B)} \begin{cases} \ddot{x} + f_1(x, \dot{x}) + g_1(x) = \varepsilon F_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \\ \ddot{y} + f_2(y, \dot{y}) + g_2(y) = \varepsilon F_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \end{cases}$$

ovviamente più generale di A), ove ho supposto che i due sistemi autonomi del secondo ordine, che si ottengono ponendo $\varepsilon = 0$, abbiano ciascuno un ciclo stabile.

Ho potuto provare che, per ε sufficentemente piccolo, tra i moti di B) ce n'è un'insieme ∞^2, corrispondenti ad un insieme ∞^1 di traiettorie nello spazio quadridimensionale, S_4, delle fasi, ricoprenti una varietà V^* chiusa bidimensionale di questo spazio; questo insieme di traiettorie è rappresentabile nell'ordinario spazio tridimensionale con l'insieme delle traiettorie definite da una equazione differenziale sulla superficie del toro.

Tra questi moti ve ne sono di periodici o non ve ne sono, secondo che un certo numero μ, caratteristico del sistema e dipendente con continuità da ε, è razionale oppure no. Nel secondo caso si hanno invece moti quasiperiodici. Comunque lo studio delle traiettorie su V^* è ricondoto ai classici studi, di Poincaré, Bohl, e Denjoy [3]), sulle traiettorie sopra un toro.

L'interesse di questo insieme di movimenti risiede inoltre sul fatto, importantissimo del punto di vista meccanico, che esso è stabile asintoticamente nel senso che la generica traiet-

---

3) A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, Journal d. Math., vol. 11 (1932), p. 333.

toria di B), uscente da un generico punto prossimo a V^*, tende per $t \to +\infty$, ad una di quelle su V^*.

La dimostrazione è condotta per la stessa suggestiva via seguita da N. Levinson, in una sua abbastanza recente ricerca [4]). L'esistenza della varietà V^* si consegue applicando il noto teorema di contrazione di Caccioppoli ad una opportuna trasformazione (che risulta una contrazione) di un certo insieme di varietà del tipo di V^*, in sè.

Avremmo potuto omettere qualcuna delle dimostrazioni sviluppate nel corso del lavoro, come abbiamo fatto per altre, perchè esse non sono che estensioni di quelle date corrispondentemente dal Levinson, ma l'abbiamo fatto per maggior chiarezza e comodità.

1. - Consideriamo i due sistemi autonomi

$$\begin{aligned} \ddot{x} + f_1(x, \dot{x}) + g_1(x) = 0 \\ \ddot{y} + f_2(y, \dot{y}) + g_2(y) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni di classe C^3, cioè continue, con le derivate prime seconde e terze, dei rispettivi argomenti. Supponiamo inoltre che ognuno dei sistemi autonomi 1_i) ($i = 1, 2$) ammetta un ciclo stabile γ_i; siano allora rispettivamente $x = x^*(t + \alpha)$, $u = \dot{x}^*(t + \alpha)$ (α costante generica), le ∞^1 soluzioni periodiche p_1 della 1_1), il cui periodo possiamo sempre supporre uguale a 2π, rappresentate tutte dal ciclo γ_1 sul piano $\pi_1 \equiv (x, u)$ e $y = y^*(t + \beta)$, $v = \dot{y}^*(t + \beta)$ (β costante arbitraria) le ∞^1 soluzioni periodiche p_2 di (1_2) di periodo $2\pi\lambda$, rappresentate sul piano $\pi_2 \equiv (y, v)$ dal ciclo γ_2. I due cicli γ_1, γ_2 sono due curve semplici chiuse dotate di tangente e curvatura continue in ogni punto. Come è noto l'ipotesi della stabilità comporta che dei due esponenti caratteristici di p_i, l'uno è nullo, l'altro è a parte reale negativa.

Sia P il generico punto dello spazio S_4 di coordinate cartesiane x, y, u, v. Ogni P di S_4 è rappresentato da una coppia

---

[4]) N. LEVINSON, *Small periodic perturbations of an autonomous system with a stable orbit*, Ann. of Math., vol. 52, 1950, p. 727.

di punti P_1, P_2 rispettivamente appartenenti a π_1, π_2. Una generica soluzione di 1), $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$, e tutte le ∞^1 soluzioni $x(t+k)$, $y(t+k)$, $u(t+k)$, $v(t+k)$, con k costante generica, sono rappresentate da una unica curva γ del predetto S_4.

In questo spazio consideriamo la famiglia Σ^* delle ∞^1 curve di equazioni.

$$(2) \qquad x = x^*(t),\ u = \dot{x}^*(t),\ y = y^*(t+\varphi),\ v = \dot{y}^*(t+\varphi),$$

dipendenti dal parametro φ. Ad ogni valore di φ tra 0 e $2\pi\lambda$ corrisponde una sola curva $\gamma(\varphi)$ ed è $\gamma(0) = \gamma(2\pi\lambda)$. Ad ogni $\gamma(\varphi)$ corrisponde un moto di regime del sistema 1), se si prescinde dalla solita traslazione dell'asse temporale, e due moti di regime diversi differiscono solo per la differenza di fase iniziale tra i due moti periodici.

Se i due sistemi 1_i) ammettono ciascuno un solo ciclo limite stabile ed una sola posizione di equilibrio instabile (come succede se le 1_i) sono del tipo di Lienard), ogni movimento del sistema, esclusi i seguenti: ($x \equiv y \equiv 0$; $x \equiv 0$, $y = y^*(t+\beta)$; $x = x^*(t+\beta)$, $y \equiv 0$) con α e β costanti qualunque, tendono asintoticamente ad uno ed uno solo dei moti 2).

Le curve $\gamma(\varphi)$ coprono in S_4 una varietà bidimensionale chiusa V_0. Assumiamo su di essa un sistema di coordinate curvilinee nella seguente maniera. Ad ogni punto Q di V_0 corrisponde una coppia di punti (Q_1, Q_2) rispettivamente su γ_1, γ_2. Fissato su γ_i un punto origine Ω_i, sia θ_i il tempo impiegato dal punto P_i che descrive γ_i per passare da Ω_i a Q_i. Ad ogni coppia di numeri θ_1, θ_2 con $\theta \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $\theta \leq \theta_2 \leq 2\pi\lambda$ corrispondono due punti Q_1, Q_2 rispettivamente su γ_1, γ_2 ed un punto Q di V_0; viceversa ad ogni punto Q di V_0 corrispondono due punti Q_1, Q_2 e due numeri θ_1, θ_2 nei limiti detti. Si osservi inoltre che se $Q' \equiv (\theta_1 + 2m\pi,\ \theta_2 + 2n\pi\lambda)$ e $Q \equiv$ $\equiv (\theta_1, \theta_2)$ è $Q' = Q$ (per m ed n interi).

Le equazioni differenziali della famiglia Σ^* di soluzioni di 1) su V^* assumono nel nuovo riferimento il semplicissimo aspetto

$$(3) \qquad \frac{d\theta_1}{dt} = 1,\ \frac{d\theta_2}{dt} = 1.$$

Ogni altra curva integrale di 1) che passi per un punto sufficentemente prossimo a V_0 tende per $t \to +\infty$ ad una delle $\gamma(\varphi)$.

E ormai agevole vedere come la famiglia Σ_0 delle $\gamma(\varphi)$ si possa rappresentare su una superficie torica dell'ordinario spazio tridimensionale. Se si assumono infatti su un toro V', dello spazio ordinario, come coordinate di un generico punto R la latitudine ψ_1 e la longitudine ψ_2, ponendo

$$(4) \qquad \theta_1 = \psi \quad , \quad \theta_2 = \lambda\psi_2 ,$$

si stabilisce una corrispondenza biunivoca completa tra i punti di V_0 e quelli di V' e le curve $\gamma(\varphi)$ sono rappresentate su V' dalle soluzioni dell'equazione differenziale

$$(5) \qquad \frac{d\psi_2}{d\psi_1} = \lambda.$$

Se λ è razionale tutte le curve integrali su V' sono chiuse; nessuna di esse è chiusa se γ e irrazionale. Lo stesso succede delle $\gamma(\varphi)$ su V_0.

2. - Si consideri il ciclo γ_i e per un suo generico punto Q_i si conduca la normale n_{Q_i}, orientata verso l'interno di γ_i. Su questa normale si consideri il segmento di centro Q_i e lunghezza $2\bar{\rho}_i$. Se $\bar{\rho}_i$ è sufficentemente piccolo date le proprietà di regolarità del ciclo γ_i i punti Q_i' Q_i'', estremi del segmento su detto, descrivono due curve γ_i', γ_i'', l'una interna a γ_i, l'altra esterna.

Sia P_i un generico punto della regione I_i, del piano π_i, compresa tra $\gamma_i'\gamma_i''$ e Q_i il punto di γ_i tale che $n_{Q_i} \supset P_i$ ed infine z_i la lunghezza dei segmenti orientati P_iQ_i sulla normale n_{Q_i}, cioè presa col segno $+$ o $-$ secondo che il verso di Q_iP_i è concorde o discorde con n_{Q_i}.

Ad ogni coppia di punti P_1P_2 con $P_i \subset I_i$ corrisponde un punto P di un intorno completo I di V_0 in S^4, per modo che si possono assumere come coordinate di un generico punto P di I le ∞^2 quaderne di numeri $(\theta_1 + 2m\pi,\ \theta_2 + 2n\pi\lambda,\ z_1,\ z_2)$ essendo θ_i le coordinate di quel punto Q_i su γ_i per cuì risulta $n_{Q_i} \supset P_i$.

Viceversa tutte le quaderne di numeri che si ottengono al variare di m ed n (interi) dalla quaderna scritta sopra, individuano un solo punto P di I purchè risulti $|z_i| < \rho_i$.

In base a ciò nell'intorno I di V_0, il sistema differenziale 1) assume la forma

$$\frac{d\theta_i}{dt} = S_i(\theta_i, z_i), \quad \frac{dz_i}{dt} = R_i(\theta_i, z_i), \tag{6}$$

ove $S_i(\theta_i, z_i)$ ed $R_i(\theta_i, z_i)$ sono periodiche di periodo 2π in θ_1 e $2\pi\lambda$ in θ_2.

Naturalmente è

$$S_i(\theta_i, 0) = 1, \quad R_i(\theta_i, 0) = 0, \tag{7}$$

e le ∞^2 soluzioni (p_1, p_2) sono date da $z_i = 0$, $\theta_i = t + s_i$ ove $s_i = \theta_i(0)$ ed ad esse corrispondono le ∞^1 traiettorie ricoprenti V_0.

Le soluzioni di (6) prossime ad una generica di queste ultime possono porsi sotto la forma

$$\theta_i = \theta_i(s_i, \rho_i, t), \quad z_i = z_i(s_i, \rho_i, t), \tag{8}$$

ove $\rho_i = z_i(0)$; in prima approssimazione si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_i &= t + s_i + \frac{\partial \theta_i}{\partial s_i} \delta s_i + \frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_i} \rho_i, \\ z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial s_i} \delta s_i + \frac{\partial z_i}{\partial \rho_i} \rho_i. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Scrivendo l'equazione alle variazioni di (6), tenuto conto di (7) e (9) si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \theta_i}{\partial s_i} &= \frac{\partial S_i}{\partial z_i}(t + s_i, 0) \cdot \frac{\partial z_i}{\partial s_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial s_i} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i}(t + s_i, 0) \cdot \frac{\partial z_i}{\partial s_i}, \end{aligned} \right. \tag{10$_1$}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial S_i}{\partial z_i}(t + s_i, 0) \frac{\partial z_i}{\partial \rho_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i}(t + s_i, 0) \frac{\partial z_i}{\partial \rho_i}. \end{aligned} \right. \tag{10$_2$}$$

Si tenga ora conto che gli esponenti caratteristici della soluzione $z_i = 0$, $\theta_i = t + s_i$, sono, per ogni i, uno nullo e l'altro a parte reale negativa, come lo sono per ogni i gli esponenti della soluzione p_i di 1_i).

In base a ciò possiamo dire che certamente esistono delle costanti δ, A, B, positive, per cui risulta per ogni $t \geq 0$.

$$\left|\frac{\partial z_i}{\partial s_i}\right| \leq Ae^{-\delta t}, \quad \left|\frac{\partial z_i}{\partial \rho_i}\right| \leq Ae^{-\delta t}, \tag{11}$$

mentre da $(10_{1,1})$ e $(10_{2,1})$ si ha

$$\left|\frac{\partial \theta_i}{\partial s_i}\right| \leq B, \quad \left|\frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_i}\right| \leq B. \tag{12}$$

Infine da (11) si deduce l'esistenza di un T tale che per $t \geq T$ risulta

$$\left|\frac{\partial z_i}{\partial s_i}\right| \leq \frac{1}{16}, \quad \left|\frac{\partial z_i}{\partial \rho_i}\right| \leq \frac{1}{16}. \tag{13}$$

Notiamo poi che è ovviamente

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial s_j} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_j} = \frac{\partial z_i}{\partial s_j} = \frac{\partial z_i}{\partial \rho_j} = 0, \quad (i \neq j). \tag{13'}$$

3. - Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} + f_1(x, \dot{x}) + g_1(x) = \varepsilon F_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \\ \ddot{y} + f_2(y, \dot{y}) + g_2(y) = \varepsilon F_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \end{cases} \tag{14}$$

ove F_1, F_2 sono di classe C^3 rispetto a tutte le variabili, almeno in I, ed operiamo ivi la trasformazione di coordinate che fa passare da (x, y, u, v) a $(\theta_1, \theta_2, z_1, z_2)$.

In I il sistema (14) assume l'aspetto

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_i}{dt} = S_i(\theta_i, z_i) + \varepsilon\Phi_i(\theta_1, \theta_2, z_1, z_2, \varepsilon), \\ \dfrac{dz_i}{dt} = R_i(\theta_i, z_i) + \varepsilon\Psi_i(\theta_1, \theta_2, z_1, z_2, \varepsilon). \end{cases} \quad (i = 1, 2). \tag{14}$$

Sempre in I, tenuto conto della regolarità della trasformazione, oltre che del carattere delle funzioni, f_i, g_i, F_i, si ha che Φ_i e Ψ_i sono come le S_i, R_i di classe C^2, (almeno se i $\bar{\rho}_i$, che definiscono I, sono sufficentemente piccoli), ed inoltre sono, come queste ultime, periodiche di periodo 2π in θ_1 e $2\pi\lambda$ in θ_2. Quindi denotando con K_i (come sempre in seguito) delle costanti opportune, se i $\bar{\rho}_i$ sono sufficentemente piccoli, è, in I,

$$\begin{aligned}
&\Sigma_i \left\{ \left| \frac{\partial S_i}{\partial \theta_i} \right| + \left| \frac{\partial R_i}{\partial \theta_i} \right| + \left| \frac{\partial S_i}{\partial z_i} \right| + \left| \frac{\partial R_i}{\partial z_i} \right| \right\} \leq K_1, \\
(16) \qquad &\Sigma_i \{ |\Phi_i| + |\Psi_i| \} \leq K_2, \\
&\Sigma_{i,j} \left\{ \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_j} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \right| + \left| \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_j} \right| + \left| \frac{\partial \Psi_i}{\partial z_j} \right| \right\} \leq K_3 .
\end{aligned}$$

Inoltre tenendo conto delle (7) e delle continuità delle derivate seconde, ancora in I, risulterà

$$(17) \qquad \left| \frac{\partial S_i}{\partial \theta_i} \right| + \left| \frac{\partial R_i}{\partial \theta_i} \right| \leq K_4 |z_i|, \quad |S_i - 1| + |R_i| \leq K_5 |z_i| .$$

Vogliamo ora procurarci alcune limitazioni, che sono utilissime nel seguito, relative alle soluzioni di (15).

A questo scopo cominciamo col richiamare il seguente teorema di confronto avvertendo che nel seguito, se x è un vettore di componenti x_i con $|x|$ intenderemo la $\Sigma_i |x_i|$.

TEOREMA I. - *Siano* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *due vettori continui con le derivate prime, nell'intervallo chiuso* $I \equiv (a, b)$ *ed* $\boldsymbol{F}(\varphi_1(t), t)$, $\boldsymbol{F}(\varphi_2(t), t)$ *siano vettori pure continui in* I *ed ivi risulti* $|\boldsymbol{F}(\varphi_1(t), t) - \boldsymbol{F}(\varphi_2(t), t)| \leq k |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$ *(*k *costante).*

Se $|\varphi_1(a) - \varphi_2(a)| < \lambda$ *e se in* I *risulta*

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \varphi_1(t) = \boldsymbol{F}(\varphi_1(t), t), \\ &\frac{d}{dt} \varphi_2(t) = \boldsymbol{F}(\varphi_2(t), t) + \omega(t), \end{aligned} \right.$$

essendo $|\omega(t)| \leq m$*(costante), allora in* I *è anche*

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \lambda e^{k(t-a)} + \frac{m}{k} (e^{k(t-a)} - 1).$$

Ciò premesso dimostriamo i seguenti lemmi.

Lemma I. - *Considerata la soluzione di* (15) *relativa alle condizioni iniziali* $\theta_i(0)=s_i$ *e* $z_i(0)=\rho_i$, *se* $|\varepsilon|$ *e* $|\rho|=$ $=|\rho_1|+|\rho_2|$ *sono sufficentemente piccoli, allora risulta per un opportuno* K_6 *e per ogni* $0 \leq t \leq T+1$.

$$\Sigma_i \{ |\theta_i - s_i - t| + |z_i| \} \leq K_6(|\varepsilon| + |\rho|). \tag{18}$$

Infatti si confronti il tetravettore $(\theta_1, \theta_2, z_1, z_2)$, soddisfacente a (15) ed alle condizioni iniziali imposte, con il tetravettore $(s_1+t, s_2+t, 0, 0)$ soddisfacente alle (6) e relativamente alle condizioni iniziali $\theta_i(0)=s_i$, $z_i(0)=0$. Allora, con le notazioni usate nel teorema 1, sarà, tenuto conto delle (16),

$$\varphi_1 \equiv (\theta_1, \theta_2, z_1, z_2),\ \varphi_2 \equiv (s_1+t, s_2+t, 0, 0),\ |\varphi_1(0)-\varphi_2(0)| = \lambda = |\rho|,$$

$$F \equiv (S_1+\varepsilon\Phi_1, S_2+\varepsilon\Phi_2, R_1+\varepsilon\Psi_1, R_2+\varepsilon\Psi_2),$$

$$k = K_1 + \varepsilon K_3,\ |\omega| \leq K_2|\varepsilon|;$$

in base al teorema I, finchè i $|z_i|$ sono sufficentemente piccoli sarà per ogni $t>0$

$$\Sigma_i \{ |\theta_i - s_i - t| + |z_i| \} \leq K_2\varepsilon(e^{kt}-1)/k + |\rho| e^{kt}.$$

Ma se $|\varepsilon|$ e $|\rho|$ sono sufficentemente piccoli questa ultima ci assicura che anche i $|z_i|$ sono abbastanza piccoli per $0 \leq t \leq T+1$; quindi per $0 \leq t \leq T+1$ risulterà soddisfatta la (18).

*
* *

Pensiamo la generica soluzione di (15) come funzione oltre che di t, anche dei valori iniziali cioè scriviamo $\theta_i = \theta_i(s_1, s_2, \rho_1, \rho_2, t)$, $z_i = z_i(s_1, s_2, \rho_1, \rho_2, t)$. Nostro scopo è ora quello di procurarci alcune limitazioni analoghe alle (12), (13), (13').

Dimostreremo in proposito il seguente

LEMMA II. - *Per* $|\varepsilon|$ e $|\rho|$ *sufficentemente piccoli e per* $0 \leq t \leq T+1$ *si ha*

$$(19) \qquad \left|\frac{\partial \theta_i}{\partial s_i} - 1\right| + \left|\frac{\partial \theta_i}{\partial s_j}\right| + \Sigma_k \left|\frac{\partial z_k}{\partial s_i}\right| \leq K_{11}(|\varepsilon| + |\rho|)$$

$$[i = 1, 2; i \neq j; K = 1, 2].$$

$$(20) \qquad \left|\frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_i}\right| \leq B_1, \quad \left|\frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_j}\right| \leq K_{13}(|\varepsilon| + |\rho|), \quad \left|\frac{\partial z_i}{\partial \rho_j}\right| \leq K_{15}(|\varepsilon| + |\rho|);$$

inoltre per $T \leq t \leq T+1$.

$$(21) \qquad \left|\frac{\partial z_i}{\partial \rho_i}\right| \leq \frac{1}{8}, \qquad (i = 1, 2).$$

Per dimostrare tale lemma deriviamo la (15), per fissare le idee rispetto ad s_1.

Si otterrà

$$(15') \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \theta_i}{\partial s_1}\right) = \dfrac{\partial S_i}{\partial \theta_i}\dfrac{\partial \theta_i}{\partial s_1} + \dfrac{\partial S_i}{\partial z_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial s_1} + \varepsilon \Sigma_k \left(\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_k}\dfrac{\partial \theta_k}{\partial s_1} + \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial z_k}\dfrac{\partial z_k}{\partial s_1}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial z_i}{\partial s_1}\right) = \dfrac{\partial R_i}{\partial s_i}\dfrac{\partial \theta_i}{\partial s_1} + \dfrac{\partial R_i}{\partial z_i}\dfrac{\partial z_i}{\partial s_i} + \varepsilon \Sigma_k \left(\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_k}\dfrac{\partial \theta_k}{\partial s_1} + \dfrac{\partial \Psi_i}{\partial z_k}\dfrac{\partial z_k}{\partial s_1}\right). \end{cases}$$

Confrontiamo la soluzione di (15') relativa ai valori iniziali $\dfrac{\partial \theta_1}{\partial s_1}(0) = 1$, $\dfrac{\partial \theta_2}{\partial s_1}(0) = 0$, $\dfrac{\partial z_i}{\partial s_1}(0) = 0$, con la soluzione, relativa agli stessi valori iniziali, del sistema (10_1) che scriviamo, particolarizzandolo e completandolo, nella seguente maniera

$$(10_1') \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \theta_1}{\partial s_1} = \dfrac{\partial S_1}{\partial z_1}(s_1 + t, 0)\dfrac{\partial z_1}{\partial s_1}, & \dfrac{\partial \theta_2}{\partial s_1} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial z_1}{\partial s_1} = \dfrac{\partial R_1}{\partial z_1}(s_1 + t, 0)\dfrac{\partial z_1}{\partial s_1}, & \dfrac{\partial z_2}{\partial s_1} = 0. \end{cases}$$

La soluzione di $(10_1')$ relativa ai predetti valori iniziali è ovviamente fornita dal tetravettore (1, 0, 0, 0). Valutando in corrispondenza a questa soluzione, che, con riferimento ai simboli usati nel teorema I, coincide con $\varphi_2(t)$, il vettore differenza $\omega(t)$ tra i secondi membri di (15'), (10'), si ha

$$\omega(t) \equiv \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta_1} + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_1}, \frac{\partial R_1}{\partial \theta_1} + \varepsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_1}\right).$$

Ma per le (16) (17)

$$|\omega(t)| < K_3 |\varepsilon| + K_4 \Sigma_i |z_i|,$$

e poichè per $0 \leq t \leq T + 1$ vale la (18) (lemma I), infine si trova

$$|\omega(t)| \leq K_9(|\varepsilon| + |\rho|).$$

Applicando il teorema I a questo caso, badando che $\lambda = 0$, si ottiene

$$\left|\frac{\partial \theta_1}{\partial s_1} - 1\right| + \left|\frac{\partial \theta_2}{\partial s_1}\right| + \Sigma_i \left|\frac{\partial z_i}{\partial s_i}\right| \leq K_{10}(|\varepsilon| + |\rho|).$$

Tenendo conto che una relazione analoga vale anche per le derivate rispetto ad s_2, possiamo quindi concludere per $|\varepsilon|$ e $|\rho|$ sufficentemente piccoli e per ogni i vale la (19).

Analogamente deriviamo la (15) rispetto a ρ_1 (per fissare le idee), e confrontiamo la soluzione $\partial \theta_i/\partial \rho_i$, $\partial z_i/\partial \rho_i$ del sistema così ottenuto, (che denoteremo per intenderci con (15'')), relativa alle condizioni iniziali $\frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_i}(0) = 0$, $\frac{\partial z_1}{\partial \rho_1}(0) = 1$, $\frac{\partial z_2}{\partial \rho_1}(0) = 0$, con la soluzione (che indicheremo, per distinguerla, con apici) del sistema ($10_2'$), analogo a ($10_1'$), relativa alle stesse condizioni iniziali.

Si osservi che, in questo caso, volendo ancora applicare il teorema I, nella valutazione della funzione $|\omega(t)|$ è anche necessaria una maggiorazione, per $0 \leq t \leq T + 1$, della differenza

$$\Delta = \left|\frac{\partial S_1}{\partial z_1}(s_1 + t, 0) - \frac{\partial S_1}{\partial z_1}(\theta_1, z_1)\right| + \left|\frac{\partial R_1}{\partial z_1}(s_1 + t, 0) - \frac{\partial R_1}{\partial z_1}(\theta_1, z_1)\right|;$$

ora tenendo conto del lemma I, e del fatto che S_1, R_1, sono di classe C^2 si ha, per $0 \leq t \leq T + 1$

$$\Delta \leq K_7(|\theta_1 - s_1 - t| + |z_1|) \leq K_8(|\varepsilon| + |\rho|).$$

Badando a ciò, l'applicazione del teorema I, porta a stabilire in questo caso la seguente disuguaglianza.

$$(23)\qquad \left|\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1}\right| - \frac{\partial\theta_1'}{\partial\rho_1}\left| + \frac{\partial z_1}{\partial\rho_1} - \frac{\partial z_1'}{\partial\rho_1}\right| + \left|\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho_1}\right| + \frac{\partial z_2}{\partial\rho_1}\left| \leq K_{12}(|\varepsilon| + |\rho|),\right.$$

valida sempre per $0 \leq t < T + 1$.

Fatto ricorso alle (12) e (13') ed al fatto che sussiste una relazione analoga alle (23) per le derivate rispetto a ρ_2, si ottengono intanto, per $0 \leq t \leq T + 1$ le (20), ed inoltre la

$$\left|\frac{\partial z_i}{\partial\rho_1} - \frac{\partial z_i'}{\partial\rho_1}\right| \leq K_{13}(|\varepsilon| + |\rho|).$$

Da questa infine, ancora per la (13) se $|\varepsilon|$ e $|\rho|$ sono sufficentemente piccoli, risultano per $T \leq t \leq T + 1$ soddisfatte le (21).

OSSERVAZIONE. - Ovviamente, per $|\varepsilon|$ e $|\rho|$ sufficentemente piccoli e $T \leq t \leq T + 1$, da (21), risultano anche le seguenti disuguaglianze

$$(24)\qquad \Sigma_k\left|\frac{\partial z_i}{\partial\rho_k}\right| \leq \frac{1}{4}, \quad \Sigma_i\left|\frac{\partial z_i}{\partial\rho_k}\right| \leq \frac{1}{4}.$$

4. - Consideriamo ora la famiglia F delle ∞^2 soluzioni di (15) relative ai valori iniziali

$$(25)\qquad \theta_i(0) = s_i. \quad z_i(0) = \rho_i = \alpha_i(s_1, s_2),$$

ove $\alpha_i(s_1, s_2)$ sono funzioni continue con le derivate prime e seconde e periodiche di periodo 2π in s_1 e $2\pi\lambda$ in s_2; inoltre supporremo che i massimi di $|\alpha_i|$ e $|\partial\alpha_i|\partial s_j|$ siano sufficentemente piccoli nel modo che sarà precisato nel seguito.

Intanto se $|\alpha_i| < \bar{\rho}_i$ le $z_i = \alpha_i(s_1, s_2)$ definiscono una varietà V, contenuta in I, chiusa, dello stesso tipo di V_0, che diremo quasi-parallela a V_0.

Alla generica delle soluzioni di I corrisponde una curva di equazioni parametriche

$$(26)\qquad \begin{cases} \theta_i = \theta_i(t, s_1, s_2, \rho_1, \rho_2, \varepsilon), \\ z_i = z_i(t, s_1, s_2, \rho_1, \rho_2, \varepsilon). \end{cases}$$

Per ogni fissato $t = \tau$ con $T \leq \tau \leq T + 1$ le (26) si possono pensare, tenuto conto che $\rho_i = \alpha_i(s_1, s_2)$, come le equazioni parametriche nei parametri s_1, s_2 di una nuova varietà V_τ contenuta in I, almeno se $|\varepsilon|$ e $|\rho| = \max \Sigma_i |\alpha_i|$ sono sufficentemente piccoli (lemma I).

Dunque la V_τ ha per equazioni parametriche le seguenti

$$(27) \qquad \begin{cases} \theta_i = \theta_i(\tau, s_1, s_2, \alpha_1(s_1, s_2), \alpha_2(s_1, s_2), \varepsilon), \\ z_i = z_i(\tau, s_1, s_2, \alpha_1(s_1, s_2), \alpha_2(s_1, s_2), \varepsilon). \end{cases}$$

Volendo provare che V_τ è dello stesso tipo di V cioè quasi parallela a V_0 poniamo

$$(28) \qquad \sigma_i = \theta_i(\tau, s_1, s_2, \alpha_1(s_1, s_2), \alpha_2(s_1, s_2), \varepsilon).$$

Osserviamo che si ha

$$(29) \qquad \frac{\partial \sigma_i}{\partial s_j} = \frac{\partial \theta_i}{\partial s_j} + \Sigma_k \frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial s_j},$$

ed inoltre che $\partial\theta_i/\partial s_j$ è prossimo a 1 per $i = j$ e prossimo a 0 per $i \neq j$, e che $\partial\theta_i/\partial\rho_k$ è limitato $((20_1), (20_2))$; se $|\partial\alpha_k/\partial s_j|$ è sufficentemente piccolo sarà $\partial\sigma_i/\partial s_j$ prossimo a 1 per $i = j$ e prossimo a 0 per $i \neq j$ e quindi il determinante funzionale $\partial(\sigma_1, \sigma_2)/\partial(s_1, s_2)$ è prossimo a 1. Le (28) risultano quindi risolubili rispetto ad s_1, s_2 e porgono

$$(30) \qquad s_i = E_i(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon).$$

D'altra parte, per ogni fissato s_2, in modo qualunque, mentre s_1 cresce di 2π, σ_1 non può variare mod 2π e σ_2 non può variare mod $2\pi\lambda$; ora poichè $\partial\sigma_1/\partial s_1$ è prossimo a 1 e $\partial\sigma_2/\partial s_2$ è prossimo a zero, ciò significa che σ_1 aumenterà di 2π, e σ_2 riprenderà il suo valore iniziale. Analogamente se s_2 aumenta di $2\pi\lambda$, fisso restando in modo qualunque s_1, σ_2 aumenta di $2\pi\lambda$ e σ_1 riprende il suo valore iniziale.

In base a ciò se sostituiamo le espressioni di s_1, s_2 date da (30), nelle (27_2) si ottengono le equazioni parametriche di V nella forma

$$(31) \qquad z_i = z_i[\tau, E_1, E_2, \alpha_1(E_1, E_2), \alpha_2(E_1, E_2), \varepsilon] = \beta_i(\sigma_1, \sigma_2),$$

essendo le β_i funzioni periodiche di periodo 2π in σ_1 e $2\pi\lambda$ in σ_2.

Tanto basta per dire che la V_τ è dello stesso tipo della V. Scriveremo

$$V_\tau^{(1)} = U_\tau(V), \tag{32}$$

volendo indicare con U_τ la trasformazione che fa passare nel modo indicato dalla V alla V_τ.

Nostro scopo è, per ora, mostrare che per $|\varepsilon|$, $\max \Sigma_i |\alpha_i|$, $\max |\partial\alpha_i/\partial s_j|$ sufficentemente piccoli e $T \leq \tau \leq T+1$, come è detto sopra, esiste per ogni τ una ed una sola V_τ^* tale che $V_\tau^* \equiv U_\tau(V_\tau^*)$.

Siano V' V'' due varietà quasi parallele a V_0 e siano α_i', α_i'' i secondi membri delle quazioni che le definiscono. Indicheremo nel seguito con α il complesso (α_1, α_2).

Definiamo come distanza $\delta(V', V'',) = \delta(\alpha', \alpha'')$ delle due varietà la seguente espressione

$$\delta(\alpha', \alpha'') = \max \{ | (\alpha_1'' - \alpha_1') + | \alpha_2'' - \alpha_2' | \}. \tag{33}$$

Siano V_τ', V_τ'' le trasformate mediante (32) delle V', V'' e β', β'' il complesso delle funzioni di σ_1, σ_2 che le forniscono.

Dimostriamo i seguenti importanti lemmi

LEMMA III. - *Se* $|\varepsilon|$, $\max|\alpha|$ *e* $\max\left|\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial s_j}\right|$ *sono sufficentemente piccoli, risulta*

$$\delta(\beta', \beta'') \leq \frac{1}{2}\,\delta(\alpha', \alpha''). \tag{34}$$

Infatti dalla (26) si ha

$$\begin{aligned}
\delta(\beta', \beta'') &= \max \Sigma_i \,| z_i[\tau, E_1'', E_2'', \alpha_1''(E_1'', E_2''), \alpha_2''(E_1'', E_2''), \varepsilon] - \\
&\quad - z_i[\tau, E_1', E_2', \alpha_1'(E_1', E_2'), \alpha_2'(E_1' E_2'), \varepsilon]| \leq \\
&\leq \Sigma_k \max | E_k'' - E_k' | \,\Sigma_i \max \left|\frac{\partial z_i}{\partial s_k}\right| + \\
&+ \Sigma_k \max |\alpha_k''(E_1', E_2') - \alpha_k'(E_1', E_2')| \,\Sigma_i \max \left|\frac{\partial z_i}{\partial \rho_k}\right| + \\
&+ \Sigma_k \max |\alpha_k''(E_1'', E_2'') - \alpha_k''(E_1', E_2')| \,\Sigma_i \max \left|\frac{\partial z_i}{\partial \rho_k}\right|;
\end{aligned}$$

siccome poi

$$\max \mid \alpha''_h(E''_1,\ E''_2) - \alpha''_h(E'_1,\ E'_2) \mid \leq \Sigma_k \max \mid E''_k - E'_k \mid \max \left| \frac{\partial \alpha''_h}{\partial s_k} \right|,$$

risulta, tenuto conto di (24),

$$\delta(\beta',\ \beta'') \leq \frac{1}{4} \delta(\alpha',\ \alpha'') + \Sigma_k \max |E''_k - E'_k| \left\{ \Sigma_i \max \left| \frac{\partial z_i}{\partial s_k} \right| + \frac{1}{4} \Sigma_h \max \left| \frac{\partial \alpha''_h}{\partial s_k} \right| \right\},$$

e per le (19),

$$(35) \qquad \delta(\beta',\ \beta'') \leq \frac{1}{4} \delta(\alpha'.\ \alpha'') +$$

$$+ \Sigma_k \max \mid E''_k - E'_k \mid \left\{ K_{11}(|\varepsilon| + \max|\alpha|) + \frac{1}{4} \Sigma_h \max \left| \frac{\partial \alpha''_h}{\partial s_k} \right| \right\}.$$

A questo punto conviene porre

$$(36) \qquad E'_k(\sigma_1,\ \sigma_2) = s'_k, \quad E''_k(\sigma_1,\ \sigma_2) = s''_k,$$

ove è

$$\sigma_i = \theta_i(\tau,\ s'_1,\ s'_2,\ \alpha'_1(s'_1,\ s'_2),\ \alpha'_2(s'_1,\ s'_2),\ \varepsilon) =$$

$$= \theta_i(\tau,\ s''_1,\ s''_2,\ \alpha''_2(s''_1,\ s''_2),\ \alpha''_2(s''_1,\ s''_2),\ \varepsilon).$$

Applicando a quest'ultima il teorema del valor medio si ottiene, (convenendo di indicare con il soprassegno i valori computati in relazione a questo teorema) la seguente relazione

$$\Sigma_k \left\{ \overline{\frac{\partial \theta_i}{\partial s_k}} (s''_k - s'_k) + \overline{\frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_k}} [\alpha''_k(s''_1,\ s''_2) - \alpha'_k(s'_1,\ s'_2)] \right\} = 0,$$

ovvero

$$(37) \qquad \overline{\frac{\partial \theta_i}{\partial s_i}} (s''_i - s'_i) = - \overline{\frac{\partial \theta_i}{\partial s_j}} (s''_j - s'_j) -$$

$$- \Sigma_k \overline{\frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_k}} [\alpha''_k(s''_1,\ s''_2) - \alpha'_k(s'_1,\ s'_2)] \ (i \neq j).$$

Teniamo conto che, per le (20), per $|\varepsilon|$ e $|\rho| = \max|\alpha|$ sufficentemente piccoli, è

$$\Sigma_k \left| \overline{\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_k}} [\alpha_k''(s_1'', s_2'') - \alpha_k'(s_1', s_2')] \right| \leq$$

$$\leq B_1 \Sigma_h | s_h'' - s_h' | \Sigma_k \max \left| \frac{\partial\alpha_k''}{\partial s_h} \right| + B_1\delta(\alpha', \alpha'')$$

ed inoltre, in base a (19), badiamo che $\partial\theta_i/\partial s_i$ è prossimo a 1 per $i = j$ e prossimo a zero per $i \neq j$; così concluderemo (ricordando ancora le (20) e supponendo che risultino sufficentemente piccoli i max $|\partial\alpha_k''/\partial s_h|$), che per $|\varepsilon|$ e $|\rho|$ sufficentemente piccoli, assieme ai suddetti max$|\partial\alpha_k''/\partial s_h|$, risulterà certamente

$$(38) \qquad | s_i'' - s_i' | \leq 2B_1\delta(\alpha', \alpha'').$$

Allora le (35) ci porge, tenuto conto di (36), (38) e (19),

$$(39) \qquad \delta(\beta'\beta'') \leq \frac{1}{4}\,\delta(\alpha', \alpha'') +$$

$$+ 4B_1\delta(\alpha', \alpha'') \left\{ K_{11}(|\varepsilon| + \max|\alpha|) + \frac{1}{4}\,\Sigma_h \max \left| \frac{\partial\alpha_h}{\partial s_k} \right| \right\},$$

onde basta assumere $|\varepsilon|$, max $|\alpha|$ e max $|\partial\alpha_h''/\partial s_k|$ sufficentemente piccoli perchè la (34) risulti verificata, per ogni τ compreso tra T e $T+1$.

*
* *

LEMMA IV. - *Se* $\max|\alpha| \leq 2K_6|\varepsilon|$ e $\max \left| \frac{\partial\alpha_k}{\partial s_h} \right| \leq$ $\leq 12K_{11}(1 + 2K_6)|\varepsilon|$ *risulta per* $T \leq \tau \leq T+1$, $\max|\beta| \leq$ $\leq 2K_6\varepsilon$ *e* $\max \left| \frac{\partial\beta_k}{\partial\sigma_h} \right| \leq 12K_{11}(1 + 2K_6)|\varepsilon|$.

Infatti si noti che è

$$(40) \qquad \frac{\partial\beta_i}{\partial\sigma_j} = \Sigma_k \left\{ \frac{\partial z_i}{\partial s_k}\,\frac{\partial s_k}{\partial\sigma_j} + \frac{\partial z_i}{\partial\rho_k}\,\Sigma_h\,\frac{\partial\alpha_k}{\partial s_h}\,\frac{\partial s_h}{\partial\sigma_j} \right\}.$$

Osservando poi che $\partial s_h/\partial\sigma_j$ è prossimo a 1 per $h = j$ ed a zero per $h \neq j$ (come si riconosce, derivando rispetto a σ_j la

(28)) la (40) porge, badando alle (24), (19),

$$\max\left|\frac{\partial\beta_i}{\partial\sigma_j}\right| \leq \frac{3}{2}\Sigma_k \max\left|\frac{\partial z_i}{\partial s_k}\right| + 3\,\Sigma_k \max\left|\frac{\partial z_i}{\partial\rho_k}\right| \max\left|\frac{\partial\alpha_k}{\partial s_h}\right| \leq$$

$$\leq 3K_{11}(|\varepsilon| + \max|\alpha|) + \frac{3}{4}\max\left|\frac{\partial\alpha_k}{\rho s_h}\right| \leq 12K_{11}(1 + 2K_6)|\varepsilon|.$$

D'altra parte si ha

$$(41)\qquad \max|\beta| = \max\Sigma_i|z_i(\tau,\, E_1,\, E_2,\, \alpha_1(E_1,\, E_2),\, \alpha_2(E_1,\, E_2),\, \varepsilon)|,$$

ed inoltre

$$\Sigma_i|z_i(\tau,\, s_1,\, s_2,\, \rho_1,\, \rho_2,\, \varepsilon) - z_i(\tau_1,\, s_1,\, s_2,\, 0,\, 0,\, \varepsilon)| \leq \Sigma_{ik}\left|\frac{\partial z_i}{\partial\rho_k}\rho_k\right| \leq$$

$$\leq \Sigma_k|\rho_k|\,\Sigma_i \max\left|\frac{\partial z_i}{\partial\rho_k}\right| \leq \frac{1}{2}\max|\alpha|.$$

Da quest'ultima poi si ricava

$$(42)\qquad \Sigma_i|z_i(\tau,\, s_1,\, s_2,\, \rho_1,\, \rho_2,\, \varepsilon)| \leq \frac{1}{2}\max|\alpha| + \Sigma_i|z_i(\tau,\, s_1,\, s_2,\, 0, 0,\, \varepsilon)|;$$

ma per il lemma I, ponendo ivi $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 0$, si ha, per $\tau \leq T + 1$,

$$(43)\qquad \Sigma_i|z_i(\tau,\, s_1,\, s_2,\, 0,\, 0,\, \varepsilon)| \leq K_6|\varepsilon|.$$

Le (41), (42), (43), comportano, badando che $\max|\alpha| \leq \leq 2K_6|\varepsilon|$,

$$(44)\qquad \max|\beta| \leq 2K_6|\varepsilon|$$

c. d. d.

LEMMA V. - *Se* $|\varepsilon|$, $\max|\alpha|$ *e* $\max\left|\frac{\partial\alpha_i}{\partial s_j}\right|$ *sono sufficentemente piccoli ed inoltre per ogni h e k* $\left|\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial s_h\partial s_k}\right| \leq 1$ *(*1 *per fissare le idee) allora è anche* $\left|\frac{\partial^2\beta_i}{\partial\sigma_h\partial\sigma_k}\right| \leq 1$ *per ogni h e k.*

Quest'ultimo risultato si consegue a partire da (40) con un ragionamento analogo a quello seguito più sopra per dimostrare il lemma IV. Non ci indugeremo perciò oltre ad esporne la dimostrazione.

***

È facile ora mostrare che per ogni τ compreso tra T e $T+1$ e per $|\varepsilon|<|\varepsilon_0|$ ($|\varepsilon_0|$ sufficentemente piccolo e indipendente da τ) esiste una sola V_τ^* trasformata in sè dalla (32).

Fissato un generico valore di τ nei limiti prescritti, si scelga $|\varepsilon_0|$ in modo che per $|\varepsilon|<|\varepsilon_0|$ valgano i risultati conseguiti nei lemmi III, IV, V e si prende una generica V in corrispondenza alla quale α soddisfi alle condizioni dei lemmi IV e V. Allora oltre al IV e V varrà anche il lemma III e mentre $V_\tau^{(1)} = U_\tau(V)$, $V_\tau^{(2)} = U_\tau^{(2)}(V)$, ... soddisferanno tutte ai lemmi IV e V, risulterà, per il lemma III,

$$\delta(V_\tau^{(k)},\ V_\tau^{(k+1)}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(V_\tau^{(1)},\ V);$$

ma ciò implica l'uniforme convergenza di $\alpha^{(k)} \equiv (\alpha_1^{(k)},\ \alpha_2^{(k)})$ che definisce le $V_\tau^{(k)}$ per $K \to +\infty$. Porremo $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_i^{(k)} = A_i^{(\tau)}$ e con V_τ^* intenderemo la varietà limite definita dalle $A_i^{(\tau)}$.

Le funzioni $A_i^{(\tau)}(s_1,\ s_2)$ risultano come le $\alpha_\tau^{(k)}(s_1,\ s_2)$ periodiche di periodo 2π in s_1, $2\pi\lambda$ in s_2 e per il lemma IV e V risulteranno continue e derivabili e le derivate parziali saranno a variazione limitata rispetto ad una qualunque delle due variabili, uniformemente nell'altra.

Infine, per il lemma IV, risulterà $|A^\tau| \leq 2K_6|\varepsilon|$.

5. - Vogliamo ora dimostrare che *per* $|\varepsilon| \leq |\varepsilon_0|$ *esiste una varietà* V^* *quasi-parallela a* V_0, *tale che una generica traiettoria di* (15) *che abbia un punto in comune con* V^* *giace tutta su* V^*.

Iniziamo a questo scopo col provare che presi due valori qualunque τ_1, τ_2 di τ nell'intervallo $(T,\ T+1)$ risulta $V_{\tau_1}^* = V_{\tau_2}^*$ cioè che tutte le V_τ^* coincidono in un'unica V^*.

Assumiamo, in un primo tempo, $\tau_1 = T$ e $\tau_2 = \tau$ essendo τ un qualunque valore scelto nei limiti prescritti ma commensurabile con T; potremo scrivere allora $mT = n\tau$ (m, n interi).

Osserviamo ora che $U_{mT} = U_T^{(m)}$, $U_{n\tau} = U_\tau^{(n)}$ e che la successione in $U_T^{(rm)}(V)$ converge uniformemente, per V generica entro i limiti precisati, come la $U_T^{(r)}(V)$ verso V_T^* ed analogamente succede per la successione $U_\tau^{(rn)}$ che tende a V_τ^*. Ma siccome, essendo $mT = n\tau$ le due tasformazioni U_{mT}, $U_{n\tau}$ coincidono; così risulterà $V_T^* = V_\tau^*$, per τ generico compreso tra T e $T+1$ e commensurabile con T.

Se poniamo $\alpha_i(s_1, s_2) = A_i^{(T)}(s_1, s_2)$ nelle (27), queste per $\tau = T$ o τ commensurabile con T, nell'intervallo T, $T+1$, rappresentano sempre la stessa V_T^*.

Sia ora P_0 un generico punto di V_T^* e si consideri la semitraiettoria $\gamma_{P_0}^+$ che esce per $t = 0$ da P_0; infine sia $P(t)$ il punto che descrive $\gamma_{P_0}^+$. Per quanto visto sopra sarà $P(T) \subset V_T^*$ e $P(\tau) \subset V_T^*$ per ogni τ, dell'intervallo T, $T+1$, commensurabile con T. Sia I_P l'insieme dei punti $P(\tau)$ con τ commensurabile con T. Poichè è $I_P \subset V_T^*$ e V_T^* è continua, ad essa V_T^* apparteranno anche tutti i punti di accumulazione di I_P cioè tutti i punti $P(t)$ con $T \leq t \leq T+1$. Risulterà dunque $V_\tau^* = V^*$ indipendente da τ, per qualunque τ in $(T, T+1)$.

Per concludere basta osservare che se P_0 descrive tutta la V^*, $P(\tau)$ la descrive pure tutta, per ogni $T \leq \tau \leq T+1$; quindi ogni punto P_0 di V^* è interno ad un archetto di traiettoria tutta giacente su V^*. Tanto basta per concludere che la generica traiettoria che passa per punto di V^* giace tutta su V^*.

6. - Siano $\rho_i = A_i^*(s_1, s_2)$ le equazioni di questa V^*. Per tutte le traiettorie di (15) giacenti su V^* sarà

$$z_i = A_i^*(s_1, s_2), \tag{45}$$

e le equazioni che le definiscono si ottengono associando alle (45) le

$$\frac{d\theta_i}{dt} = S_i[\theta_i, A_i^*(\theta_1, \theta_2)] + \varepsilon \Phi_1[\theta_1, \theta_2, A_1^*(\theta_1, \theta_2), A_2^*(\theta_1, \theta_2), \varepsilon] \tag{46}$$

che si hanno da (15) mediante le (45).

Dalle (46) si ottiene

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = Q(\theta_1, \theta_2, \varepsilon) \tag{47}$$

ove la $Q(\theta_1, \theta_2, \varepsilon)$ è continua e periodica di periodo 2π in θ_1 $2\pi\lambda$ in θ_2. Inoltre $\partial Q/\partial\theta_2$ esiste ed è a variazione limitata in θ_2, uniformemente in θ_1, come consegue dal fatto che le $\partial A_i^*/\partial\theta_2$ sono a variazione limitata in θ_2 uniformemente in θ_1. (Vedi fine del n. 4).

La (47) è una equazione differenziale sulla superficie di un toro e le proprietà, già rilevate, del secondo membro della stessa (47), rendono applicabile un ben noto teoema di Bohl e Denjoy, in base al quale esiste per una generica soluzione un numero μ (indipendente dalla soluzione considerata) tale che

$$\lim_{\theta_1 \to \infty} \frac{\theta_2(\theta_1)}{\theta_1} = \lambda\mu.$$

Se μ è razionale allora esistono traiettorie chiuse, se μ è irrazionale la generica soluzione di (47) è data da

$$\theta_2 = \lambda\mu\theta_1 + C + f(\theta_1, \lambda\mu\theta_1 + C),$$

ove C è una costante ed $f(u, v)$ e continua e periodica di periodo 2π in u e $2\pi\lambda$ in v. La totalità delle soluzioni di (47) si ottiene facendo variare C tra 0 e $2\pi\lambda$.

Mediante questa rappresentazione risulta completamente chiarito l'andamento delle soluzioni di (15) su V^*, bastando perciò rifarsi ai citati studi di Bohl e Denjoy per studiare l'andamento delle soluzioni di (47) sulla superficie del toro.

Ai cicli chiusi sulla superficie del toro, su cui si rappresentano le soluzioni di (47), corrispondono cicli chiusi su V^*, cioè soluzioni periodiche del sistema (15) e quindi anche (14). Ciò succede solo se μ è razionale; se μ è irrazionale il sistema (15) non ha, per $|\varepsilon|$ sufficentemente piccolo, cicli su V^*, cioè in prossimità di V_0.

Poichè è agevole riconoscere che μ dipende con continuità da ε, se μ non è costante (al variare di ε) esso sarà razionale per qualche valore di ε, irrazionale per qualche altro e quindi l'esistenza di cicli chiusi per ogni valore di ε è estremamente improbabile.

Nel caso che μ sia irrazionale le soluzioni di (14), relative alle traiettorie giacenti su V^*, sono date, a prescindere da una inessenziale traslazione dell'asse temporale, da

$$x = \Phi'\left(t, \frac{T_1}{T_2}\mu t + C\right), \quad y = \Phi''\left(t, \frac{T_1}{T_2}\mu t + C\right),$$

ove $\Phi'(t, \tau)$, $\Phi''(t, \tau)$ sono funzioni continue periodiche di periodo T_1 in t e T_2 in τ. Nel caso specifico T_1 e prossima a 2π, e T_2 a $2\pi\lambda$. Al variare di C tra 0 e T_2 si hanno le ∞^1 traiettorie su V^*.

***

Concludiamo con alcune considerazioni riguardanti la stabilità asintotica delle traiettorie giacenti su V^* rispetto a quelle che passano per punti prossimi a V^*.

Dimostriamo perciò che *se si considera un punto P_0, sufficentemente prossimo a V^*, la traiettoria che passa per P_0 tende a V^* per $t \to \infty$.*

Si consideri infatti un punto $P_0 \equiv (s_1, s_2, \rho_1, \rho_2)$ con $|\rho| \leq 2K_6 |\varepsilon|$ ed una generica V_{P_0}, soddisfacente alle condizioni dei lemmi IV e V, che passi per P_0.

Assunto un generico valore di τ sull'intervallo $(T, T+1)$, si considerino le $U_\tau^{(r)}(V_{P_0})$ e si ricordi che $\lim_{r\to\infty} U_\tau^{(r)}(V_{P_0}) = V^*$, Allora la traiettoria uscente da P_0 per $t = 0$, restando tutta in un intorno di V^*, passa, negli istanti τ, 2τ, 3τ, ..., per una successione di punti P_1, P_2, P_3 ... tendenti a V^*. Da ciò è facile concludere, tenendo conto della dipendenza continua delle soluzioni di (15) dei valori iniziali, che la generica traiettoria uscente da un punto P_0, sufficentemente prossimo a V^*, tende a V^* per $t \to +\infty$.