Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Antonio Signorini

Sopra una questione di ottica geometrica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 37-44

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__37_0>

SOPRA UNA QUESTIONE DI OTTICA GEOMETRICA

Nota (*) *di* ANTONIO SIGNORINI (*a Roma*)

1. - In questa Nota mi propongo di trattare, in modo adatto anche a un normale corso di Fisica matematica, una questione che prospettai in una conferenza tenuta verso la fine del 1948 a Milano [1]) e a Bologna.

Poco dopo, lavori di B. SEGRE [2]) e di V. DALLA VOLTA [3]) dettero, insieme a molti altri risultati, sicura validità al mio convincimento. La questione fu anche ripresa da me, con mezzi assai più elementari, nel mio corso di Fisica matematica [4]) del 1949-50. La presente Nota vuole proprio sostituirsi a quanto allora esposi, mostrando come, solo in base a nozioni banali di Cinematica e di Geometria differenziale, si può giungere allo scopo in maniera anche più espressiva.

Prendiamo in considerazione un mezzo ottico isotropo, sede di una propagazione di luce monocromatica, riferendoci

---

(*) Pervenuta in Redazione il 9 agosto 1954.

1) *Qualche teorema di Ottica geometrica*, Rend. del Seminario Mat. e Fis. di Milano, vol. XX (1949) pp. 1-12.

2) B. SEGRE, *Alcune proprietà caratteristiche degli spazi a curvatura costante*, Rend. Lincei, S. 8ª, vol. VI (1949) pp. 393-97, 547-50, 661-67 e vol. VII (1949) pp. 12-15; *Geometria non euclidea ed ottica geometrica*, Rend. Lincei, vol. VII (1949) pp. 16-26.

3) V. DALLA VOLTA, *Una questione di geometria riemmanniana connessa a un problema di Ottica geometrica*, Rend. Lincei, S. 8ª, vol. VI (1949) pp. 64-68.

4) *Lezioni di Fisica matematica dell'anno acc. 1949-50, raccolte dall'ing. G. Tedone*, Roma, Veschi, 1950 (litografie) pp. 112-18.

a una terna cartesiana trirettangola $Oxyz$ e indicando con r la distanza da O di un punto qualunque $M \equiv (x, y, z)$ del mezzo, con $u(x, y, z)$ ovvero con u_M il modulo della velocità di propagazione locale, con c la velocità nel vuoto, con

$$n(x, y, z) = \frac{c}{u}$$

l'indice di rifrazione assoluto.

La proprietà che ogni fronte d'onda epicentrale sia sferico da sola non caratterizza il caso $u \equiv$ cost.. Essa permane anche in certi mezzi non omogenei, quando non si pretenda che il centro della sfera resti fermo [5]) nell'epicentro.

Si può anzi rapidamente [6]) accertare che tale proprietà permane se la u_M è proporzionale alla distanza di M da un piano fisso o dipende linearmente dal solo quadrato della distanza di M da un punto fisso; diciamo pure, se la $u(x, y, z)$ può farsi rientrare nel tipo

$$u = \omega x \tag{1}$$

con $\omega =$ cost., ovvero nel tipo

$$u = hr^2 + k \tag{2}$$

con $h =$ cost. e $k =$ cost..

Ciò che mi accingo a esporre è principalmente una dimostrazione elementare della proprietà inversa: *se il generico fronte d'onda epicentrale è sferico, necessariamente la u è del tipo* (1) *o del tipo* (2). Nelle litografie del mio corso di Fisica matematica del 1949-50 già figura [7]) una esauriente discussione delle proprietà dei fronti d'onda imposte da (1) o (2), anche pel caso che h e k abbiano segni opposti.

Appresso accennerò con σ_n le superficie $n(x, y, z) =$ cost., *superficie di uguale indice*; con ν_M la normale in M alla σ_n per M; con g_M il valore in M di grad u, da intendersi di regola $\neq 0$.

---

[5]) E pure si consenta che la sfera possa a qualche particolare istante degenerare in un piano.

[6]) Cfr. loc. cit. [1]), pp. 5-6.

[7]) Cfr. loc. cit. [4]), pp. 104-12.

2. Prime conseguenze dell'ipotesi che il generico fronte d'onda epicentrale sia sferico. — Sia E l'epicentro e $\sigma(E, t)$ la sfera che al generico istante t darà il fronte dell'onda emanata da E all'istante $t = 0$. Insieme siano C e C' i centri di $\sigma(E, t)$ e $\sigma(E, t + dt)$; R e $R + dR$ i raggi delle due sfere; P un punto qualunque di $\sigma(E, t)$; P' l'intersezione di CP con $\sigma(E, t + dt)$;

$$\boldsymbol{v}_* = \frac{CC'}{dt}$$

la velocità di C, che salvo contrario avviso intenderò non nulla; V_1 e V_2 le intersezioni di $\sigma(E, t)$ con i raggi d'applicazione di $(C, \boldsymbol{v}_*)$ e $(C, -\boldsymbol{v}_*)$; θ l'angolo formato da CP con CC' e $\boldsymbol{v}_*$.

Evidentemente $dR = \dot{R}dt$ sarà uguale alla differenza delle componenti di PP' e CC' secondo CP, cioè si avrà

$$\dot{R}dt = \pm \,|\, PP' \,|\, - \,|\, CC' \,|\, \cos\theta\,,$$

col segno $+$ o $-$ secondo che P' sia esterno o interno a $\sigma(E, t)$.

D'altra parte, pel solo fatto che in un mezzo isotropo i raggi sono traiettorie ortogonali dei fronti d'onda, sarà

$$u_P = \frac{|PP'|}{dt}\,.$$

Ne risulta che sull'intera $\sigma(E, t)$ la u_P dovrà intendersi suscettibile dell'espressione

$$u_P = \pm \{\, \dot{R} + v_* \cos\theta \,\}\,. \tag{3}$$

Essendo da escludere l'annullarsi di u_P, neppure potrà annullarsi il binomio fra parentesi, e il segno da scegliere *riuscirà lo stesso per ogni P*. Anzi, dato che la (3) si riduce a

$$u_P = \pm \dot{R}$$

non appena sia $\theta = \pi/2$, nemmeno potrà esser nulla la $\dot{R}$ e *proprio il suo segno* sarà quello da scegliere nella (3).

Sempre in base a (3):

α) la u_P varierà solo con θ;

β) al variare di P nell'intera sfera, g_P riuscirà normale ad essa [insieme a grad n] soltanto [8]) in V_1 e V_2.

Rimane così senz'altro stabilito che:

α_*) in corrispondenza a ogni P, la ν_P *dovrà riuscire complanare a* V_1V_2;

β_*) quando la sfera $\sigma(E, t)$ tocchi, in un certo suo punto $\overline{P}$, una σ_n, *lo stesso dovrà verificarsi nel punto diametralmente opposto a* $\overline{P}$.

Detto $u_i (i = 1, 2)$ il valore di u in V_i, da (3) pure segue

$$\pm 2\dot{R} = u_1 + u_2 \quad , \quad \pm 2v_* = u_1 - u_2 \; ; \tag{4}$$

onde deve essere

$$v_* < |\dot{R}|,$$

per $\dot{R} > 0$ necessariamente è u_1 il massimo di u_P, ecc.

Poniamo pure

$$D = R + |EC| \quad , \quad d = R - |EC|$$

e sia φ l'angolo di v_* ed EC. Potrà darsi che il minimo della distanza di E da un punto di $\sigma(E, t)$ sia dato da $-d$ [invece che da d] ma sempre varranno ambedue le uguaglianze

$$\dot{D} = \dot{R} + v_* \cos\varphi \quad , \quad \dot{d} = \dot{R} - v_* \cos\varphi \, . \tag{5}$$

3. Proprietà dell'onda epicentrale per piccoli valori di t. — Intendiamo ora che E appartenga a un volume C del mezzo ottico, per ogni cui punto M si abbia

$$u' < u_M < u'',$$

con u'' e u' costanti positive. Insieme sia δ_E il minimo della distanza di E da un punto del contorno di C.

Per $t \to 0$ tendono a zero pure D e d, mentre le (4) si riducono a

$$\pm \dot{R} = u_E \quad , \quad v_* = 0.$$

---

8) Per $v_* \neq 0$: ma per $v_* = 0$ evidentemente si ha l'ortogonalità di (P, g_P) in corrispondenza a ogni P.

Anzi, dato che per $t=0$ non può essere $\dot{R}<0$, la prima va precisata in

$$[\dot{R}]_{t=0}=u_E>0.$$

In conseguenza va inteso

$$u_1+u_2=2\dot{R} \quad , \quad u_1-u_2=2r_*$$

almeno fin quando la $\sigma(E, t)$ non cominci a uscire da C. Tale restrizione permette dunque di trarre dalle (5), non solo

$$2\dot{D}=(u_1+u_2)+(u_1-u_2)\cos\varphi,$$

$$2\dot{d}=(u_1+u_2)-(u_1-u_2)\cos\varphi,$$

ma anche

$$\dot{D}\leq u_1<u'' \quad , \quad \dot{d}\geq u_2>u'>0 :$$

fin quando la $\sigma(E, t)$ resti tutta interna a C, d è certo positivo, E interno [9]) a $\sigma(E, t)$, e sussistono ambedue le disuguaglianze

$$(6) \qquad D<u''t \quad , \quad d>u't.$$

Sia poi s_E la sfera di centro E e raggio

$$\delta_E\frac{u'}{u''}<\delta_E.$$

La $(6)_1$ dice che non si può venire ad avere $D=\delta_E$ altro che dopo l'istante

$$t_E=\frac{\delta_E}{u''},$$

in modo che per ogni $t\leq t_E$ la $\sigma(E, t)$ è certo tutta interna a C, nonchè *di diametro* $<2u''t$. Ma in base a $(6)_2$ si può pure aggiungere che per $t=t_E$ la $\sigma(E, t)$ abbraccia s_E, restando così nettamente stabilito che per qualche $t<t_E$ la $\sigma(E, t)$ deve avere transitato per un qualunque punto Q di un qualunque raggio della s_E: ciò che implica [cfr. n. 2, α_*)] la complanarità di ogni ν_Q a V_2V_1.

---

9) Cfr. loc. cit. 4), pp. 111-12.

4. Superficie di uguale indice e loro traiettorie ortogonali. — Sia λ una qualunque traiettoria ortogonale delle σ_n; Λ un punto qualsiasi di λ; l il raggio tangente in Λ a λ; L un punto qualunque di l; l_L l'arco di l limitato da Λ e L. Superfluo è rilevare che l toccherà in Λ anche la retta ν_Λ.

Fissiamo C in modo che Λ gli risulti interno e indichiamo con L' un punto di l pel quale $l_{L'}$ sia tutto dentro a C, con δ il minimo della distanza tra un punto di $l_{L'}$ e un punto del contorno di C, con L'' un punto di $l_{L'}$ tale che

$$\int_{l_{L''}} n ds < \frac{c\delta}{u''}. \tag{7}$$

Intendendo che E appartenga a $l_{L''}$, poniamo poi

$$\int_{l_E} n ds = c\tau_E,$$

con che, stante la (7), risulta

$$\tau_E < \frac{\delta}{u''}$$

e la $\sigma(E, \tau_E)$ — oltre toccare in Λ una σ_n — certo è tutta interna a C e di diametro $< 2u''\tau_E$.

Chiamiamo H il punto diametralmente opposto a Λ sulla sfera $\sigma(E, \tau_E)$, e in particolare H'' il punto diametralmente opposto a Λ su $\sigma(L'', \tau_{L''})$. Se, a partire da L'', si fa tendere E a Λ, il punto H, a partire da H'', deve tendere a Λ [perchè tende a zero $2u''\tau_E$]. D'altra parte in ogni H la ν_Λ è ortogonale a una σ_n, pel semplice motivo [cfr. n. 2, β_*)] che lo stesso si verifica in Λ.

Questo vuol dire che il segmento $\Lambda H''$ di ν_Λ fa sempre parte di λ. Quindi ogni λ ha ovunque flessione nulla, cioè le σ_n devono costituire una famiglia di superficie parallele. Anzi resta pure stabilito che per la generica $\sigma(E, t)$ la velocità di C [cfr. n. 2] ha sempre la direzione [10]) comune a ν_C e

---

[10]) Perchè è ormai escluso che ν_C differisca dalla $V_1V_2 \equiv \nu_{V_i}$ $(i = 1, 2)$.

g_C, con l'immediata conclusione che il centro della generica $\sigma(E, t)$ ha moto *rettilineo,* su $\nu_E \equiv V_1 V_2$.

Poco ormai manca per riconoscere che in definitiva le σ_n devono essere piani paralleli o sfere concentriche, in quanto dalle nostre premesse è facile ricavare che in ogni σ_n, riguardo a un qualunque suo punto N, devono risultare indeterminate le direzioni principali di curvatura.

Invero — sottintendendo che il solito C circondi N — indichiamo con σ_n' una parte della considerata σ_n che comprenda N e sia tutta interna a C; con δ la minima distanza di un punto di σ_n' dal contorno di C; con σ_n'' la parte di σ_n' interna alla sfera di centro N e raggio $\delta u'/2u''$. Se si assume per E un punto qualunque di σ_n'', un qualunque altro punto Q di σ_n'' riuscirà interno alla sfera di centro E e raggio $\delta u'/u''$. Questo implica [cfr. n. 3, in fine] la complanarità di ν_Q a $V_2 V_1 \equiv \nu_E$, condizione che [stante l'arbitrarietà di E e di Q] impone l'appartenenza dell'areola σ_n'' a un piano o ad una sfera, ecc.

5. Necessità della (1) o della (2) quando le σ_n siano piani paralleli o sfere concentriche. — Sempre tenendo presente la complanarità di (P, g_P) a $V_2 V_1$, conveniamo di indicare con α l'angolo di g_P con CP contato positivamente nel verso da P a V_1: dovremo quindi intendere, per ogni P,

$$\frac{\partial u_P}{R\partial\vartheta} = g_P \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{8}$$

Finora la (3) è stata utilizzata solo in parte. C'è ancora da trarre profitto del fatto che in base ad essa la (8) si specifica in

$$g_P \sin\alpha = \pm \frac{v_*}{R} \sin\theta. \tag{9}$$

Coinciamo con l'esaurire il caso che le σ_n siano piani paralleli, diciamo pure, piani normali all'asse x. All'uopo basta ormai fissare l'attenzione sul fatto che in tal caso la direzione di g_P deve essere invariabile e neppure può differire da quella di $V_2 V_1$; onde va sempre inteso $|\sin\alpha| = \sin\theta$ e la (9) dà luogo all'uguaglianza

$$g_P = \frac{v_*}{R}. \tag{10}$$

Evidentemente il primo membro potrebbe variare solo con x e il secondo solo con t. Quindi g_P e v_*/R devono identificarsi con una medesima costante, ω. Resta anzi provato che, quando le σ_n siano piani paralleli, basta un'opportuna scelta del piano $x = 0$ e del verso dell'asse x per far rientrare la $u(x, y, z)$ nel tipo (1), con $\omega > 0$.

Passiamo infine al caso che le σ_n siano sfere concentriche, di centro O; cioè al caso che tutte le ν_M e V_2V_1 concorrano in O. In aggiunta a (9) si ha allora, non più $|\sin\alpha| = \sin\theta$, ma invece

$$\frac{|\sin\alpha|}{\sin\theta} = \frac{|OC|}{r},$$

onde la (10) resta sostituita da

$$\frac{g_P}{r} = \frac{v_*}{R\,|OC|}.$$

Sono ora g_P/r e $v_*/R\,|OC|$ che devono coincidere in una stessa costante, $|2h|$, con l'immediata conclusione che la $u(x, y, z)$ deve rientrare nel tipo (2), ecc.