LORENZO CONTRI

Delle lastre e travi-parete rettangolari di spessore variabile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 346-352

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__346_0>

DELLE LASTRE E TRAVI - PARETE RETTANGOLARI DI SPESSORE VARIABILE

Nota (*) *di* LORENZO CONTRI

Coi termini *lastra* e *trave-parete* si intendono tradotti i termini tedeschi *Platte* e *Scheibe* indicanti lastre piane sottili assoggettate a sistemi di forze agenti rispettivamente in direzione normale al loro piano o nel loro piano stesso.

I primi studi sulle lastre e travi-parete di spessore variabile sono stati svolti circa cinquant'anni fa con la scrittura delle relative equazioni differenziali e l'allestimento di alcuni schemi di integrazione delle stesse per differenze finite [1; 2].

Nel campo delle lastre a contorno rettangolare sono stati studiati esattamente in periodo più recente alcuni casi particolarissimi di legge di variazione dello spessore che offrivano evidenti semplificazioni analitiche ma purtroppo scarso o nullo interesse per le pratiche applicazioni [3 ÷ 8]. Senza soluzione restavano tra l'altro i casi delle lastre e pareti rettangolari di spessore variabile linearmente nella direzione di una coppia di lati, specialmente le prime di larghissimo impiego nel campo delle costruzioni conciliando con la semplicità di forma un minor distacco, rispetto alle corrispondenti strutture di spessore costante, dalle dimensioni di uniforme resistenza per sollecitazioni dovute a spinte di tipo idrostatico.

Dallo scrivente era già stata esposta [9; 10] la trattazione della lastra suddetta con l'impiego delle funzioni integrali-esponenziali ampiamente tabulate, particolarizzando opportunamente il valore del modulo di Poisson ν.

(*) Pervenuta in Redazione il 6 giugno 1955.
Indirizzo dell'A.: Istituto costruzioni, ponti e strade, Università, Padova.

Vengono ora prese in esame più in generale lastre e travi-parete rettangolari di spessore costante nella direzione di una coppia di lati e variabile nella direzione dell'altra con la potenza di indice reale qualsiasi dell'ordinata corrispondente. Si limita tuttavia la considerazione al caso fondamentale di studio dell'influenza delle condizioni agli orli sui lati frontali, (così denominando quelli su cui lo spessore non varia), a lastra o parete scarica, corrispondentemente quindi a condizioni di omogeneità delle rispettive equazioni differenziali. Sui lati rimanenti si suppongono ancora per le lastre condizioni di semplice appoggio; le pareti sono invece considerate come facenti parte di striscie indefinite nella direzione dei lati frontali sui quali siano estese mediante prolungamento periodico per semionde di lunghezze pari ai lati, simmetricamente invertite ad ogni estremo, le condizioni assegnate.

Per valori qualsiasi di ν si esprimono a mezzo di funzioni ipergeometriche confluenti gli integrali generali relativi alle suddette condizioni esaminando successivamente alcune particolari combinazioni di valori di ν e leggi di variazione dello spessore per cui esse si riducono a funzioni elementari.

1. - Assunto il sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y) nel piano medio della lastra e supposto lo spessore costante nella direzione dell'asse x, le equazioni differenziali in questione si possono scrivere nella forma:

$$\Theta \Delta\Delta f + 2\frac{d\Theta}{dy}\frac{\partial}{\partial y}\Delta f + \frac{d^2\Theta}{dy^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \nu^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{1}$$

dove nel caso della lastra $f(x, y)$ è la freccia elastica, $\Theta(y) = N(y)$ è la rigidezza a flessione definita come usualmente da:

$$N = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2}$$

(E modulo di Young, $s(y)$ spessore della lastra),

$$\nu^* = -\nu\,.$$

Nel caso della trave parete è invece: $f(x, y) = F(x, y)$ *fun-*

zione delle tensioni da essa derivabili in base alle:

$$\sigma_x = \frac{1}{s}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{1}{s}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{s}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x} \tag{3}$$

e infine:

$$\Theta(y) = 1/s(y); \quad \nu^* = \nu.$$

Con:

$$\Theta(y) = \frac{\Theta_c}{c^t}\, y^t \tag{4}$$

la (1) diviene:

$$y^2 \Delta\Delta f + 2ty \frac{\partial}{\partial y}\Delta f + t(t-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \nu^* t(t-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \tag{5}$$

La lastra o parete da studiare sia limitata dalle rette $x = 0$, $x = a$ e da altra coppia di rette parallele all'asse x e situate dalla stessa parte rispetto ad esso.

Le condizioni di vincolo sopra enunciate da imporre sui lati paralleli all'asse y, si convertono in:

$$f = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{per } x = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$$

Ad esse soddisfa la:

$$\sum_{m=1,2,3,\ldots}^{\infty} Y_m(\eta_m) \sin \xi_m \tag{6}$$

dove per brevità si è posto:

$$\xi_m = \frac{n\pi x}{a}; \quad \eta_m = \frac{m\pi y}{a} \tag{7}$$

Sostituendo la (6) nella (5) si ottiene per ogni valore di m, (si ometteranno in seguito gli indici m per semplicità di scrittura), una equazione:

$$\eta^2 Y^{\text{IV}} + 2t\eta Y''' + [t(t-1) - 2\eta^2]Y'' - 2t\eta Y' + \\ + [\eta^2 + t(t-1)\nu^*]Y = 0. \tag{8}$$

2. - Si sono potuti a questo punto determinare gli operatori differenziali:

$$(9)\qquad \Lambda^{\pm} = \frac{d^2}{d\eta^2} - 1 \pm \frac{\sqrt{(1-t)(1+tv^*)}}{\eta} + \frac{1-(t-2)^2}{4\eta^2}$$

mediante i quali e con la posizione:

$$(10)\qquad \bar{Y} = \eta^{\frac{t-1}{2}} Y$$

l'equazione (8) assume la forma:

$$(11)\qquad \Lambda^{\pm}[\eta\Lambda^{\mp}\bar{Y}] = 0$$

potendosi tenere la coppia di segni superiore o quella inferiore.

Finchè restano distinti gli operatori Λ^+, Λ^-, e cioè per $t \neq 1$, $t\nu^* \neq 1$, quattro integrali particolari indipendenti della (8) sono allora dati mediante funzioni di Witthaker [11] da:

$$(12)\qquad \eta^{\frac{1-t}{2}} W_{\pm\chi,\mu}(\pm 2\eta)$$

dove:

$$(13)\qquad \chi = \frac{1}{2}\sqrt{(1-t)(1+t\nu^*)}\,;\quad \mu = \pm\left(\frac{t}{2}-1\right)$$

combinando variamente i segni di χ e dell'argomento, (rispetto a μ la $W_{\mu,\chi}(z)$ è funzione pari).

Si è preferito ricorrere a queste funzioni in luogo di altre funzioni ipergeometriche confluenti, perchè risultano definite per ogni valore di χ e di μ, e per $\chi \neq 0$ sempre linearmente indipendenti. Per le applicazioni è facile riportarsi al tipo di funzione di cui si abbia a disposizione la miglior tabulazione [12].

3. - Per $\chi = 0$ si nota anzitutto la seguente scomposizione dell'equazione (5):

$$(13)\qquad V[yV(y^{\frac{t-1}{2}}f)] = 0$$

con l'impiego dell'operatore:

$$(14)\qquad V = \Delta + \frac{1-(t-2)^2}{4\eta^2}$$

utilizzazione per la risoluzione nella massima generalità di contorno.

Nel campo attuale di studio una seconda coppia di soluzioni indipendenti da aggiungere alle (12), è fornita dalla equazione:

$$\eta \Lambda(\eta^{\frac{t-1}{2}} Y) = W_{0,\mu}(\pm 2\eta) \tag{15}$$

Si applica quindi il metodo di variazione delle costanti ricordando che il wronskiano di una coppia di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Witthaker è una costante non nulla. Inoltre per $\chi = 0$ le suddette funzioni di Witthaker vengono a coincidere a meno di fattori con le seguenti espressioni contenenti le funzioni cilindriche $K_\mu(z)$:

$$\eta^{\frac{1}{2}} K_\mu(\pm \eta). \tag{16}$$

Le due soluzioni risultano quindi:

$$\begin{gathered} \eta^{\frac{1-t}{2}} [K_\mu(\eta) S - K_\mu(-\eta) S_1] \\ \eta^{\frac{1-t}{2}} [K_\mu(\eta) S_2 - K_\mu(-\eta) S] \end{gathered} \tag{17}$$

con:

$$S = \int_{\eta_0}^{\eta} K_\mu(z) K_\mu(-z) dz$$

$$S_1 = \int_{\eta_0}^{\eta} K_\mu^2(z) dz \quad ; \quad S_2 = \int_{\eta_0}^{\eta} K_\mu^2(-z) dz$$

Per l'esecuzioni delle integrazioni si possono utilizzare le semplici scomposizioni in serie di potenze applicabili ai prodotti di funzioni cilindriche. Le applicazioni pratiche attualmente richieste portano a valori di μ corrispondenti a metà di numeri dispari, per i quali le funzioni cilindriche divengono funzioni elementari.

4. - *Casi particolari notevoli.* Per la lastra di rigidezza variabile proporzionalmente ad y, (primo caso risolto per la sua semplicità), è $t = 1$, $\chi = 0$, $|\mu| = 1/2$ e la (11) diviene [5]:

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1\right)\left[\eta\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - 1\right)Y\right] = 0. \tag{18}$$

Fissato χ, ad ogni valore di $t \neq 0$ ne corrisponde un secondo che porta allo stesso $|\mu|$ e quindi alla stessa forma dell'equazione (11) in $\overline{Y}$; al valore 1 di t si accompagna così il valore 3 corrispondente in base alla (2) ad una lastra di spessore variabile linearmente con y. Per avere ancora $\chi = 0$ si deve però questa volta prendere: $\nu = -\nu^* = 1/3$. L'equazione si ottiene dalla (18) scrivendovi ηY in luogo di Y. Dato il valore assunto da μ, i quattro integrali particolari indipendenti per Y sono dati da (9), (cfr. (15; 16)):

$$\begin{aligned} &\eta^{-1}e^{\eta}\,;\ \eta^{-1}e^{-\eta}\,;\quad \eta^{-1}[e^{\eta}\ln\eta - e^{-\eta}\,\overline{Ei}(2\eta)]\,; \\ &\eta^{-1}[e^{-\eta}\ln\eta - e^{\eta}\,Ei(-2\eta)]. \end{aligned} \tag{19}$$

Per la trave parete di spessore variabile linearmente con y è $t = -1$ e quindi $|\mu| = 3/2$.

Una coppia di soluzioni indipendenti è espressa mediante polinomi di Laguerre per:

$$\chi = n \pm \mu + 1/2$$

cioè:

$$\nu = 1 - 2(n+2)^2 \quad ; \quad \nu = 1 - 2(n-1)^2 \tag{20}$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$

Per $n = 0$ e quindi per i valori -1, -7 di ν si avrebbero in particolare le soluzioni, rispettivamente:

$$e^{\pm\eta}\,;\quad \eta^3 e^{\pm\eta}$$

L'unico valore positivo di ν fornito dalle (20) è 1, esterno anch'esso come i precedenti al campo di valori $0 \div 1/2$ entro cui la variazione di ν è costretta dal suo significato fisico

Ancora $\nu = 1$ fornisce la posizione $\chi = 0$ necessaria per giungere ad espressioni del tipo (16). Per l'integrazione della equazione differenziale della trave parete limitata da superfici piane, pare quindi necessario ricorrere per qualsiasi valore del campo di variabilità di ν all'impiego di funzioni ipergeometriche confluenti.

Analoga analisi porterebbe ad escludere anche che altri valori di ν oltre a quello di 1/3 già impiegato diano luogo a integrali espressi da funzioni elementari per la equazione della lastra corrispondente.

Le formule scritte restano valide anche per $t = 0$ ovvero per la piastra di spessore costante.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. FÖPPL: *Vorlesungen über technische Mechanik*, Vol. 5, pag. 55-58, Berlin und Leipzig, 1922.

[2] N. J. NIELSEN: *Bestemmelsee af Spoendinger i Plader ecc.*, pag. 76, Kopenhagen, 1920.

[3] A. HABEL: *Zwei Spannungsaufgaben des Bunkerbaues*, « Ingenieur-Archiv », Vol. 5, 1934, pag. 265-274.

[4] R. GRAN OLSSON: *Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Biegungssteifigkeit*, « Ingenieur-Archiv », Vol. 5, 1934, pag. 363-373.

[5] E. REISSNER: *Remark on the theory of bending of plates of variable thickness*, « J. Math. Phys. », Vol. 16, 1937, pag. 43-45.

[6] R. GRAN OLSSON: *A problem of buckling of elastic Plates of variable thickness*, « J. Math. Phys », Vol. 19, 1940, pag. 131.

[7] R. GRAN OLSSON: *Beitrag zur Knickung der Rechteckplatte von quadratisch veränderlicher Steifigkeit*, « Ingenieur-Archiv », Vol. 10, 1939, pag. 175-181.

[8] S. TIMOSKENKO: *Theory of Plates and Shells*, pag. 194-198, New-York and London, 1940, (riassume le pubblicazioni 4; 5).

[9] L. CONTRI: *Studio sulla lastra rettangolare di spessore variabile* linearmente nella direzione di una copia di lati, « Atti Ist. Ven. S.L.A. », 1952,53, Tomo CXI, pag. 183-195.

[10] L. CONTRI: *La lastra rettangolare di spessore variabile linearmente nella direzione di una copia di lati e su di essi semplicemente appoggiata*, « Giornale del Genio Civile », Vol. 93, 1955, pag. 136-142.

[11] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON: *Modern Analysis*, pag. 337-354, Cambridge, 1927.

[12] Per es.: $M_{\chi,\mu}(z)$ in: « Brit. Ass. », Section A, Oxford 1926, Leeds 1927, i cui dati sono anche riportati in grafici nell'opera: JAHNKE-EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*, pag. 271-278, Leipzig 1948.