GIOVANNI ZACHER

Un criterio di non semplicità di un gruppo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 215-219

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__215_0>

UN CRITERIO DI NON SEMPLICITÀ DI UN GRUPPO FINITO

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*)

Nella presente Nota dimostro che *se H è un sottogruppo proprio modulare non identico del gruppo finito G, il gruppo G non può essere semplice.*

La nozione di sottogruppo modulare è posta in una mia Memoria pubblicata in questi Rendiconti, e si può formulare dicendo che H è un sottogruppo modulare di G, se il reticolo $\{H, \mathfrak{R}\}$ generato da H, $\mathfrak{R}$ è modulare ogni volta che modulare sia il sottoreticolo $\mathfrak{R}$ del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G. Da quella mia Memoria traggo alcune proposizioni che utilizzerò in questa:

I. - Un antomorfismo di un grupo trasforma sottogruppi modulari in sottogruppi modulari.

II. - L'unione e l'intersezione di due sottogruppi modulari sono ancora sottogrupppi modulari.

III. - Se H è un sottogruppo modulare di G, se L è un sottogruppo di G con $H \cap L = 1$, se T è un sottogruppo di H, T è un sottogruppo modulare nel gruppo $T \cup L$.

Premesso questo, dimostro il seguente lemma:

Se G è un gruppo d'ordine finito ed H un sottogruppo modulare, H è permutabile con qualunque sottogruppo di G generato da elementi d'ordine primo con quello di H.

(*) Pervenuta in Redazione il 28 marzo 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Sia H un sottogruppo modulare ed anzi supponiamo che H sia pel momento un p-gruppo ciclico

$$H = \{h\}$$

coll'ordine $o(H) = p^{\nu}$.

Sia poi $\{a\}$ un gruppo ciclico d'ordine q^{β} con q numero primo diverso da p, $q \neq p$.

Poichè il nostro lemma è vero se l'ordine di G è pq, useremo per la dimostrazione induzione sull'ordine di G.

Consideriamo il gruppo $\{a\} \cup \{h\}$. Se $\{a\} \cup \{h\}$ è un sottogruppo proprio di G, poichè $\{h\}$ risulta modulare anche in $\{a\} \cup \{h\}$, per ipotesi d'induzione, sarà $\{a\}$ permutabile con $\{h\}$.

Sia dunque $\{a\} \cup \{h\} = G$.

E' ovviamente per l'ipotesi sull'ordine dei due gruppi

$$\{a\} \cap \{h\} = 1.$$

Affinchè allora $\{h\}$ risulti un sottogruppo modulare, dovrà essere sia $\{a\}$ che $\{h\}$ un sottogruppo di Sylow di G, altrimenti uno almeno sarebbe contenuto propriamente in un sottogruppo di Sylow di G, ad es. $\{a\} \subset S_q$, ed il reticolo

$$\{\{a\}, \{h\}, S_q\}$$

non sarebbe modulare.

Siano ora $\mathfrak{N}\{a\}$ ed $\mathfrak{N}\{h\}$ i normalizzanti di $\{a\}$ ed $\{h\}$ in G.

Se $\mathfrak{N}\{a\} = \{a\}$, oppure $\mathfrak{N}\{h\} = \{h\}$ per un teorema di BURNSIDE [1]), $\{a\}$ oppure $\{h\}$ ha un complemento normale in G.

Per fissare le idee sia $\mathfrak{N}\{a\} = \{a\}$.

Sarà $G = N\{a\}$, $N \cap \{a\} = 1$ ed inoltre $\{h\} \leq N$.

Ora $\{h\} \subset N$ è assurdo, perchè $\{\{h\}, N, \{a\}\}$ non sarebbe un reticolo modulare; pertanto $\{h\}$ è permutabile con $\{a\}$.

Il ragionamento è analogo se $\mathfrak{N}\{h\} = \{h\}$.

---

[1]) H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*. p. 133.

Ci resta dunque da discutere il caso in cui si abbia

$$\mathfrak{N}\{a\}\supset\{a\} \quad \text{ed} \quad \mathfrak{N}\{h\}\supset\{h\}$$

contemporaneamente.

Poichè $\{a\}$ è un sottogruppo modulare, dovrà essere sia

$$\mathfrak{N}\{a\}\cap\{h\}\neq 1 \quad \text{sia} \quad \mathfrak{N}\{h\}\cap\{a\}\neq 1.$$

Dei due numeri p, q, sia $p > q$.

Poniamo $L = \mathfrak{N}\{a\}\cap\{h\}$.

Il gruppo $L\cup\{a\} = [\mathfrak{N}\{a\}\cap\{h\}]\cup\{a\} = [\{a\}\cup\{h\}]\cap\mathfrak{N}\{a\} = \mathfrak{N}\{a\}$ è supersolubile come prodotto di 2 gruppi ciclici. Ma allora L è normale in $\mathfrak{N}\{a\}$ e così $\{a\}$, per cui

$$\mathfrak{N}\{a\} = L\times\{a\}.$$

Ma allora $\{a\}$ è abeliano, $\{a\}$ sta quindi nel centro del proprio normalizzante. Quindi $\{a\}$ ha un complemento normale che contiene $\{h\}$. Ma allora si conclude come sopra.

Se invece $q > p$, si prende in considerazione il gruppo $\mathfrak{N}\{h\}\cap\{a\}$ e si conclude analogamente.

Il lemma è così dimostrato nel caso che H sia un p-gruppo ciclico.

Sia ora H un gruppo qualunque ma non p-gruppo ciclico. Esso risulta allora unione di p-gruppi ciclici.

Sia $\{a\}$ uno qualunque p-gruppo ciclico di H. Il gruppo $\{h\}$ è allora permutabile con $\{a\}$ per la propos. III e per quanto si è dimostrato sopra. c. v. d.

Dalla III e dal lemma si trae il corollario: Se H ed L sono due sottogruppi di G con H sottogruppo modulare ed $H\cap L = 1$, allora se $\{a\}$ è un sottogruppo di H d'ordine p^σ e $\{b\}$ un sottogruppo di L d'ordine q^τ con $p\neq q$, il gruppo $\{a\}$ è permutabile col gruppo $\{b\}$.

Siamo ora in grado di dimostrare il nostro teorema.

Sia dunque G un gruppo finito ed H un suo sottogruppo proprio modulare e diverso dal sottogruppo identico 1. Distinguiamo due casi.

I. *caso*: L'ordine di H è divisibile per tutti i fattori primi che dividono l'ordine $o(G)$ di G.

Possiamo inoltre supporre che H sia un sottogruppo modulare minimo nel senso che H non contenga alcun sottogruppo proprio diverso da 1 che sia pure modulare in G.

Se allora N è un altro sottogruppo modulare che non contiene H, sarà $H \cap N = 1$, essendo l'intersezione di due sottogruppi modulari ancora modulare (props. II).

Siano $H = H_1, H_2, \ldots, H_t$ i coniugati di H in G.

Supposto G semplice, sarà $t > 1$ ed

$$H_i \cap H_j = 1 \quad \text{per } i \neq j \tag{1}$$

dato che H è un sottogruppo modulare minimo come H_1 per la propos. I.

Indichiamo con $\mathfrak{N}(H_i)$ il normalizzante di H_i in G e con R un sottogruppo non identico di H_i. Si ha

$$\mathfrak{N}(H_i) \supseteq \mathfrak{N}(R)$$

dove $\mathfrak{N}(R)$ è il normalizzante di R in G.

Infatti se g è un elemento di $\mathfrak{N}(R)$ risulta $gRg^{-1} = R$, e quindi se gH_ig^{-1} fosse uguale ad H_j con $j \neq i$, sarebbe

$$H_i \cap H_j \supseteq R \supset 1.$$

contro la (1).

Detto p il massimo divisore primo di $o(G)$, per l'ipotesi fatta su $o(H)$, il gruppo H contiene un sottogruppo ciclico $\{a\}$ d'ordine p.

Sarà $\mathfrak{N}(H) \supseteq \mathfrak{N}\{a\}$. Sia poi b un elemento d'ordine q di H, con q numero primo diverso da p. Consideriamo i coniugati di b non contenuti in $H_1 = H$. Tale insieme $\mathfrak{J}$ per la (1) non è vuoto. Sia $\bar{b}$ un elemento di $\mathfrak{J}$. Sarà $\bar{b} \in H_k$ con k conveniente intero diverso da 1. Ora abbiamo

$$H_1 \cap H = 1, \ H_1 \text{ sottogruppo modulare}, \ a \in H_1, \ \bar{b} \in H_k$$

e gli ordini a e b rispett. p e q. Pel corollario sarà dunque

$$\{a\} \cup \{\bar{b}\} = \{a\}\{\bar{b}\}$$

$\{a\}\{\bar{b}\}$ è dunque supersolubile, quindi $\{a\}$ in esso sottogruppo normale essendo $p > q$.

Ne segue che $\mathfrak{N}(H_1)$ contiene tutti i coniugati di b non contenuti in H_2. Ma $\mathfrak{N}(H_1) \supseteq H_1$, quindi $\mathfrak{N}(H_1)$ contiene tutti i coniugati di b in G. Se allora K_b indica la classe di tutti gli elementi coniugati di b in G, essendo G semplice, risulta.

$$G = \{ K_b \}.$$

Ma allora $\mathfrak{N}(H) \supseteq \{ K_b \} = G$
ossia il sottogruppo proprio non identico H è un sottogruppo normale in G, che è contro l'ipotesi che G sia semplice.

II. *caso*: L'ordine di H non è divisibile per tutti i fattori primi di $o(G)$.

Detto ancora p il massimo fattore di $o(G)$, potremo sempre trovare due sottogruppi $\{ a \}$, $\{ b \}$ di G, d'ordini rispettivamente p, q dove solo uno dei 2 numeri primi p, q divide $o(H)$.

Se allora p divide $o(H)$, $\{ a \}$ possiamo supporre contenuto in H e allora se K_b è la classe completa degli elementi coniugati di b in G, pel corollario, $\{ b \}$ risulta normale in $\{ a \} \cup \{ K_b \}$ ossia in G, ciò che è assurdo. Se invece $\{ b \}$ è contenuto in H, poichè allora i coniugati di $\{ b \}$ stanno nei coniugati di H, sono ancora soddisfatte le ipotesi del corollario, per cui $\{ a \}$ è ancora normale in $\{ a \} \cup \{ K_b \} = G$, cosa che è pure assurda.

E la dimostrazione del fatto che: *se il gruppo finito G possiede sottogruppi propri modulari non identici, esso non è semplice,* è completa; si noti che per concludere basta che G possegga almeno un sottogruppo proprio modulare non identico.