# Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova



Giovanni Zacher


## Un criterio di non semplicità di un gruppo finito


*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 24 (1955), p. 215-219

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__215_0>

# UN CRITERIO DI NON SEMPLICITÀ DI UN GRUPPO FINITO

*Nota* (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*)

Nella presente Nota dimostro che *se $H$ è un sottogruppo proprio modulare non identico del gruppo finito $G$, il gruppo $G$ non può essere semplice.*

La nozione di sottogruppo modulare è posta in una mia Memoria pubblicata in questi Rendiconti, e si può formulare dicendo che $H$ è un sottogruppo modulare di $G$, se il reticolo $\{H, \mathfrak{R}\}$ generato da $H$, $\mathfrak{R}$ è modulare ogni volta che modulare sia il sottoreticolo $\mathfrak{R}$ del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di $G$. Da quella mia Memoria traggo alcune proposizioni che utilizzerò in questa:

I. - Un antomorfismo di un grupo trasforma sottogruppi modulari in sottogruppi modulari.

II. - L'unione e l'intersezione di due sottogruppi modulari sono ancora sottogrupppi modulari.

III. - Se $H$ è un sottogruppo modulare di $G$, se $L$ è un sottogruppo di $G$ con $H \cap L = 1$, se $T$ è un sottogruppo di $H$, T è un sottogruppo modulare nel gruppo $T \cup L$.

Premesso questo, dimostro il seguente lemma:

Se $G$ è un gruppo d'ordine finito ed $H$ un sottogruppo modulare, $H$ è permutabile con qualunque sottogruppo di $G$ generato da elementi d'ordine primo con quello di $H$.

---

(*) Pervenuta in Redazione il 28 marzo 1955.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Sia $H$ un sottogruppo modulare ed anzi supponiamo che $H$ sia pel momento un $p$-gruppo ciclico

$$H = \{h\}$$

coll'ordine $o(H) = p^\nu$.

Sia poi $\{a\}$ un gruppo ciclico d'ordine $q^\beta$ con $q$ numero primo diverso da $p$, $q \neq p$.

Poichè il nostro lemma è vero se l'ordine di $G$ è $pq$, useremo per la dimostrazione induzione sull'ordine di $G$.

Consideriamo il gruppo $\{a\} \cup \{h\}$. Se $\{a\} \cup \{h\}$ è un sottogruppo proprio di $G$, poichè $\{h\}$ risulta modulare anche in $\{a\} \cup \{h\}$, per ipotesi d'induzione, sarà $\{a\}$ permutabile con $\{h\}$.

Sia dunque $\{a\} \cup \{h\} = G$.

E' ovviamente per l'ipotesi sull'ordine dei due gruppi

$$\{a\} \cap \{h\} = 1.$$

Affinchè allora $\{h\}$ risulti un sottogruppo modulare, dovrà essere sia $\{a\}$ che $\{h\}$ un sottogruppo di Sylow di $G$, altrimenti uno almeno sarebbe contenuto propriamente in un sottogruppo di Sylow di $G$, ad es. $\{a\} \subset S_q$, ed il reticolo

$$\{\{a\}, \{h\}, S_q\}$$

non sarebbe modulare.

Siano ora $\mathfrak{N}\{a\}$ ed $\mathfrak{N}\{h\}$ i normalizzanti di $\{a\}$ ed $\{h\}$ in $G$.

Se $\mathfrak{N}\{a\} = \{a\}$, oppure $\mathfrak{N}\{h\} = \{h\}$ per un teorema di BURNSIDE [1]), $\{a\}$ oppure $\{h\}$ ha un complemento normale in $G$.

Per fissare le idee sia $\mathfrak{N}\{a\} = \{a\}$.

Sarà $G = N\{a\}$, $N \cap \{a\} = 1$ ed inoltre $\{h\} \leq N$.

Ora $\{h\} \subset N$ è assurdo, perchè $\{\{h\}, N, \{a\}\}$ non sarebbe un reticolo modulare; pertanto $\{h\}$ è permutabile con $\{a\}$.

Il ragionamento è analogo se $\mathfrak{N}\{h\} = \{h\}$.

---

[1]) H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*. p. 133.

Ci resta dunque da discutere il caso in cui si abbia

$$\mathfrak{N}\{a\} \supset \{a\} \quad \text{ed} \quad \mathfrak{N}\{h\} \supset \{h\}$$

contemporaneamente.

Poichè $\{a\}$ è un sottogruppo modulare, dovrà essere sia

$$\mathfrak{N}\{a\} \cap \{h\} \neq 1 \quad \text{sia} \quad \mathfrak{N}\{h\} \cap \{a\} \neq 1.$$

Dei due numeri $p$, $q$, sia $p > q$.

Poniamo $L = \mathfrak{N}\{a\} \cap \{h\}$.

Il gruppo $L \cup \{a\} = [\mathfrak{N}\{a\} \cap \{h\}] \cup \{a\} = [\{a\} \cup \{h\}] \cap \mathfrak{N}\{a\} = \mathfrak{N}\{a\}$ è supersolubile come prodotto di 2 gruppi ciclici. Ma allora $L$ è normale in $\mathfrak{N}\{a\}$ e così $\{a\}$, per cui

$$\mathfrak{N}\{a\} = L \times \{a\}.$$

Ma allora $\{a\}$ è abeliano, $\{a\}$ sta quindi nel centro del proprio normalizzante. Quindi $\{a\}$ ha un complemento normale che contiene $\{h\}$. Ma allora si conclude come sopra.

Se invece $q > p$, si prende in considerazione il gruppo $\mathfrak{N}\{h\} \cap \{a\}$ e si conclude analogamente.

Il lemma è così dimostrato nel caso che $H$ sia un $p$-gruppo ciclico.

Sia ora $H$ un gruppo qualunque ma non $p$-gruppo ciclico. Esso risulta allora unione di $p$-gruppi ciclici.

Sia $\{a\}$ uno qualunque $p$-gruppo ciclico di $H$. Il gruppo $\{h\}$ è allora permutabile con $\{a\}$ per la propos. III e per quanto si è dimostrato sopra. c. v. d.

Dalla III e dal lemma si trae il corollario: Se $H$ ed $L$ sono due sottogruppi di $G$ con $H$ sottogruppo modulare ed $H \cap L = 1$, allora se $\{a\}$ è un sottogruppo di $H$ d'ordine $p^\sigma$ e $\{b\}$ un sottogruppo di $L$ d'ordine $q^\tau$ con $p \neq q$, il gruppo $\{a\}$ è permutabile col gruppo $\{b\}$.

Siamo ora in grado di dimostrare il nostro teorema.

Sia dunque $G$ un gruppo finito ed $H$ un suo sottogruppo proprio modulare e diverso dal sottogruppo identico 1. Distinguiamo due casi.

I. *caso*: L'ordine di $H$ è divisibile per tutti i fattori primi che dividono l'ordine $o(G)$ di $G$.

Possiamo inoltre supporre che $H$ sia un sottogruppo modulare minimo nel senso che $H$ non contenga alcun sottogruppo proprio diverso da 1 che sia pure modulare in $G$.

Se allora $N$ è un altro sottogruppo modulare che non contiene $H$, sarà $H \cap N = 1$, essendo l'intersezione di due sottogruppi modulari ancora modulare (props. II).

Siano $H = H_1, H_2, \dots, H_t$ i coniugati di $H$ in $G$.

Supposto $G$ semplice, sarà $t > 1$ ed

$$(1) \qquad H_i \cap H_j = 1 \quad \text{per } i \neq j$$

dato che $H$ è un sottogruppo modulare minimo come $H_1$ per la propos. I.

Indichiamo con $\mathfrak{N}(H_i)$ il normalizzante di $H_i$ in $G$ e con $R$ un sottogruppo non identico di $H_i$. Si ha

$$\mathfrak{N}(H_i) \supseteq \mathfrak{N}(R)$$

dove $\mathfrak{N}(R)$ è il normalizzante di $R$ in $G$.

Infatti se $g$ è un elemento di $\mathfrak{N}(R)$ risulta $gRg^{-1} = R$, e quindi se $gH_ig^{-1}$ fosse uguale ad $H_j$ con $j \neq i$, sarebbe

$$H_i \cap H_j \supseteq R \supset 1.$$

contro la (1).

Detto $p$ il massimo divisore primo di $o(G)$, per l'ipotesi fatta su $o(H)$, il gruppo $H$ contiene un sottogruppo ciclico $\{a\}$ d'ordine $p$.

Sarà $\mathfrak{N}(H) \supseteq \mathfrak{N}\{a\}$. Sia poi $b$ un elemento d'ordine $q$ di $H$, con $q$ numero primo diverso da $p$. Consideriamo i coniugati di $b$ non contenuti in $H_1 = H$. Tale insieme $\mathfrak{I}$ per la (1) non è vuoto. Sia $\bar{b}$ un elemento di $\mathfrak{I}$. Sarà $\bar{b} \in H_k$ con $k$ conveniente intero diverso da 1. Ora abbiamo

$$H_1 \cap H = 1, \quad H_1 \text{ sottogruppo modulare}, \; a \in H_1, \; \bar{b} \in H_k$$

e gli ordini $a$ e $b$ rispett. $p$ e $q$. Pel corollario sarà dunque

$$\{a\} \cup \{\bar{b}\} = \{a\}\{\bar{b}\}$$

$\{a\}\{\bar{b}\}$ è dunque supersolubile, quindi $\{a\}$ in esso sottogruppo normale essendo $p > q$.

Ne segue che $\mathfrak{N}(H_1)$ contiene tutti i coniugati di $b$ non contenuti in $H_2$. Ma $\mathfrak{N}(H_1) \supseteq H_1$, quindi $\mathfrak{N}(H_1)$ contiene tutti i coniugati di $b$ in $G$. Se allora $K_b$ indica la classe di tutti gli elementi coniugati di $b$ in $G$, essendo $G$ semplice, risulta.

$$G = \{K_b\}.$$

Ma allora $\mathfrak{N}(H) \supseteq \{K_b\} = G$
ossia il sottogruppo proprio non identico $H$ è un sottogruppo normale in $G$, che è contro l'ipotesi che $G$ sia semplice.

II. *caso*: L'ordine di $H$ non è divisibile per tutti i fattori primi di $o(G)$.

Detto ancora $p$ il massimo fattore di $o(G)$, potremo sempre trovare due sottogruppi $\{a\}$, $\{b\}$ di $G$, d'ordini rispettivamente $p$, $q$ dove solo uno dei 2 numeri primi $p$, $q$ divide $o(H)$.

Se allora $p$ divide $o(H)$, $\{a\}$ possiamo supporre contenuto in $H$ e allora se $K_b$ è la classe completa degli elementi coniugati di $b$ in $G$, pel corollario, $\{b\}$ risulta normale in $\{a\} \cup \{K_b\}$ ossia in $G$, ciò che è assurdo. Se invece $\{b\}$ è contenuto in $H$, poichè allora i coniugati di $\{b\}$ stanno nei coniugati di $H$, sono ancora soddisfatte le ipotesi del corollario, per cui $\{a\}$ è ancora normale in $\{a\} \cup \{K_b\} = G$, cosa che è pure assurda.

E la dimostrazione del fatto che: *se il gruppo finito $G$ possiede sottogruppi propri modulari non identici, esso non è semplice,* è completa; si noti che per concludere basta che $G$ possegga almeno un sottogruppo proprio modulare non identico.