ENRICO MAGENES

Problemi al contorno misti per l'equazione del calore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 1-28

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__1_0>

PROBLEMI AL CONTORNO MISTI PER L'EQUAZIONE DEL CALORE

Memoria (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Modena*)

La teoria della diffusione del calore porta, come è noto, allo studio di problemi di valori al contorno per l'equazione di tipo parabolico

$$E(u) \equiv \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1, \dots, x_m, y) \tag{1}$$

Assegnata anzitutto la distribuzione della temperatura nei punti del corpo all'istante iniziale, i due problemi al contorno notoriamente più studiati, che noi chiameremo rispettivamente *primo e secondo problema al contorno,* sono quelli corrispondenti a ritenere anche nota negli istanti successivi la temperatura di tutto il contorno del corpo oppure la temperatura dello spazio ambientale e le condizioni di irraggiamento e conducibilità del contorno del corpo.

Analiticamente essi corrispondono alla ricerca di una soluzione u della (1) per $(x_1, \dots, x_m)$ variabile nel dominio D (il corpo) e y (il tempo) tra 0 e y_0, di cui siano assegnati il valore per $y = 0$ e $(x_1, \dots, x_m) \in D$ e quello per $0 < y \leq y_0$ e $(x_1, \dots, x_m) \in FD$ (FD frontiera di D), oppure il valore per $y = 0$ e $(x_1, \dots, x_m) \in D$ e una combinazione lineare del tipo $\dfrac{du}{d\nu} + hu \left(\dfrac{du}{d\nu}\right.$ derivata secondo la normale interna$\left.\right)$ per $0 < y \leq y_0$ e $(x_1, \dots, x_m) \in FD$.

A questi problemi al contorno, che chiamerò « uniformi » per la loro analogia con i problemi di DIRICHLET e di NEU-

---

*) Pervenuta in Redazione il 28 giugno 1954.

2

MANN nella teoria delle equazioni lineari di tipo ellittico, è da aggiungere un terzo problema tipico, il problema « misto », consistente nell'assegnare la soluzione u per $y=0$, $(x_1, .., x_m) \in D$ e, per $0 < y \leq y_0$, la u oppure la $\frac{du}{d\nu} + hu$ secondo che $(x_1, ..., x_m)$ appartenga a una parte F_1D di FD oppure alla rimanente F_2D. Esso corrisponde fisicamente a ritenere note nell'istante iniziale la temperatura di tutto il corpo e negli istanti successivi la temperatura del corpo in una parte del suo contorno e quella dello spazio ambiente sulla rimanente parte del contorno.

Non mi risulta che siano state finora trattate le questioni esistenziali relative a questo problema, se si eccettua il caso particolare che, essendo il corpo filiforme ($m = 1$) oppure più volte connesso, le parti F_1D e F_2D siano a distanza positiva tra di loro (caso banale perchè il problema allora non presenta nulla di nuovo rispetto ai problemi « uniformi » e si tratta nello stesso modo, come osservò già fin dal 1908 E. E. LEVI [14] [1]). In realtà il problema « misto » presenta nel caso generale difficoltà di tipo essenzialmente nuovo rispetto ai problemi « uniformi » e ciò avviene nei confronti di tutti i diversi metodi esistenziali finora usati nello studio degli stessi problemi « uniformi » [2]). D'altra parte se l'analogia con le equazioni di tipo ellittico poteva suggerire di estendere i metodi con i quali era stato studiato l'analogo problema « misto » per quelle equazioni (una combinazione cioè del problema

1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale del presente lavoro.

2) Una esposizione notevole riguardante la teoria della (1) e una bibliografia vastissima fino al 1936 si trovano negli articoli di G. ASCOLI e G. GIRAUD della monografia [2]; richiamerò in particolare i lavori di E. E. Levi [14] e [13], di M. GEVREY [11], [9] e [10], di G. GIRAUD [2] e [12]; successivamente al 1936 si vedano tra l'altro i lavori [1], [6], [15], [3], [17], [16]. Osserverò poi fin d'ora che nel presente lavoro farò uso di risultati e di proprietà, ormai note, relativi alla (1) e dovuti soprattutto a E. E. LEVI, M. GEVREY e G. GIRAUD; per essi rinvio una volta per tutti ai lavori ora citati.

di DIRICHLET e di quello di NEUMANN), si trovava che l'unico metodo finora veramente efficace nel caso ellittico, dovuto a G. FICHERA [7], era strettamente legato all'ipotesi dell'*autoaggiunzione* dell'equazione, cosa che ne escludeva l'applicazione immediata all'equazione (1) [2']).

Orbene, è appunto l'aver trovato un metodo, per il problema « misto » relativo alle equazioni di tipo ellittico, indipendente dall'autoaggiunzione dell'equazione [3]), che mi ha permesso di trattare anche per l'equazione del calore le questioni esistenziali inerenti al problema « misto ». Infatti quel metodo si può estendere anche alle equazioni di tipo parabolico, in particolare alla (1), come appunto mostrerò nel presente lavoro.

Il problema « misto » verrà qui considerato secondo due diverse « impostazioni », riguardanti il modo secondo il quale i dati al contorno vengono assunti: in una impostazione i dati vengono assunti « puntualmente », nel senso classico, sia per quanto riguarda la u che la $\frac{du}{d\nu} + hu$; nell'altra impostazione invece i dati vengono assunti in parte « puntualmente » e in parte (e precisamente i valori della u sulla F_1D per $0 < y \leq y_0$) « in media », in un senso analogo a quello che G. CIMMINO ha introdotto nei Suoi studi sul problema generalizzato di DIRICHLET per le equazioni di tipo ellittico (v. ad es. [5] e [4]) e che B. PINI ha recentemente esteso al primo problema al contorno per la (1) (v. [17], [16]). Vengono così ottenuti due teoremi di esistenza, dopo aver precisato ogni volta la classe di funzioni in cui va cercata la soluzione; e in una di queste classi, corrispondente al secondo modo di assumere i dati al contorno, viene anche dimostrata l'unicità della soluzione.

2') Di un altro recentissimo metodo del FICHERA, relativo alle equazioni di tipo ellittico in due variabili indipendenti, e della sua possibile estensione alla (1) nel caso $m = 2$ ho avuto notizia quando il presente lavoro era già compilato; il metodo e i risultati del FICHERA saranno pubblicati negli *Atti del Convegno Internazionale sulle equazioni lineari alle derivate parziali*. (Trieste - agosto 1954).

3) Il metodo e i risultati per le equazioni di tipo ellittico sono stati da me esposti in una memoria in corso di stampa sugli *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (serie III, vol. VIII).

Non mi dilungo ulteriormente nella descrizione del metodo usato e nelle considerazioni ad esso relative per le quali rinvio alla prefazione della memoria citata in [3]); mi limito, ad osservare che il teorema di completezza sul quale si fonda il metodo stesso è stato da me dimostrato proprio su questi *Rendiconti* [15] e che naturalmente anche ora mi sono stati utili, per le questioni relative alla convergenza e al teorema di unicità, ragionamenti del tipo di quelli usati da G. CIMMINO per il Suo metodo di trattazione del problema generalizzato da DIRICHLET (v. ad es. [5] e [4]).

Per semplicità di esposizione ho supposto $m = 2$ e (il corpo) D semplicemente connesso, dividendo la sua frontiera in due soli archi F_1D e F_2D; e ho inoltre supposto $h = 0$. Ma non si ha difficoltà ad applicare il metodo in generale, m essendo qualunque, D più volte convesso, F_1D e F_2D composte da un numero finito di varietà sufficientemente regolari, la funzione h continua e non positiva su F_2D.

1. - Preliminari. - α) Sia D un dominio regolare limitato nel piano (x_1, x_2), la cui frontiera FD sia costituita da una curva semplice chiusa di classe 2 in ogni suo punto [4]); e sia

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases} \qquad a_1 \leq t \leq a_2 \tag{2}$$

una rappresentazione parametrica regolare di FD. Mediante i punti $Q_1 \equiv [x_1(t_1), x_2(t_1)]$ e $Q_2 \equiv [x_1(t_2), x_2(t_2)]$ $(a_1 < t_1 < < t_2 < a_2)$ dividiamo FD in due sottoarchi aperti e privi di estremi F_1D e F_2D. F_1D sia il sottoarco che si ottiene dalle (2) per $t_1 < t < t_2$, F_2D il rimanente; $\overline{F_1D}$ e $\overline{F_2D}$ siano gli stessi

[4]) Secondo una nomenclatura abituale diremo che una funzione è di classe r in un insieme se essa è ivi continua insieme alle sue derivate parziali di ordine $\leq r$; diremo che è di classe rH se, inoltre, le derivate d'ordine $\leq r$ soddisfano ad una condizione di HÖLDER; analogamente diremo che una curva regolare è di classe r o rH in un punto M se risulta definita in un intorno di M da una rappresentazione parametrica con funzioni di classe r o rH.

archi cui si siano aggiunti gli estremi Q_1 e Q_2. Fissato $y_0 > 0$ indichiamo con τ il dominio cilindrico dello spazio (x_1, x_2, y) costituito dai punti tali che (x_1, x_2) appartenga a D e $0 \leq y \leq y_0$, con σ la frontiera di τ, con s la superficie laterale di τ e precisamente l'insieme dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in FD$ e $0 < y \leq y_0$. In corrispondenza poi della suddivisione operata su FD, potremo distinguere su s le parti s_1, s_2, $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ luoghi dei punti (x_1, x_2, y) tali che $0 < y \leq y_0$ e (x_1, x_2) appartenga rispettivamente a F_1D, F_2D, $\overline{F_1D}$, $\overline{F_2D}$. Indichiamo infine con B la base superiore di τ cioè l'insieme dei punti (x_1, x_2, y) per cui $y = y_0$ e $(x_1, x_2) \in D$.

β) Consideriamo ora l'equazione parabolica

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1, x_2, y) \tag{1}$$

e indichiamo con $E^*(u)$ l'operatore aggiunto di $E(u)$:

$$E^*(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Il problema al contorno che ci poniamo è quello di studiare l'esistenza in una opportuna classe di funzioni di una soluzione $u(P)$ della equazione (1) nel dominio τ, assegnati che siano i valori $\mu(P)$ della u stessa su $D + s_1$ e quelli $\delta(P)$ della sua derivata normale $\frac{du}{d\nu}$ [5]) su s_2.

Possiamo limitarci a supporre che sia $f \equiv 0$ in τ, $\delta \equiv 0$ su s_2 e $\mu \equiv 0$ su D. Con ciò non particolarizziamo il nostro problema, poichè se δ è la traccia su s_2 di un funzione δ^* continua su tutto s, μ è pure continua su D ed f è opportunamente regolare in τ (per es. hölderiana in τ), è noto che è sempre risolubile il problema

$$E(u) = f \text{ in } \tau - \sigma \quad , \quad u = \mu \text{ su } D \quad , \quad \frac{du}{d\nu} = \delta^* \text{ su } s\,.$$

[5]) Supporremo la normale a s orientata sempre verso l'interno di τ; evidentemente la direzione e il verso di essa non dipendono dalla y.

Supposto dunque $f \equiv 0$ in τ, $\delta \equiv 0$ su s_2, $\mu = 0$ su D, si tratterà ora di precisare il nostro problema al contorno determinando in quali classi di funzioni si debba cercare la soluzione e in che senso debbano essere assunti i dati al contorno, cosa che faremo nei numeri successivi.

γ) Richiamiamo dapprima il seguente, per noi fondamentale, teorema di completezza:

TEOREMA DI COMPLETEZZA: *Esiste una successione* $\{w_k(P)\}$ $(k = 1, 2, ...)$ *di soluzioni regolari in* $\tau - \sigma$ *della* $E(u) = 0$ [6]) *e di classe* 1 *in* τ, *tale che il sistema dei vettori* $\{w_k\}$ *nello spazio* S_3 *di componenti*

$$w_k(P) \ su \ D \quad , \quad w_k(P) \ su \ s_1 \quad , \quad -\frac{dw_k}{d\nu} \ su \ s_2$$

è completo per l'approssimazione lineare in media del secondo ordine dei vettori di S_3 *di componenti di quadrato sommabile rispettivamente su* D, s_1 *e* s_2.

Sistemi di funzioni $\{w_k(P)\}$ del tipo suddetto possono costruirsi in generale e in diversi modi; essi sono stati introdotti da L. AMERIO [1] e la loro completezza è stata da me dimostrata in [15]; nel caso particolare che il dominio D sia semplicemente connesso, come abbiamo supposto per semplicità, per sistema $\{w_k(P)\}$ può prendersi lo stesso sistema dei polinomi parabolici (v. [15: Nota II, n. 4]).

2. - Identità fondamentale. - α) Sia

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(t, r) \\ x_2 = x_2(t, r) \end{array} \right. \tag{3}$$

una trasformazione biunivoca e bicontinua del rettangolo $R \equiv [t_1 \leq t \leq t_2, \ 0 \leq r \leq r_1]$ del piano (t, r) nel dominio D del piano (x_1, x_2) tale che:

---

[6]) Diremo che una funzione u è soluzione regolare dalla $E(u) = 0$ in un insieme se essa è ivi continua insieme alle derivate $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ e soddisfa ivi alla $E(u) = 0$.

I) *per ogni r le* (3) *diano al variare di t una rappresentazione parametrica regolare di una curva regolare γ_r, la quale per $r = 0$ coincida con l'arco $\overline{F_1 D}$; precisamente*

$$x_1(t,\ 0) = x_1(t) \qquad\qquad x_2(t,\ 0) = x_2(t)\ ;$$

II) *almeno per r sufficientemente piccolo, gli estremi di γ_r, $Q_{i,r} \equiv [x_1(t_i,\ r),\ x_2(t_i,\ r)]$ $(i = 1,\ 2)$, e solo essi, siano punti di $F_2 D$; precisamente sia per $0 < r \leq r_0$ $(r_0 < r_1)$*

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} x_1(t_1,\ r) = x_1(t_1 - r) & x_1(t_2,\ r) = x_1(t_2 + r) \\ x_2(t_1,\ r) = x_2(t_1 - r) & x_2(t_2,\ r) = x_2(t_2 + r)\,. \end{cases}$$

III) *siano generalmente continue e limitate in R le derivate delle $x_i(t,\ r)$ rispetto a t e r, $x_{i,t}$ e $x_{i,r}$ $(i = 1,\ 2)$ e siano tali che*

$$x_{1,t}\, x_{2,r} - x_{1,r}\, x_{2,t} > 0;$$

inoltre siano verificate per $0 < r \leq r_0$ le

$$\text{(5)} \qquad x_{1,t}(t_{i,r})\, x_{1,r}(t_{i,r}) + x_{2,t}(t_{i,r}) x_{2,r}(t_{i,r}) = 0 \qquad (i = 1,\ 2).$$

Si osservi che le (5) in virtù delle (4) esprimono il fatto che γ_r *sia ortogonale a FD nei punti* $Q_{1,r}$ e $Q_{2,r}$.

Considerato il seguente sistema di equazioni

$$\text{(6)} \qquad x_{1,r} = -\alpha x_{2,t} + \beta x_{1,t} \qquad x_{2,r} = \alpha x_{1,t} + \beta x_{2,t}$$

si ha per le funzioni α e β in R

$$\text{(7)} \qquad \alpha = \frac{x_{1,t} x_{2,r} - x_{1,r} x_{2,t}}{x^2_{1,t} + x^2_{2,t}} \qquad \beta = \frac{x_{1,t} x_{1,r} + x_{2,t} x_{2,r}}{x^2_{1,t} + x^2_{2,t}}\,.$$

Mediante le (3) operiamo ora la trasformazione

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} x_1 = x_1(t,\ r) \\ x_2 = x_2(t,\ r) \\ y = y \end{cases}$$

la quale trasforma il parallelepipedo $C \equiv [t_1 \leq t \leq t_2\,;\ 0 \leq r \leq r_1\,;\ 0 \leq y \leq y_0]$ dello spazio $(t,\ r,\ y)$ nel cilindro τ dello spazio $(x_1,\ x_2,\ y)$ in modo biunivoco e bicontinuo; dalle curve γ_r vengono così individuate delle superfici Γ_r luogo dei punti $(x_1,\ x_2,\ y)$ per cui $(x_1,\ x_2) \in \gamma_r$ e $0 < y \leq y_0$.

Introduciamo ora una funzione «peso» $P(t, r, y)$ sulla quale supponiamo che:

a) *$P(t, r, y)$ sia continua e positiva in tutto C e tale che il prodotto $P\alpha$, considerato attraverso l'inversa della* (8) *come funzione di (x_1, x_2, y), sia in $\tau - (\bar{s}_1 + \overline{F_1 D})$ funzione di classe 2*

b) *per ogni r e ogni y tali che $0 < r \leq r_0$, $0 \leq y \leq y_0$ esista e sia limitata quasi-ovunque in (t_1, t_2) la derivata $(P\beta)_t$; per gli stessi r e y e per quasi-tutti i t di (t_1, t_2) esista la derivata P_r e sia limitata nell'intorno di ogni tale r al variare di y in $(0, y_0)$ e di t in (t_1, t_2).*

β) Fatte queste premesse sia $u(x_1, x_2, y)$ una funzione soddisfacente alle seguenti condizioni:

1) *è soluzione regolare di $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$,*

2) *è continua in $\tau - (\bar{s}_1 + \overline{F_1 D})$,*

3) *ha le derivate prime $\dfrac{\partial u}{dx_1}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ continue in $\tau - (\bar{s}_1 + \overline{F_1 D})$.*

Si consideri per $0 < r \leq r_0$ la funzione di r

$$\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) u^2[x_1(t, r), x_2(t, r), y]\, dydt .$$

Possiamo derivare questa funzione rispetto ad r, per le ipotesi fatte, ed ottenere in virtù anche delle (6):

$$\frac{d}{dr}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} Pu^2 dydt = \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dydt + 2\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} Pu\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} x_{1,r} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_{2,r}\right] dydt =$$

$$= \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dydt + 2\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P\alpha u\left[-\frac{\partial u}{\partial x_1} x_{2,t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_{1,t}\right] dydt +$$

$$+ 2\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P\beta u\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} x_{1,t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_{2,t}\right] dydt = \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P_r u^2 dydt +$$

$$+ 2\int_{s_{r,1}} P\alpha u \frac{du}{d\nu_r}\, d\sigma + 2\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P\beta u \frac{\partial u}{d t}\, dydt$$

dove $s_{r,1}$ e ν_r hanno il seguente significato: indichiamo con D_r il dominio regolare del piano (x_1, x_2) delimitato da γ_r e dall'arco di F_2D avente per estremi $Q_{1,r}$ e $Q_{2,r}$, con τ_r il cilindro costituito dai punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in D_r$ e $0 \leq y \leq x_0$, con σ_r la frontiera di τ_r, con B_r la base superiore di τ_r, con s_r la superficie laterale di τ_r (precisamente l'insieme dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in FD_r$, $0 < y \leq y_0$); allora $s_{r,1}$ sarà la parte di s_r costituita da Γ_r, $s_{r,2}$ la rimanente parte di s_r; ν_r sarà infine la normale a s_r orientata verso l'interno di τ_r.

Integrando per parti, in virtù delle (5), si ha

$$2\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P\beta u \frac{\partial u}{\partial t}\, dydt = -\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} u^2(P\beta)_t dydt$$

e dunque

$$\frac{d}{dr}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} Pu^2 dydt = \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} [P_r - (P\beta)_t]u^2 dydt + 2\int_{s_r} P\alpha u \frac{du}{d\nu_r}\, d\sigma - 2\int_{s_{r,2}} P\alpha u \frac{du}{d\nu_r}\, d\sigma$$

D'altra parte come conseguenza della formula di **Green**, si ha

$$2\int_{s_r} P\alpha u \frac{du}{d\nu_r}\, d\sigma = \int_{\tau_r} u^2 E^*(P\alpha) d\tau - 2\int_{\tau_r} P\alpha \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] d\tau +$$

$$+ \int_{s_r} u^2 \frac{d(P\alpha)}{d\nu_r}\, d\sigma + \int_{D_r} u^2 P\alpha d\sigma - \int_{B_r} u^2 P\alpha d\sigma$$

e quindi in definitiva si ha l'*identità fondamentale*

$$(9)\quad \frac{d}{dr}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} Pu^2 dydt = \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} \left[P_r - (PB)_t + \frac{d(P\alpha)}{d\nu_r}\sqrt{x^2_{1,t} + x^2_{2,t}}\right] u^2 dydt -$$

$$-2\int_{s_{r,2}} P\alpha u \frac{du}{d\nu_r}\, d\sigma + \int_{s_{r,2}} u^2 \frac{d(P\alpha)}{d\nu_r}\, d\sigma + \int_{\tau_r} u^2 E^*(P\alpha) d\tau -$$

$$-2\int_{\tau_r} P\alpha \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] d\tau + \int_{D_r} u^2 P\alpha d\sigma - \int_{B_r} u^2 P\alpha d\sigma.$$

3. - Determinazione della classe $\{u\}$ e teorema di unicità in essa. - Si consideri ora la classe $\{u\}$ delle funzioni $u(x_1, x_2, y)$ ciascuna delle quali soddisfi alle condizioni 1), 2), 3) del numero precedente e inoltre anche alle seguenti

$$4) \qquad \frac{du}{d\nu} = 0 \ su \ s_2 \quad , \quad u = 0 \ su \quad D - \overline{F_1 D} \ ;$$

5) *converge « in media » rispetto alla funzione peso $P(t, r, y)$ sul sistema delle superfici $s_{r,1}$ nel senso che esiste una funzione $\mu(t, y)$ di quadrato sommabile nel rettangolo $(t_1 < t < t_2;$ $0 < y \leq y_0)$ tale che*

$$(10) \qquad \lim_{r \to 0} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - \mu(t, y) \}^2 dy dt = 0.$$

Si osservi che poichè P è positiva e continua in C la condizione (12) equivale alla seguente

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - \mu(t, y) \}^2 dy dt = 0.$$

Abbiamo così contemporaneamente precisato il problema « misto » in una delle due impostazioni che gli daremo in questo lavoro, fissando anche mediante le 4) e 5) in che senso debbano essere assunti i dati al contorno.

Del problema così impostato ci interesseremo ora, dimostrando un teorema di unicità:

TEOREMA DI UNICITÀ: *Se*

i) *in tutti i punti interni a τ è*

$$E^*(P\alpha) \leq 0$$

ii) *nei punti di s_2 è*

$$\frac{d(P\alpha)}{d\nu} \leq 0$$

iii) *esiste un numero M tale che per r sufficientemente piccolo $(0 < r \leq r_0)$, $t_1 < t < t_2$ e $0 < y \leq y_0$ sia*

$$P_r - (P\beta)_t + \frac{d(P\alpha)}{d\nu_r} \sqrt{x^2_{1,t} + x^2_{2,t}} \leq MP \ ;$$

allora esiste nella classe $\{u\}$ *solo la funzione identicamente nulla che converge « in media » su* $s_{r,1}$ *allo zero, per la quale cioè è*

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P(t,\ r,\ y)u^2[x_1(t,\ r),\ x_2(t,\ r),\ y]dydt = 0. \tag{11}$$

Infatti dalla (9) si avrebbe almeno per $0 < r \leq r_0$

$$\frac{d}{dr}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} Pu^2dydt \leq M\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} Pu^2dydt - 2\int_{\tau_r} P\alpha\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]dt - \int_{B_r} u^2P\alpha d\sigma$$

e se u non fosse $\equiv 0$ in τ, il secondo membro, poichè $P\alpha$ è positivo in τ e per la (11), sarebbe negativo per r sufficientemente piccolo e quindi lo sarebbe pure il primo membro; e allora la funzione di $r \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} Pu^2dydt$ sarebbe decrescente nell'intorno dello zero e, poichè essa è positiva per $r > 0$, la (11) sarebbe assurda.

Il teorema di unicità è stato dunque dimostrato nelle ipotesi che la trasformazione (8) e la funzione peso P soddisfino alle I), II), III), a), b) del n. 2 ed alle i), ii), iii), del presente numero. Circa la possibilità di soddisfare a queste condizioni si possono ripetere osservazioni analoghe a quelle fatte nel n. 4 della memoria citata in [3]), relativa alle equazioni di tipo ellittico; in particolare la condizione iii) può essere trasformata opportunamente [7]) e si può anche costruire un esempio del tutto simile a quello ivi considerato per l'equazione di Laplace. Ciò prova l'esistenza di trasformazioni siffatte e di funzioni peso corrispondenti.

4. - Il teorema di esistenza nella classe $\{u\}$ - Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA: *Nelle ipotesi del teorema di unicità del n. 3, prefissata una funzione* $\mu(t,\ y)$ *di quadrato sommabile in*

---

[7]) Sarà utile per questo tener presente il n. 2 di [17].

$(t_1 < t < t_2;\ 0 < y \leq y_0)$, *esiste una (e naturalmente una sola) funzione u nella classe $\{u\}$ soddisfacente alla*

$$(10)\qquad \lim_{r \to 0} \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} (P(t, r, y)\{u[x_1(t, r), x_2(t, r, y] - \mu(t, y)\}^2 dydt = 0.$$

a) In virtù del teorema di completezza del n. 1, γ) possiamo costruire una successione $\{u_n(P)\}$ $(n = 1, 2, ...,)$ di combinazioni lineari delle funzioni del sistema $\{w_k(P)\}$ tale che

$$(12)\qquad \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} \{u_n[x_1(t), x_2(t), y] - \mu(t, y)\}^2 dydt + \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{d\nu}\right)^2 d\sigma + \int_D u_n{}^2 d\sigma \right\} = 0.$$

Supponiamo inizialmente che esista una costante H per cui risulti

$$(13)\qquad \int_\tau u_n{}^2 d\tau \leq H \qquad (n = 1, 2 ...)$$

e dimostriamo subito alcune disuguaglianze integrali per le funzioni u_n che ci interesseranno in seguito.

In condizioni note di regolarità per la funzione v (per es. se v è continua in τ, con derivate $\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_2{}^2}$ continue in $\tau - \sigma$ e tali che $E^*(v)$ risulti sommabile in $\tau - \sigma$, e con le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ limitate in tutto τ), segue dalla formula di Green per ogni n la seguente relazione

$$(14)\qquad 2\int_s v u_n \frac{du_n}{d\nu} d\sigma - \int_\tau u_n{}^2 E^*(v) d\tau + 2\int_\tau v\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)^2\right] d\tau -$$
$$- \int_s u_n{}^2 \frac{dv}{d\nu} d\sigma - \int_D u_n{}^2 v d\sigma + \int_B u_n{}^2 v d\sigma = 0.$$

Sia ora φ una qualunque funzione definita su $\bar{s}_2$, non negativa, annullantesi nei punti (Q_1, y) e (Q_2, y) $(0 \leq y \leq y_0)$ [8]),

---

[8]) Cioè nei punti di $\bar{s}_2$ che si proiettano ortogonalmente in Q_1 e Q_2.

continua e con derivate quasi-ovunque limitate [9]). Prendiamo nella (14) la funzione v in modo da soddisfare alle condizioni

$$\frac{dv}{d\nu} \geq \varphi^2 \text{ su } s_2, \quad v \leq 0 \text{ in } \tau, \quad v = 0 \text{ su } s_1, \quad |v| \leq k\varphi \text{ su } s_2,$$

$E^*(v)$ limitato in $\tau - \sigma$ ·
k essendo una costante positiva. Si avrà allora per ogni n

$$\int_{s_2} \varphi^2 u_n^2 d\sigma \leq \int_{s_2} \frac{dv}{d\nu} u_n^2 d\sigma \leq \operatorname*{extsup}_{\tau-\sigma} |E^*(v)| \int_\tau u_n^2 d\tau + \max_D |v| \int_D u_n^2 d\sigma +$$

$$+ \operatorname*{extsup}_{s_1} \left|\frac{dv}{d\nu}\right| \int_{s_1} u_n^2 d\sigma + 2k \int_{s_2} \varphi\, |u_n| \left|\frac{du_n}{d\nu}\right| d\sigma \leq$$

$$\leq K_\varphi \left\{ \int_\tau u_n^2 d\tau + \int_{D+s_1} u_n^2 d\sigma \right\} + H_\varphi \left\{ \int_{s_2} \varphi^2 u_n^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{d\nu}\right)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}}$$

con K_φ e H_φ costanti positive dipendenti solo dalla funzione φ. Ne segue, tenendo presente anche la (12) e la (13)

$$\text{(15)} \qquad \int_{s_2} \varphi^2 u_n^2 d\sigma \leq L_\varphi \left\{ \int_\tau u_n^2 d\tau + \int_{D+s_1} u_n^2 d\sigma + \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{d\nu}\right)^2 d\sigma \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\text{(16)} \qquad \int_{s_2} \varphi^2 u_n^2 d\sigma \leq L'_\varphi \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\text{(17)} \qquad \int_{s_2} \varphi^2 (u_m - u_n)^2 d\sigma \leq 4 L'_\varphi \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$$

dove L_φ e L'_φ sono costanti dipendenti solo dalla φ.

β) Applichiamo ora l'identità (9) alla differenza $u_m - u_n$ di due qualunque delle u_n; per le ipotesi ammesse si ha per

[9]) Le derivate si intendono naturalmente fatte rispetto ai parametri cui si riferisce la superficie s_2; per es. la lunghezza d'arco su $\overline{F_2 D}$ e y.

$0 < r \leq r_0$

$$\frac{d}{dr}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y)(u_m - u_n)^2 dydt \leq M\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y)(u_m - u_n)^2 dydt +$$

$$+ 2\int_{s_{r,2}} P\alpha \mid u_m - u_n \mid \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| d\sigma + \int_{D_r} (u_m - u_n)^2 P\alpha d\sigma$$

e moltiplicando ambo i membri per e^{-Mr} dopo ovvi passaggi

$$\frac{d}{dr}\left(e^{-Mr}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y)(u_m - u_n)^2 dydt\right) \leq$$

$$\leq K \left\{ \int_{s_{r,2}} \mid u_m - u_n \mid \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| d\sigma + \int_D (u_m - u_n)^2 d\sigma \right\}$$

con K costante opportuna; integrando allora tra ε e r $(0 < \varepsilon < r)$ e facendo poi tendere ε a zero, si ha

$$e^{-Mr}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y)(u_m - u_n)^2 dydt \leq$$

$$\leq \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P(t, 0, y) \{ u_m[x_1(t), x_2(t), y] - u_n[x_1(t), x_2(t), y)] \}^2 dydt +$$

$$+ K\int_0^r d\rho \int_{s_{\rho,2}} \mid u_m - u_n \mid \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| d\sigma + Kr\int_D (u_m - u_n)^2 d\sigma.$$

Prendiamo in considerazione il secondo integrale del secondo membro. Riferiamo la superficie s alla lunghezza d'arco s della curva FD e all'altezza y. I punti Q_2 e Q_1 di FD corrispondono rispettivamente ai valori s_2 e s_1 di s con $s_2 < s_1$; e così pure i punti $Q_{2,r}$ e $Q_{1,r}$ per $0 < r \leq r_0$ corrispondono ai valori $s_2(r)$ e $s_1(r)$ di s. Ovviamente $s_2(r)$ $[s_1(r)]$ è funzione crescente [decrescente] e di classe 1 in $(0, r_0)$ e risulta $s_2(0) = s_2$ $[s_1(0) = s_1]$, e la funzione inversa $r_2(s)$ $[r_1(s)]$ è anche di classe 1 e crescente [decrescente] nell'intervallo

$(s_2 \leq s \leq s_2(r_0))\,[(s_1(r_0) \leq s \leq s_1)]$, risultando inoltre $r_2(s_2) = 0$ $[r_1(s_1) = 0]$. Si ha allora per $0 < r \leq r_0$

$$\int_0^r d\rho \int_{s_{\rho,2}} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| d\sigma = \int_0^r d\rho \int_{s_2(\rho)}^{s_1(\rho)} ds \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy \leq$$

$$\leq \int_0^{r_0} dr \int_{s_2(r)}^{s_1(r)} ds \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy = \int_0^{r_0} dr \int_{s_2(r)}^{s_2(r_0)} ds \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy + \int_0^{r_0} dr \int_{s_2(r_0)}^{s_1(r_0)} ds \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy +$$

$$+ \int_0^{r_0} dr \int_{s_1(r_0)}^{s_1(r)} ds \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy = \int_{s_2}^{s_2(r_0)} ds \int_0^{r_2(s)} dr \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy + \int_{s_2(r_0)}^{s_1(r_0)} ds \int_0^{r_0} dr \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy +$$

$$+ \int_{s_1(r_0)}^{s_1} ds \int_0^{r_1(s)} dr \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy = \int_{s_2}^{s_2(r_0)} r_2(s) ds \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy + \int_{s_2(r_0)}^{s_1(r_0)} r_0 ds \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy +$$

$$+ \int_{s_1(r_0)}^{s_1} r_1(s) ds \int_0^{y_0} |\ldots|\, dy = \int_{s_2} \varphi |\ldots|\, d\sigma \leq \left\{ \int_{s_2} \varphi^2 (u_m - u_n)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{s_2} \left(\frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}}$$

dove $\varphi(s, y)$ è la funzione così definita per ogni y:

$\varphi(s, y) = r_2(s)$ per $s_2 \leq s < s_2(r_0)$, $\varphi(s, y) = r_0$ per $s_2(r_0) \leq s < s_1(r_0)$,
$\varphi(s, y) = r_1(s)$ per $s_1(r_0) \leq s \leq s_1$.

Possiamo allora concludere in virtù della (17) che è

$$(18) \quad \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r, y) \{ u_m[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y] \}^2 dy dt \leq$$

$$\leq \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_1} P(t, 0, y) \{ u_m[x_1(t), x_2(t), y] - u_n[x_1(t), x_2(t), y] \}^2 dy dt +$$

$$+ 2K \sqrt{L'_\varphi} \left\{ \int_{s_2} \left(\frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}} + K r_0 \int_D (u_m - u_n)^2 d\sigma$$

e ciò per ogni m e n e per $0 < r \leq r_0$.

Osserviamo subito che di qui, per la (12), si ha la convergenza in media nel rettangolo $(t_1 \leq t \leq t_2;\ 0 < y \leq y_0)$ rispetto alla funzione peso $P(t, r, y)$ delle $u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y]$, *uniformemente* al variare di r tra 0 e r_0 e la convergenza in media si ha anche in sostanza rispetto alla funzione peso 1, poichè P è positiva e continua in C.

Dalle (18), e sempre poichè P è positiva e continua in C, si ha poi ancora per ogni r^* fissato tra 0 e r_0:

$$\int_0^{r^*}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} \{u_m[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y]\}^2 dr dy dt \leq$$

$$\leq L^* \left\{ \int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} P(t, 0, y) \{u_m[x_1(t), x_2(t), y] \quad u_n[x_1(t), x_2(t), y]\}^2 dy dt + \right.$$

$$\left. + \left[\int_{s_2} \left(\frac{d(u_m - u_n)}{d\nu}\right)^2 d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} + \int_D (u_m - u_n)^2 d\sigma \right\}$$

con L^* costante opportuna e quindi per la (12) si ha la convergenza in media delle $u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y]$ nel dominio $(0 \leq r \leq r^*,\ t_1 \leq t \leq t_2,\ 0 \leq y \leq y_0)$. Ma allora si ha la convergenza in media delle $u_n(x_1, x_2, y)$ nell'insieme $\tau - \tau_{r^*}$, poichè è

$$\int_{\tau-\tau_{r^*}} (u_m - u_n)^2 d\tau = \int_0^{r^*}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} (u_m - u_n)^2 \left| \frac{\partial(x_1, x_2, y)}{\partial(r, t, y)} \right| dr dy dt \leq$$

$$\leq L \int_0^{r^*}\int_0^{y_0}\int_{t_1}^{t_2} (u_m - u_n)^2 dr dy dt$$

con L costante opportuna.

Vogliamo ora dimostrare che si ha addirittura la convergenza in media delle $u_n(x_1, x_2, y)$ in tutto τ. Infatti, fissato r^* tra 0 e r_0, si prenda nella (14) la funzione v in modo che risulti

$$\operatorname*{ext\,inf}_{\tau_{r^*}} E^*(v) > 0,\ E^*(v) \text{ limitato in } \tau - \sigma,\ v \leq 0 \text{ in } \tau,$$

$$v = 0 \quad \text{su} \quad s_1 \quad , \quad \frac{dv}{d\nu} \geq 0 \quad \text{su} \quad s_2.$$

Si ottiene

$$\int_{\tau_{r*}} E^*(v)u_n^2 d\tau \leq \int_{\tau-\tau_{r*}} |E^*(v)|\, u_n^2 d\tau + \int_D |v|\, u_n^2 d\sigma +$$

$$+ 2\int_{s_2} |v|\; |u_n|\; \left|\frac{du_n}{d\nu}\right| d\sigma + \int_{s_1} \left|\frac{dv}{d\nu}\right| u_n^2 d\sigma$$

e in definitiva per la (16) dopo passaggi abituali

$$\int_{\tau_{r*}} u_n^2 d\tau \leq K^* \left\{ \int_{\tau-\tau_{r*}} u_n^2 d\tau + \int_{D+s_1} u_n^2 d\sigma + \left\{ \int_{s_2} \left(\frac{du_n}{d\nu}\right)^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

con K^* costante dipendente solo da v; ne segue, per la (12) e per la provata convergenza in media delle u_n in $\tau - \tau_{r*}$, la convergenza in media delle u_n in τ_{r*} e quindi anche in tutto τ.

γ) Diciamo dunque $u(x_1, x_2, y)$ la funzione verso la quale converge in media in τ la successione $\{u_n\}$; si ha dunque

$$\lim_{n \to \infty} \int_\tau (u_n - u)^2 dt = 0. \tag{19}$$

Non è allora difficile dimostrare *la convergenza uniforme della* $\{u_n\}$ *e della successione delle derivate prime in ogni insieme chiuso interno a* τ, *ottenendo così anche che la funzione* u *è soluzione regolare in* $\tau - \sigma$ *della* $E(u) = 0$.

Basterebbe per es. adoperare opportunamente formule di media volumetrica del tipo di quelle trovate recentemente da B. PINI [10]) per l'equazione generalizzata del calore oppure an-

---

10) Si veda la memoria [17]; si osservi però che la formula di media che interesserebbe maggiormente a noi non è quella esplicitamente dimostrata nel n. 1 di detta memoria, bensì quella sostanzialmente rilevata nel n. 5, formula (38), anche se non esplicitamente enunciata; insomma qui servirebbe meglio una formula di media analoga a quella che per le equazioni del tipo ellittico il PINI ha trovato in [18].

che le formule risolutive per il problema primo relativo alla $E(u)=0$ ed espresse mediante la funzione di GREEN.

Noi qui ci limiteremo però, più brevemente, *a dimostrare questa proprietà per una successione estratta dalla* $\{u_n\}$; e ciò del resto ci basterà per il seguito.

Si costruisca nel piano (x_1, x_2) per ogni h positivo sufficientemente piccolo un dominio D'_h interno al dominio base D e delimitato da una curva FD'_h « parallela » alla FD, ottenuta cioè prendendo per ogni punto P di FD sulla normale interna un punto P_h a distanza h da P stesso. Per h sufficientemente piccolo $(0 < h \leq h_0)$ otteniamo così un dominio D'_h dello stesso tipo di D. Costruiamo ora il cilindro τ'_h di altezza y_0 e di base inferiore D'_h, luogo cioè dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in D'_h$ e $0 \leq y \leq y_0$. Nell'insieme $\tau - \tau'_{h_0}$ la successione $\{u_n\}$ converge in media alla u; e poichè, s'_h essendo la superficie laterale di τ'_h, risulta

$$\int_{\tau-\tau'_{h_0}} (u_n - u)^2 d\tau = \int_0^{h_0} dh \int_{s'_h} (u_n - u)^2 d\sigma$$

otteniamo

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{h_0} dh \int_{s'_h} (u_n - u)^2 d\sigma = 0.$$

Per un teorema di G. FICHERA [7, n. 5] possiamo allora dire che la successione di funzioni della h

$$\varphi_n(h) = \int_{s'_h} (u_n - u)^2 d\sigma$$

converge in misura a zero in $(0, h_0)$ e quindi da essa potremo estrarre una sottosuccessione, che continueremo per semplicità a chiamare ancora $\{\varphi_n(h)\}$, convergente quasi-ovunque in $(0, h_0)$ a zero, cioè

$$\lim_{n \to \infty} \int_{s'_h} (u_n - u)^2 d\sigma = 0 \qquad h \text{ quasi-ovunque in } (0, h_0) \tag{20}$$

Sia ora I un insieme chiuso interno a τ; esisterà almeno un h (e anzi infiniti) per cui l'insieme I sia interno anche a

τ'_h e valga la (20). Sia allora $G_h(Q, P)$ la funzione di GREEN relativa al dominio τ'_h e al primo problema di valori al contorno per la (1); si ha per ogni n e per ogni P interno a τ'_h:

$$u_n(P) = \int_{s'_h} u_n(Q) \frac{dG_h(Q, P)}{d\nu_Q} d\sigma_Q + \int_{D'_h} u_n(Q) G_h(Q, P) d\sigma_Q \tag{21}$$

e allora dalle (20), dalla convergenza in media a zero delle u_n in D e da note proprietà di continuità della funzione di GREEN, si ottiene la convergenza uniforme in I delle $u_n(P)$ alla $u(P)$; analogamente derivando rispetto a x_1, x_2 e y ambo i membri della (21), poichè I è interno a τ'_h ed è chiuso, si ha la convergenza uniforme in I delle derivate prime delle $u_n(P)$.

Inoltre, passando al limite per $n \to \infty$ nella (21), otteniamo anche che la funzione $u(P)$ soddisfa per ogni P interno a τ'_h alla

$$u(P) = \int_{s'_h} u(Q) \frac{dG_h(Q, P)}{d\nu_Q} d\sigma_Q. \tag{22}$$

Ciò dimostra che la u è soluzione regolare in $\tau'_h - \sigma'_h$ della $E(u) = 0$ e, poichè h può essere preso vicino a zero quanto si vuole, essa è tale anche in $\tau - \sigma$.

δ) Passiamo a stabilire ora che la funzione $u(P)$ così trovata appartiene alla classe $\{u\}$.

Anzitutto dalla (22) si ottiene già che *la u è continua in $D'_h - FD'_h$ e quindi in $D - FD$* per l'arbitrarietà di h; *si ottiene da essa inoltre che è*

$$u(P) = 0 \qquad \textit{per } P \textit{ in } D - FD.$$

È anche ormai immediato dimostrare che la $u(P)$ soddisfa alla condizione (10). Infatti abbiamo già osservato in β), come conseguenza della (18), che la successione $\{u_n[x_1(t,r), x_2(t,r), y]\}$ converge in media nel rettangolo $(t_1 \leq t \leq t_2;\ 0 < y \leq y_0)$, naturalmente verso $u[x_1(t, r), x_2(t, r), y]$, uniformemente rispetto a r in $(0, r_0)$.

E poichè si ha:

$$\left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - \mu(t, y) \}^2 dy dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y] \}^2 dy dt \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u_n[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - u_n[x_1(t), x_2(t), y] \}^2 dy dt \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{ \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u_n[x_1(t), x_2(t), y] - \mu(t, y) \}^2 dy dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ne scende, in virtù anche della (12) e della continuità in τ delle $u_n(x_1, x_2)$

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{y_0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u[x_1(t, r), x_2(t, r), y] - \mu(t, y) \}^2 dy dt = 0$$

e quindi la u soddisfa alla (10).

ε) Facciamo ora una nuova osservazione sulla convergenza della successione $\{u_n\}$. Sia D^* un qualunque dominio regolare del piano (x_1, x_2), il quale sia contenuto in D e abbia comune con D una parte di frontiera e precisamente un sottoarco proprio $\overline{F_2 D^*}$ di $\overline{F_2 D}$, avente entrambi gli estremi contenuti in $F_2 D$, mentre la rimanente parte di frontiera $F_1 D^* = FD^* - \overline{F_2 D}^*$ sia interna a D. Costruiamo il cilindro τ^* di base inferiore D^* e altezza y_0, luogo cioè dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in D^*$ e $0 \leq y \leq y_0$.

Se nella (14) prendiamo la funzione v in modo che siano soddisfatte le seguenti relazioni

$$v > 0 \text{ in } \tau^* \quad , \quad v \geq 0 \text{ in } \tau \quad , \quad v = 0 \text{ su } s_1 \quad , \quad \frac{dv}{d\nu} \leq 0 \text{ su } s_2$$

$E^*(v)$ limitato in $\tau - \sigma$

otteniamo per ogni n

$$2\int_{\tau^*} v\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)^2\right]d\tau \leq 2\int_{\tau} v\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)^2\right]d\tau \leq$$

$$\leq \underset{\tau-\sigma}{\text{extsup}}\,|E^*(v)|\int_{\tau} u_n^2 d\tau + 2\int_{s_2}|v|\;|u_n|\left|\frac{du_n}{d\nu}\right|d\sigma +$$

$$+ \underset{s_1}{\text{extsup}}\left|\frac{dv}{d\nu}\right|\int_{s_1} u_n^2 d\sigma + \underset{D}{\text{extsup}}\,|v|\int_{D} u_n^2 d\sigma$$

e quindi per le (16) e i soliti passaggi

$$\int_{\tau^*}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)^2\right]d\tau \leq H^*\left\{\int_{\tau} u_n^2 d\tau + \int_{D+s_1} u_n^2 d\sigma + \left\{\int_{s_2}\left(\frac{du_n}{d\nu}\right)^2 d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}\right\}$$

con H^* dipendente solo da v; e allora dalle (12) e (19) *si ottiene la convergenza in media delle* $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ $(i=1,\,2)$ *in* τ^*, cioè

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\tau^*}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau = 0 \qquad (i=1,\,2). \tag{23}$$

ζ) Sia ora M' un qualunque punto di s_2 e M la sua proiezione su F_2D. Vogliamo costruire un dominio D^* del tipo di quelli visti in ε), il quale sia delimitato da una curva semplice chiusa di classe $1H$, contenga il punto M come punto frontiera e, più precisamente, come punto interno all'arco $\overline{F_2D^*}$ (cioè non coincidente con gli estremi di $\overline{F_2D^*}$) ed inoltre goda di una ulteriore proprietà che preciseremo.

Nel verso fissato su F_2D dal verso di percorrenza di FD, i punti Q_1, Q_2 e M si seguano in questo ordine $Q_2 < M < Q_1$. Sia M_1 un punto tra M e Q_1 distinto da essi: $M < M_1 < Q_1$. Si consideri una trasformazione biunivoca e bicontinua

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2(s,\,z) \\ x_1 = \varphi_1(s,\,z) \end{cases} \tag{24}$$

del rettangolo $R^* \equiv (0 \leq s \leq l,\; z_1 \leq z \leq z_2)$ del piano $(s,\,z)$

in un dominio D_0^* del piano (x_1, x_2) del tipo considerato in ε), in modo tale che

a′) $\overline{F_2 D_0^*}$ coincida con il sottoarco $\gamma(M, M_1)$ di $F_2 D$ di estremi M e M_1 e si ottenga dalla (24) per $s = 0$;

b′) per ogni z fissato di (z_1, z_2) le (24) diano la rappresentazione parametrica in funzione della lunghezza d'arco s di una curva γ_z di classe $1H$, la quale nel punto M_z, che si ottiene dalle (24) per $s = 0$, sia tangente (in direzione e verso) alla $\gamma(M, M_1)$ e costituisca insieme all'arco $\gamma(M, M_z)$ una curva pure di classe $1H$.

c′) la trasformazione inversa della (24)

$$\begin{cases} s = s(x_1, x_2) \\ z = z(x_1, x_2) \end{cases}$$

abbia derivate s_{x_1}, s_{x_2}, z_{x_1}, z_{x_2} continue in $D_0^* - FD_0^*$ e Jacobiano $\dfrac{\partial(s, z)}{\partial(x_1, x_2)}$ ivi diverso da zero e di quadrato sommabile. Le condizioni di regolarità supposte su FD permettono senz'altro la costruzione della (24) [11]).

Consideriamo ora accanto alla (24) la trasformazione

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(s, z) \\ x_2 = \varphi_2(s, z) \\ y = y \end{cases} \qquad (0 \leq s \leq l,\ z_1 \leq z \leq z_2,\ 0 \leq y \leq y_0) \tag{25}$$

la quale trasforma il parallelepipedo $C^*(0 \leq s \leq l,\ z_1 \leq z \leq z_2,\ 0 \leq y \leq y_0)$ nel cilindro τ_0^* di base inferiore D_0^* e altezza y_0. Applicando a questo cilindro τ_0^* le (23), otteniamo la convergenza in media del primo ordine nel parallelepipedo C^* delle derivate parziali $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$, calcolate naturalmente per $x_1 = \varphi_1(s, z)$, $x_2 = \varphi_2(s, z)$; infatti si ha, essendo lo Jacobiano

---

[11]) Si può vedere l'esempio riportato nella memoria citata in [3]) nota 12.

della inversa della (25) $\dfrac{\partial(s, z, y)}{\partial(x_1, x_2, y)}$ di quadrato sommabile in τ_0^*,

$$\iiint\limits_{C^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds dz dy = \int\limits_{\tau_0^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial(s, z, y)}{\partial(x_1, x_2, y)} \right| d\tau \leq$$

$$\leq \left\{ \int\limits_{\tau_0^*} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_{\tau_0^*} \left(\frac{\partial(s, z, y)}{\partial(x_1, x_2, y)} \right)^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}$$

e quindi per la (23) si ha

$$\lim_{n \to \infty} \iiint\limits_{C^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds dz dy = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Ne segue, per un teorema già citato di G. FICHERA [8], la convergenza in misura a zero nell'intervallo (z_1, z_2) della successione di funzioni

$$\psi_{i,n}(z) = \int_0^l \int_0^{y_0} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| ds dy \qquad (i = 1, 2)$$

e quindi l'esistenza di una sottosuccessione della $\{ \psi_{i,n}(z) \}$, che per brevità indicheremo ancora con $\psi_{i,n}(z)$, che converge quasi-dappertutto a zero in (z_1, z_2). Sia allora z' un valore di z interno a (z_1, z_2) per il quale risulti $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_{i,n}(z') = 0$ $(i = 1, 2)$, cioè

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{s_{z'}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{26}$$

dove con $s_{z'}$, abbiamo indicato la superficie luogo in punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in \gamma_{z'}$ e $0 < y \leq y_0$.

Operando successivamente in modo analogo sull'arco di F_2D di estremi Q_2 e M[12]) potremo costruire una curva $\gamma_{z''}$ avente un solo estremo $M_{z''}$ sull'arco $\gamma(M_2, M)$ di F_2D $(M_2 < M_{z''} < M)$, per il resto interna a D, costituente con l'arco $\gamma(M_{z''}, M)$

---

[12]) Con l'unica differenza che ora imporremo a γ_z e $\gamma(M_2, M)$ di avere in M_z tangenti coincidenti in direzione ma di verso opposto.

di $F_2 D$ una curva regolare di classe $1H$ e tale che sulla superficie $s_{z''}$ luogo dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in \gamma_{z''}$ e $0 < y \leq y_0$, la successione $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\}$, o una sottosuccessione, converga in media del primo ordine a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, cioè

$$\lim_{n \to \infty} \int_{s_{z''}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{27}$$

Dopo di che come conseguenza della convergenza in media (del secondo ordine) delle $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$ in ogni dominio τ^* del tipo considerato in ε) e di ragionamenti del tutto analoghi a quelli già adoperati per una questione analoga in γ) ed ora per le (26) e (27) (cioè in sostanza il ricorso al teorema già citato [8] di G. FICHERA), potremo unire $\gamma_{z'}$ e $\gamma_{z''}$ mediante un arco γ' interno a D tale che la curva $\gamma(M_{z''}, M_{z'}) + \gamma_{z'} + \gamma' + \gamma_{z''}$ costituisca una curva chiusa di classe $1H$ e che sulla superficie s' luogo dei punti (x_1, x_2, y) per cui $(x_1, x_2) \in \gamma'$ e $0 < y \leq y_0$ la successione $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\}$, o una sua sottosuccessione, converga in media (del secondo ordine addirittura) a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$.

In definitiva *abbiamo costruito un dominio D^*, quello delimitato da $\gamma(M_{z''}, M_{z'}) + \gamma_{z'} + \gamma' + \gamma_{z''}$, nel piano (x_1, x_2), godente delle proprietà enunciate all'inizio e in più della proprietà che considerato il corrispondente cilindro τ^* avente per base inferiore D^* e altezza y_0 risulti*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{s_1^*} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{28}$$

dove s_1^* ha il solito significato e nel caso specifico coincide con $s_{z'} + s' + s_{z''}$.

π) Sia ora $N^*(Q, P)$ la funzione di Green relativa al dominio τ^* così costruito e al secondo tipo di problema al contorno per la (1); per ogni n, se P è interno a τ^*, si ha

$$u_n(P) = \int_D u_n(Q) N^*(Q, P) d\sigma_Q + \int_{s_1^*} \frac{du_n(Q)}{d\nu} N^*(Q, P) d\sigma_Q + \tag{29}$$

$$+ \int_{s_2^*} \frac{du_n(Q)}{d\nu} N^*(Q, P) d\sigma_Q .$$

Il primo membro di (29), essendo P interno a τ^*, converge a $u(P)$ per $n \to \infty$; nel secondo membro, in virtù della (12) e della (28), si può passare al limite sotto il segno di integrale, ottenendo

$$u(P) = \int_{s_1^*} \frac{du(Q)}{d\nu} N^*(Q, P) d\sigma_Q$$

Questa relazione ci assicura allora che $u(P)$ è continua in M' insieme alle sue derivate prime e soddisfa ivi alla $\dfrac{du(M')}{d\nu} = 0$; e ci assicura anche la continuità di $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ in $D^* - \overline{F_1 D^*}$. Se si tien conto dell'arbitrarietà con la quale si è preso M' e si è potuto costruire il dominio D^*, si può affermare dunque la continuità della u e delle $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ in s_2 e in $D - \overline{F_1 D}$.

In definitiva raccogliendo i risultati ottenuti in γ), δ), η) possiamo affermare che la funzione u così ottenuta appartiene alla classe $\{u\}$ e soddisfa alla (10).

θ) Rimane ora da verificare la validità della (13) che abbiamo sinora supposto verificata. Se infatti essa non lo fosse, esisterebbe una sottosuccessione della $\{u_n\}$, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, tale che

$$\lim_{n \to \infty} \int_\tau u_n^2 d\tau = +\infty .$$

Posto allora

$$v_n = \frac{u_n}{\left\{ \int_\tau u_n^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

le nuove funzioni v_n sono ancora soluzioni regolari in $\tau - \sigma$ di $E(u) = 0$, di classe 1 in τ e inoltre soddisfano alle

$$\int_\tau v_n^2 d\tau = 1 \tag{30}$$

e alla

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_{s_1+D} v_n^2 d\sigma + \int_{s_2} \left(\frac{dv_n}{d\nu}\right)^2 d\sigma \right\} = 0$$

che è poi la (12) dove si ponga $\mu = 0$. Potremo allora ripetere su di esse i ragionamenti fatti in α), ..., η) ed arrivare così ad una soluzione $\bar{u}$ di $E(u) = 0$, appartenente alla classe $\{u\}$, alla quale la $\{v_n\}$ o una sua sottosuccessione converge in media in τ. Ma allora per il teorema di unicità del n. 3 dovrebbe essere $\bar{u} \equiv 0$, mentre invece dalla (30) si avrebbe $\int_\tau \bar{u}^2 d\tau = 1$. Dunque la (13) è valida.

5. - Il teorema di esistenza nella classe $[u]$. - La soluzione trovata nel numero precedente assume « in media » i dati assegnati su s_1, vale a dire verifica la (10). Che possiamo dire di più se particolarizziamo la funzione $\mu(t, y)$?

Orbene, è immediato verificare che *se si suppone in più che la* $\mu(t, y)$ *sia continua per* $t_1 < t < t_2$, $0 \leq y \leq y_0$ *e soddisfi alla* $\mu(t, 0) = 0$ $(t_1 < t < t_2)$ *allora la soluzione* u *del numero precedente è continua anche in ogni punto di* $s_1 + F_1D$ *e assume ivi proprio il valore* $\mu(t, y)$ *assegnato.*

Infatti, poichè vale la (19), fissato comunque M' su $s_1 + F_1D$ possiamo costruire con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel n. 4, ζ) un dominio D^* regolare del piano (x_1, x_2) tale che: sia limitato da una curva di classe $1H$, sia contenuto in D, abbia con FD a comune solo un sottoarco $\overline{F_1D^*}$ di F_1D, il quale contenga nel suo interno (cioè distinto dagli estremi) il punto M proiezione su (x_1, x_2) di M', e infine, detto τ^* il cilindro di base inferiore D^* e altezza y_0, la successione $\{u_n\}$, o una sua sottosuccessione, soddisfi alla

$$\lim_{n\to\infty} \int_{s_1^*} |u_n - u| \, d\sigma = 0 \tag{31}$$

con il solito significato per s_2^*, cioè s_2^* è quella parte della superficie laterale s^* di τ^* che si proietta su $F_2D^* = FD^* - \overline{F_1D^*}$.

Detta allora $G^*(Q, P)$ la funzione di GREEN relativa al dominio τ^* e al primo problema di valori al contorno per la (1), si ha per ogni n e per P interno a τ^*, posto al solito $s_1^* = s^* - s_2^*$

$$u_n(P) = \int_{s_1^*} u_n(Q) \frac{dG^*(Q, P)}{d\nu_Q} d\sigma_Q + \int_{s_2^*} u_n(Q) \frac{dG^*(Q, P)}{d\nu_Q} d\sigma_Q +$$

$$+ \int_{D^*} u_n(Q) G^*(Q, P) d\sigma_Q$$

e passando al limite per $n \to \infty$, si ha, ricordando la (31) e la (12)

$$u(P) = \int_{s_1^*} \mu(Q) \frac{dG^*(Q, P)}{d\nu_Q} d\sigma_Q + \int_{s_2^*} u(Q) \frac{dG^*(Q, P)}{d\nu_Q} d\sigma_Q .$$

Dunque $u(P)$ è continua anche in M' e soddisfa ivi alla

$$u(M') = \mu(M') .$$

In sostanza abbiamo con ciò ottenuto un nuovo teorema di esistenza in cui entrambe le condizioni su s_1 e su s_2 sono assunte « puntualmente ». Precisamente detta $[u]$ *la classe delle funzioni $u(P)$ che soddisfano alle seguenti condizioni*:

1) *sono soluzioni regolari di $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$,*

2′) *sono continue in $\tau - (\bar{s}_1 + \overline{F_1D}) \cdot (\bar{s}_2 + \overline{F_2D})$,*

3) *hanno le derivate prime $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ continue in $\tau - (\bar{s}_1 + \overline{F_1D})$,*

si ha il seguente

TEOREMA: *Esiste almeno una funzione $u(P)$ nella classe $[u]$ che soddisfa alle condizioni al contorno*

$$\frac{du(P)}{d\nu} = 0 \ su \ s_2, \ u(P) = 0 \ su \ D - \overline{F_1D} \cdot \overline{F_2D}$$

$$u(P) = \mu(P) \ su \ s_1$$

dove $\mu(P)$ è una funzione continua su $s_1 + F_1D$, ivi di quadrato sommabile e nulla su F_1D.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. AMERIO: *Sull'equazione di propagazione del calore.* (Rend. di Mat. e delle sue appl. (5), vol. 5, 1946, pp. 84-120).

[2] G. ASCOLI - P. BURGATTI - G. GIRAUD: *Equazioni delle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico.* (Sansoni, Firenze, 1936).

[3] C. CILIBERTO: *Sul problema di Holmgren - Levi per l'equazione del calore.* (Giorn. Mat. di Battaglini (4), vol. 80, pp. 1-13).

[4] G. CIMMINO: *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet.* (Rend. Circ. Mat., Palermo, t. LXI, 1937, pp. 177-221).

[5] G. CIMMINO: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico.* (Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, vol. XXIII, 1952, pp. 255-286).

[6] G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der Laplace Trasformation.* (Springer, Berlino, 1937).

[7] G. FICHERA: *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellettico autoaggiunti.* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. I, 1949, pp. 75-100).

[8] G. FICHERA: *Intorno al passaggio al limite sotto il segno di integrale.* (Portugaliae Math., vol. 4, 1943, pp. 1-20).

[9] M. GEVREY: *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique.* (Journal de Math. (6), t. 9, 1913, pp. 305-471; t. 10, 1914, pp. 105-143).

[10] M. GEVREY: *Sur la résolution des problèmes aux limites relatifs aux équations du second ordre des types elliptique et parabolique.* (C. R. Ac. Sc. t. 171, 1920, pp. 839-842).

[11] M. GEVREY: *Determination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du type elliptique.* (Journal de Math. (9), t. 9, 1930, pp. 1-80).

[12] G. GIRAUD: *Sur certaines opérations aux dérivèes partielles du type parabolique.* (C. R. Acc. Sc. t. 195, 1932, pp. 98-100).

[13] E. E. LEVI: *Sull'equazione del calore.* (Ann. Mat. pura e appl. (3), t. 14, 1908, pp. 187-264).

[14] E. E. LEVI: *Sul problema di Fourier.* (Atti Acc. Sc. Torino, vol. 43, 1908, pp. 435-453).

[15] E. MAGENES: *Sull'equazione del calore: Teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone.* Nota I e II. (Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXI, 1952, pp. 99-123 e pp. 136-170).

[16] B. PINI: *Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del seconordine in due variabili, di tipo parabolico.* (Ann. di Mat. pura e appl. (4), t. XXXII, 1951, pp. 179-204).

[17] B. PINI: *Un problema di valori al contorno, generalizzato, per l'equazione a derivate parziali lineari parabolica del secondo ordine.* (Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 3, 1952, pp. 153-187).

[18] B. PINI: *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico.* (Rend. Acc. Lincei, s. VIII, vol. XI, 1951, pp. 325-333).