Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Francesco Sbrana

Un nuovo procedimento per l’integrazione delle equazioni dell’elastodinamica e dell’elettromagnetismo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 142-159

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__142_0>

UN NUOVO PROCEDIMENTO PER L'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DELL'ELASTODINAMICA E DELL'ELETTROMAGNETISMO

Nota (*) *di* FRANCESCO SBRANA (*a Genova*)

E' noto che il problema dell'integrazione indefinita delle equazioni dell'elastodinamica e dell'elettromagnetismo è stato risolto da tempo, e trattato poi con diversi provvedimenti da vari autori [1]); recentemente anche con l'impiego della trasforma-

---

(*) Pervenuta in Redazione l'8 gennaio 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico Università, Genova.

[1]) Per l'elastodinamica, ved.:

O. TEDONE, *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi;* « Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino », serie II, Tomo XLVII, 1896-97, pp. 181-258;

E. LOVE, *The propagation of wave motion in an isotropic elastic solid medium;* « Proc. of the London Mathem. Society», Ser. 2, Vol. I, 1903-1904 pp. 291-344;

O. TEDONE, *Sopra alcune formule fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*; « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », Vol. XLII, 1906-1907, pp. 6-13;

O. TEDONE, *Sull'estensione dell'integrale di* POISSON *relativo all'equazione dei potenziali ritardati, al caso dell'isotropia elastica*, ibidem, pp. 516-521;

C. SOMIGLIANA, *Sopra alcune formule fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*; « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », Vol. XLI, 1906-1907, pp. 869-885; pp. 1070-1080; Vol. XLII, pp. 765-779.

Per l'elettromagnetismo, ved.:

BIRKELAND, *Solution générale des equations de* MAXWELL *pour un milieu absorbant homogène et isotrope*, « Comptes rendus Acad. Sciences », T. CXX, 1895; « Archive de Genève », T. XXXIV, 1895;

M. ABRAHAM, « Theorie der Elektr. », II, p. 37 e seg.; Teubner, Leipzig, 1905;

zione semplice di LAPLACE [2]). Spero tuttavia che non appaia superfluo ritornare su questo argomento, per indicare un metodo d'integrazione fondato su una trasformazione funzionale, la quale consente di operare direttamente nello spazio che è sede del fenomeno in esame. La trasformazione inversa è possibile, nei casi che abbiamo considerati, in cui per semplicità ci siamo riferiti a regioni spaziali limitate (sebbene tale restrizione non sia affatto essenziale) se i dati iniziali ed al contorno soddisfano ad opportune condizioni di regolarità [3]). La determinazione delle funzioni incognite vien fatta, mi sembra, con notevole semplicità e speditezza; esse sono ottenute, come di solito, per mezzo (oltre che dei dati iniziali) delle funzioni assegnate lungo il contorno che individuano le soluzioni cercate, ma anche di altre, *sovrabbondanti*. L'eliminazione di queste ultime può esser fatta valendosi di certe equazioni integrali, che lo stesso procedimento è suscettibile di fornire.

Dopo di avere stabilite alcune formule preliminari, considero la propagazione di onde sferiche senza smorzamento. (Una trattazione analoga si potrebbe fare per il caso delle onde smorzate). A questo problema riconduco poi quello della propagazione di onde elastiche in un mezzo omogeneo ed isotropo; ed anche di onde elettromagnetiche in un dielettrico, omogeneo ed isotropo, o nel vuoto.

O. TEDONE, *Sulla integrazione delle equazioni di* MAXWELL, « Rend. della R. Acc. Dei Lincei », serie 5ª, Vol. XXV, I° Sem., pp. 563-576, e pp. 614-618.

2) Cfr. M. MARZIANI, *Sulla integrazione delle equazioni dell'elastodinamica*, « Atti della Acc. delle Scienze di Torino », Vol. 88, 1953-54, pp. 3-15.

La trasformazione multipla di LAPLACE è stata usata, per le equazioni di MAXWELL, in un caso particolare; ved.: B. VAN DER POL and H. BREMMER, *Operational Calculus, based on the two-sided* LAPLACE *integral*, Cambridge, 1950, cap. XVI, n. 6, p. 361 e seg.

3) La trasformazione funzionale considerata è suscettibile di una notevole interpretazione, e di applicazioni varie, di cui mi occuperò in una prossima occasione.

2. - FORMULE PRELIMINARI. - Fissata una terna destrorsa di assi cartesiani ortogonali x, y, z, di origine 0, consideriamo un dominio Σ cubabile, limitato da una superficie σ regolare, (cioè scomponibile in un numero finito di parti, ciascuna delle quali provvista di piano tangente variabile con continuità); ed una funzione $U(P, t)$ delle coordinate di un punto P comunque variabile in Σ ed in σ, e di un parametro t, (tempo) variabile da zero ad un valore finito (positivo) T. Imporremo che la $U(P. t)$ debba essere, con le sue derivate prime e seconde, uniformemente continua rispetto a t, in $\Sigma + \sigma$, per t variabila da zero a T. Detta poi c una costante reale, non negativa, poniamo:

$$\omega = c + i\lambda, \quad (i^2 = -1),$$

con λ reale, variabile da $-\infty$, a $+\infty$;

$$R = |\overline{PQ}|;$$

Q essendo un secondo punto comunque variabile in Σ, di coordinate ξ, η, ζ; ed infine

$$\iiint_{\Sigma} U(Q, t) \frac{\exp(\omega R)}{R} d\Sigma(Q) = u(P, t; \omega). \tag{1}$$

Inversamente si ha, indicando con ε una quantità positiva,

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{i}{4\pi^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega \exp(\varepsilon\omega^2) u(P, t; \omega) d\omega = \gamma U(P, t), \tag{2}$$

con $\gamma = 1$, se P è interno a Σ, $\gamma = 0$, se P è esterno a Σ; naturalmente purchè il primo membro abbia senso. Non ci occuperemo qui del problema reciproco, cioè del passaggio eventuale dalla (2) alla (1), limitandoci a rilevare che nei casi più sotto considerati una tale reciprocità risulta, indirettamente, possibile [4]).

---

[4]) Relativamente alle formule (1) e (2), ved. la Nota I di questo lavoro; cfr. anche: F. SBRANA, *Sopra alcuni problemi di propagazione in più dimensioni*, « Ann. di Mat. pura e appl. », Ser. IV, Tomo XXX, 1949, pp. 191-200.

Notiamo ora alcune proprietà della trasformazione (1). Intanto, se si pone

$$\Delta_P^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

dalla (1), dalla formula di POISSON, e dall'identità

$$\Delta_P^2 \frac{\exp(\omega R)}{R} = \omega^2 \frac{\exp(\omega R)}{R},$$

segue:

$$(3) \qquad \Delta_P^2 u(P,\ t\,;\ \omega) = \Delta_P^2 \iiint_\Sigma U(Q,\ t) \frac{\exp(\omega R) - 1}{R} d\Sigma(Q) +$$

$$+ \Delta_P^2 \iiint_\Sigma \frac{1}{R} U(Q,\ t) d\Sigma(Q) = \omega^2 u(P,\ t\,;\ \omega) - 4\pi\gamma U(P,\ t).$$

In secondo luogo, se si applica la seconda formula di GREEN alle funzioni $U(P,\ t)$, $\dfrac{\exp(\omega R)}{R}$, si ottiene:

$$(4) \qquad \omega^2 u(P,\ t\,;\ \omega) - 4\pi\gamma U(P,\ t) + \iint_\sigma \left[\frac{\exp(\omega R)}{R} \frac{\partial U(Q,\ t)}{\partial n} - \right.$$

$$\left. - U(Q,\ t) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(\omega R)}{R}\right)\right] d\sigma(Q) = \iiint_\Sigma \frac{\exp(\omega R)}{R} \Delta_Q^2 U(Q,\ t) d\Sigma(Q),$$

n essendo la normale esterna a σ, nel generico punto Q.

Sia ora $\boldsymbol{S}$ un vettore, variabile con continuità, insieme con le sue derivate prime, uniformemente rispetto a t, in Σ. Posto

$$\boldsymbol{s}(P,\ t\,;\ \omega) = \iiint_\Sigma \boldsymbol{S}(Q,\ t) \frac{\exp(\omega R)}{R} d\Sigma(Q),$$

con una integrazione per parti si ha

$$(5) \qquad \vec{\psi}(P,\ t\,;\ \omega) = \iiint_\Sigma \frac{\exp(\omega R)}{R} \operatorname{rot} \boldsymbol{S}(Q,\ t) d\Sigma(Q) =$$

$$= \iint_\sigma \boldsymbol{n}(Q) \wedge \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{S}(Q,\ t) d\sigma(Q) + \operatorname{rot}_P \boldsymbol{s}(P,\ t\,;\ \omega)\,;$$

e, similmente,

$$(6)\qquad \varphi(P,\ t\,;\ \omega) = \iiint\limits_{\Sigma} \frac{\exp\,(\omega R)}{R}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}(Q,\ t) d\Sigma(Q) =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{n}(Q)\,\frac{\exp\,(\omega R)}{R} \times \boldsymbol{S}(Q,\ t) d\sigma(Q) + \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{s}(P,\ t\,;\ \omega),$$

$\boldsymbol{n}(Q)$ essendo il versore normale esterno a σ in Q.

In modo analogo si trova, se sono continue anche le derivate seconde di $\boldsymbol{S}$ in Σ,

$$(7)\qquad \iiint\limits_{\Sigma} \frac{\exp\,(\omega R)}{R}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}(Q,\ t) d\Sigma(Q) =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{n}(Q)\,\frac{\exp\,(\omega R)}{R}\,\mathrm{div}_Q\, \boldsymbol{S}(Q,\ t) d\sigma(Q) + \mathrm{grad}_P\, \varphi(P,\ t\,;\ \omega),$$

dove con $\varphi(P,\ t;\ \omega)$ si indica la stessa funzione definita dalla (6).

Conviene pure tenere presenti le seguenti uguaglianze, con ε costante positiva, e V costante non negativa, che facilmente si verificano:

$$(8)\qquad \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega \exp\,(\varepsilon\omega^2 + \omega R) \cosh\,(V\omega t) d\omega = -$$

$$- \frac{i}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon^3}}\left[(R+Vt)\exp\left(\frac{-(R+Vt)^2}{4\varepsilon}\right) + (R-Vt)\exp\left(-\frac{(R+Vt)^2}{4\varepsilon}\right)\right];$$

$$(9)\qquad \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\,(\varepsilon\omega^2 + \omega R)\, \mathrm{senh}\,(V\omega t) d\omega =$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\left[\exp\left(\frac{-(R+Vt)^2}{4\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{-(R-Vt)^2}{4\varepsilon}\right)\right],$$

e l'altra, ben nota,

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\sqrt{8n^3\varepsilon^3}} \iiint_{\Sigma} U(Q,\ t) \exp\left(\frac{-R^2}{4\varepsilon}\right) \frac{d\Sigma(Q)}{R} = \gamma U(P,\ t) \tag{10}$$ [5]).

3. - PROPAGAZIONE DI ONDE SFERICHE.

Consideriamo la classica equazione differenziale [6])

$$\Delta_Q^2 U(Q,\ t) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 U(Q,\ t)}{\partial t^2} + \Phi(Q,\ t) = 0, \tag{11}$$

dove

$$\Delta_Q^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

V essendo una costante positiva, e ξ, η, ζ le coordinate del punto generico Q, del dominio Σ, in cui la funzione $\Phi(Q, t)$ è as-

---

[5]) Cfr., per es., E. PICARD, *Leçons sur quelques types simples d'equations aux dérivées partielles*, avec des applications à la Physique Mathèmatique, Paris, 1927, p. 16.

[6]) Per questa equazione, cfr., tra l'altro:

CARVALLO, *Principe d'*HUYGENS *dans les corps isotropes*, « Comptes Rendus Ac. Sciences », Paris, T. CXX, 1895;

BIRKELAND, già citato in [1]);

BRILLOUIN, *Propagation dans les milieux conducteurs*, « Comptes Rendus Ac. Sc. », T. XXXVI, 1903;

O. TEDONE, *Sull'integrazione delle equazioni a derivate parziali lineari ed a coefficienti costanti del second'ordine*, « Rend della R. Acc. dei Lincei », ser. 5, Vol. XXIII, 1914, pp. 145-158;

H. WEBER, *Die Partielle Diff.-Gleichungen der Math.-Physik*, 1919, T. II, Fünfzehnter Abschnitt;

J. HADAMARD, *Le problème de* CAUCHY *et les equations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, Hermann et Compagnie, 1932; p. 333;

A. TONOLO, *Integrazione dell'equazione di propagazione delle onde smorzate e forzate*, « Rend. del Seminario Matematico dell'Università di Padova », Vol. IV, 1933, pp. 50-64;

M. MARZIANI, *Sull'applicazione del calcolo simbolico alle equazioni di propagazione in tre dimensioni;* « Seminario Matematico dell'Università di Ferrara », Nuova serie, Sezione VII, Scienze matematiche, Vol. II, n. 9, pp. 111-116.

segnata, uniformemente continua rispetto a t, per $0 \leq t \leq T$. Ammesso che la funzione $U(Q,t)$ sodisfi alle condizioni poste nel n. prec., se si *trasforma* la (11) secondo la (1), e si tiene presente la formula (4) di GREEN, ove si supponga (come per brevità faremo sempre in seguito), P interno a Σ, si ottiene:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 u(P,\, t\,;\, \omega)}{\partial t^2} - V^2\omega^2 u(P,\, t\,;\, \omega) = V^2 \Big\{ \iint\limits_{\sigma} \frac{\exp(\omega R)}{R} \frac{\partial U(Q,\, t)}{\partial n} -$$
$$- U(Q,\, t) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(\omega R)}{R}\right) d\sigma(Q) + \iiint\limits_{\Sigma} \Phi(Q,\, t) \frac{\exp(\omega R)}{R}\, d\Sigma(Q) -$$
$$- 4\pi U(P,\, t) \Big\} .$$

(Se invece si supponesse P esterno a Σ, si perverrebbe ad una di quelle equazioni integrali di cui si è fatto cenno in principio).

Dalla (12) segue

$$(13) \quad u(P,\, t\,;\, \omega) = a(P,\, \omega)\cosh(V\omega t) + b(P,\, \omega)\frac{\operatorname{senh}(V\omega t)}{V\omega} +$$
$$+ \frac{1}{V\omega}\int_0^t g(P,\, \tau\,;\, \omega) \operatorname{senh}[V\omega(t-\tau)]\, d\tau,$$

con

$$(14) \quad \begin{cases} a(P,\, \omega) = \displaystyle\iiint\limits_{\Sigma} U(Q, O) \frac{\exp(\omega R)}{R}\, d\Sigma(Q), \\ b(P,\, \omega) = \displaystyle\iiint\limits_{\Sigma} U_t(Q, O) \frac{\exp(\omega R)}{R}\, d\Sigma(Q)\,; \end{cases}$$

(15) $g(P, \tau; \omega) = 2^{\circ}$ membro della (12), con τ in luogo di t.

Moltiplichiamo la (13) per $\dfrac{i}{4\pi^2}\, \omega \exp(\varepsilon\omega^2)\, d\omega$, ed integriamo da $c - i\infty$ a $c + i\infty$ [7]).

---

[7]) In ciò che segue la costante c potrebbe essere sempre supposta nulla. Essa interviene invece nel caso di oscillazioni smorzate, e della propagazione di onde elettrom. in un conduttore.

Tenendo presenti le osservazioni del num. prec., si trova:

$$(16)\quad U(P,\,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega'}\Big[U(P+Vt\boldsymbol{N},\,O)+Vt\boldsymbol{N}\times\mathrm{grad}_P\,U(P+$$

$$+\,Vt\boldsymbol{N},\,O)+tU_t(P+Vt\boldsymbol{N},\,O)\Big]d\Omega+\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma''}\Big[-U(Q,\,\tau)\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}+$$

$$+\frac{1}{VR}\frac{\partial R}{\partial n}U_\tau(Q,\,\tau)+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial n}U(Q,\,\tau)\Big]_{\tau'}d\sigma(Q)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Sigma''}\Phi\Big(Q,\,t-\frac{R}{V}\Big)\frac{d\Sigma(Q)}{R},$$

in cui Ω è una parte della superficie della sfera unitaria Ω, col centro in P; precisamente quella in cui si proietta da P la regione di σ ove $R>Vt$; $\boldsymbol{N}$ il versore normale esterno della stessa sfera Ω, nel punto in cui essa viene intersecata dal segmento PQ; mentre σ'' è la regione di σ, ove $R<Vt$. Nel penultimo integrale si deve assumere $\tau=\tau'=t-\dfrac{R}{V}$. Infine Σ'' è quella parte di Σ in cui $R<Vt$ [8]).

Indichiamo con R_m ed R_M il minimo ed il massimo della distanza di P dai punti di σ. Dalla (16) risulta chiaramente che per $t<\dfrac{R_m}{V}$, non influiscono sulla propagazione le condizioni al contorno; per $t>\dfrac{R_M}{V}$, non influiscono più le condizioni iniziali.

4. - Equazioni dell'elastodinamica. - Supponiamo il dominio Σ occupato da un mezzo elastico omogeneo ed isotropo; $\boldsymbol{S}(Q;t)$ sia lo spostamento elastico (regolare) nel punto Q all'istante t, $\boldsymbol{F}(Q,t)$ la corrispondente forza di massa unitaria; l'equazione differenziale cui sodisfa l'anzidetto spostamen-

[8]) La dimostrazione della (16), col procedimento indicato, è data nella Nota II del presente lavoro.

to si scrive:

$$(17)\qquad \Delta_Q^2 \boldsymbol{S}(Q, t) + q \operatorname{grad}_Q \operatorname{div}_Q \boldsymbol{S}(Q, t) = \delta\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{S}(Q, t)}{\partial t^2} - \boldsymbol{F}(Q, t)\right),$$

con $q = \dfrac{\lambda + \mu}{\mu}$, $\delta = \dfrac{densit\grave{a}}{\mu}$, λ e μ essendo le due costanti di LAMÉ. Supporremo $\boldsymbol{F}(Q, t)$ funzione continua con le sue derivate in Σ. Conserveremo, dove è possibile, le notazioni precedenti. Posto ora

$$(18)\qquad \boldsymbol{s}(P, t\,;\,\omega) = \iiint_\Sigma \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{S}(Q, t) d\Sigma(Q)\,;\; \boldsymbol{f}(P, t\,;\,\omega) =$$

$$= \iiint_\Sigma \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{F}(Q, t) d\Sigma(Q),$$

dalla formula di GREEN, applicata ad $\boldsymbol{S}(Q, t)$, dalla (7), e dalla formula che si ottiene *trasformando* secondo la (1) i due membri della (17) segue:

$$(19)\qquad \omega^2 \boldsymbol{s}(P, t\,;\,\omega) - 4\pi \boldsymbol{S}(P, t) + \iint_\sigma \left[\frac{\exp(\omega R)}{R} \frac{\partial \boldsymbol{S}(Q, t)}{\partial n} -\right.$$

$$\left. - \boldsymbol{S}(Q, t) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(\omega R)}{R}\right)\right] d\sigma(Q) + q \iint_\sigma \boldsymbol{n} \frac{\exp(\omega R)}{R} \operatorname{div}_Q \boldsymbol{S}(Q, t) d\sigma(Q) +$$

$$+ q \operatorname{grad}_P \varphi(P, t\,;\,\omega) = \delta\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}(P, t\,;\,\omega)}{\partial t^2} - \boldsymbol{f}(P, t\,;\,\omega)\right].$$

Calcoliamo ora il rotore dei due membri della (19); se si tiene presente la (5) si trova:

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 \overrightarrow{\psi}(P, t\,;\,\omega)}{\partial t^2} - \frac{\omega^2}{\delta} \overrightarrow{\psi}(P, t\,;\,\omega) = \operatorname{rot}_P \boldsymbol{f}(P, t\,;\,\omega) -$$

$$- \frac{4\pi}{\delta} \operatorname{rot} \boldsymbol{S}(P, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega^2}{\delta}\right) \iint_\sigma \boldsymbol{n}(Q) \wedge \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{S}(Q, t) d\sigma(Q) +$$

$$+\frac{1}{\delta}\operatorname{rot}\iint_\sigma\left\{\frac{\exp(\omega R)}{R}\left[\frac{\partial \boldsymbol{S}(Q,\,t)}{\partial n}+q\boldsymbol{n}\operatorname{div}_Q\boldsymbol{S}(Q,\,t)\right]-\right.$$
$$\left.-\boldsymbol{S}(Q,\,t)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(\omega R)}{R}\right)\right\}d\sigma(Q).$$

Poichè $\vec{\psi}(P,\,t;\omega)$ è il *trasformato* di $\operatorname{rot}_Q\boldsymbol{S}(Q,\,t)$ la (20) permette di determinare quest'ultimo vettore, tenendo conto delle condizioni iniziali, allo stesso modo in cui la (12) ha permesso di determinare la $U(P,\,t)$, integrale dell'equazione (11).

In modo analogo, se si prende la divergenza di ambo i membri della (19), e si tengono presenti la (3), (6), si ottiene:

$$\frac{\partial\varphi^2(P,\,t;\,\omega)}{\partial t^2}-\frac{q+1}{\delta}\,\omega^2\varphi(P,\,t;\,\omega)=\operatorname{div}_P\boldsymbol{f}(P,\,t;\,\omega)- \tag{21}$$
$$-\frac{4\pi}{\delta}(q+1)\operatorname{div}_P\boldsymbol{S}(P,\,t)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\omega^2}{\delta}\right)\iint_\sigma\boldsymbol{n}(Q)\times$$
$$\times\frac{\exp(\omega R)}{R}\boldsymbol{S}(Q,\,t)d\sigma(Q)+\frac{1}{\delta}\operatorname{div}_P\iint_\sigma\left\{\frac{\exp(\omega R)}{R}\left[\frac{\partial\boldsymbol{S}(Q,\,t)}{\partial n}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+q\boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(Q,\,t)\right]-\boldsymbol{S}(Q,\,t)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(\omega R)}{R}\right)\right\}d\sigma(Q).$$

Per mezzo di questa è possibile determinare $\operatorname{div}_P\boldsymbol{S}(P,\,t)$, valendosi nuovamente della formula (16), in cui si facciano naturalmente le opportune sostituzioni.

Ottenute così $\operatorname{rot}_P\boldsymbol{S}(P,\,t)$, e $\operatorname{div}_P\boldsymbol{S}(P,\,t)$, dalla stessa equazione differenziale (17), posta nella forma

$$(q+1)\operatorname{grad}\operatorname{div}_P\boldsymbol{S}(P,\,t)-\operatorname{rot}_P\operatorname{rot}_P\boldsymbol{S}(P,\,t)=\delta\left[\frac{\partial^2\boldsymbol{S}(P,\,t)}{\partial t^2}-\boldsymbol{F}(P,\,t)\right],$$

è possibile ricavare $\boldsymbol{S}(P,\,t)$, mediante due integrazioni rispetto al tempo e, naturalmente, tenendo conto delle condizioni iniziali.

5. - EQUAZIONI DI MAKWELL. Supponiamo ora che il dominio Σ sia vuoto, od occupato da un mezzo dielettrico omogeneo ed isotropo, e sede di una propagazione di onde elettromagnetiche, retta dalle equazioni

$$
(23) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}_Q \boldsymbol{E}(Q,\,t) = -\,\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}(Q,\,t)}{\partial t}, \\[2ex] \operatorname{rot}_Q \boldsymbol{H}(Q,t) = \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}(Q,\,t)}{\partial t} + \boldsymbol{I}(P,\,t) \end{cases}
$$

dove $\boldsymbol{E}(Q,\,t)$, ed $\boldsymbol{H}(Q,\,t)$ sono rispettivamente il vettore elettrico ed il vettore magnetico nel punto Q, all'istante t, ε la costante dielettrica (in farad/m), μ la permeabilità magnetica (in henry/m), $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente di convezione (in amp/mq.) [9]) che si suppone assegnata, in funzione di P e t. Alle (23) si deve associare l'altra equazione

$$
(24) \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H}(Q,\,t) = 0,
$$

che è sodisfatta in ogni istante, in conseguenza della prima delle (23), se, come noi supporremo, lo è inizialmente. Similmente, dalla seconda delle (23) segue la condizione:

$$
\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}_Q \boldsymbol{E}(Q,\,t) = -\operatorname{div}_Q \boldsymbol{I}(Q,\,t),
$$

la quale permette di determinare div $\boldsymbol{E}(Q,\,t)$. Si trova:

$$
(25) \qquad \operatorname{div}_Q \boldsymbol{E}(Q,\,t) = \operatorname{div}_Q \boldsymbol{E}(q,\;0) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \operatorname{div}_Q \boldsymbol{I}(Q,\,\tau) d\tau.
$$

Indichiamo ora con

$$
\boldsymbol{e}(P,\,t\,;\,\omega),\ \boldsymbol{h}(P,\,t\,;\,\omega),\ \boldsymbol{j}(P,\,t\,;\,\omega),
$$

rispettivamente, i *trasformati*, secondo la (1), dei vettori

$$
\boldsymbol{E}(Q,\,t),\ \boldsymbol{H}(Q,\,t),\ \boldsymbol{I}(Q,\,t).
$$

Trasformiamo poi le (23), sempre secondo la (1); e teniamo presente la (5), in cui sia posto, in luogo di $\boldsymbol{S}(Q,\,t)$, prima

---

9) Cfr., per es., J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, Mc Graw-Hill Book Company, London, 1941; pp. 601-602.

$\boldsymbol{E}(Q, t)$, poi $\boldsymbol{H}(Q, t)$. Troviamo così:

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{rot}_P\, \boldsymbol{e}(P, t; \omega) + \iint_\sigma \boldsymbol{n}(Q) \wedge \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{E}(Q, t) d\sigma(Q) = \\ &\qquad\qquad = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{h}(P, t; \omega)}{\partial t}, \\ &\mathrm{rot}_P\, \boldsymbol{h}(P, t; \omega) + \iint_\sigma \boldsymbol{n}(Q) \wedge \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{H}(Q, t) d\sigma(Q) = \\ &\qquad\qquad = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{e}(P, t; \omega)}{\partial t} + \boldsymbol{j}(P, t; \omega). \end{aligned}\right.$$

Per mezzo della (6) si ha inoltre la possibilità di determinare le divergenze dei trasformati del vettore elettrico e magnetico, [le divergenze di questi ultimi essendo date dalle (24), 25)]. Si trova:

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{div}\, \boldsymbol{e}(P, t; \omega) = \iint_\sigma \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{E}(Q, t) \times \boldsymbol{n}(Q) d\sigma(Q), \\ &\mathrm{div}\, \boldsymbol{h}(P, t; \omega) = \iint_\sigma \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{H}(Q, t) \times \boldsymbol{n}(Q) d\sigma(Q) + \\ &\qquad\qquad + \iiint_\Sigma \frac{\exp(\omega R)}{R} \mathrm{div}_Q\, \boldsymbol{H}(Q, t) d\Sigma(Q). \end{aligned}\right.$$

Ciò premesso, dall'identità

$$\mathrm{rot}_P\, \mathrm{rot}_P\ \boldsymbol{w}(P, t; \omega) = \mathrm{grad}_P\, \mathrm{div}_P\ \boldsymbol{w}(\ldots) - \Delta_P^2 \boldsymbol{w}(\ldots),$$

(dove $\boldsymbol{w}$ è un vettore generico, per cui siano lecite le operazioni indicate) e dalle (26), (27), (3), segue (per P interno a Σ),

$$(28)\quad \mathrm{grad}_P\, \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{e}(P, t; \omega) - \omega^2 \boldsymbol{e}(P, t; \omega) + 4\pi \boldsymbol{E}(P, t) +$$

$$+ \mathrm{rot}_P \iint_\sigma \boldsymbol{n}(Q) \wedge \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{E}(Q, t) d\sigma(Q) = -\mu \frac{\partial\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{h}(P, t; \omega)}{\partial t} =$$

$$= -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{e}(P, t; \omega)}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \boldsymbol{j}(P, t; \omega)}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_\sigma \boldsymbol{n}(Q) \wedge$$

$$\wedge \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{H}(Q, t) d\sigma(Q),$$

$$(29) \quad \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \boldsymbol{h}(P, t; \omega) - \omega^2 \boldsymbol{h}(P, t; \omega) + 4\pi \boldsymbol{H}(P, t; \omega) +$$

$$+ \operatorname{rot}_P \iint_\sigma \boldsymbol{n}(Q) \wedge \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{H}(Q, t) d\sigma(Q) = \dots = \operatorname{rot} \boldsymbol{j}(P, t; \omega) -$$

$$- \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{h}(P, t; \omega)}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_\sigma \boldsymbol{n}(Q) \wedge \frac{\exp(\omega R)}{R} \boldsymbol{E}(Q, t) d\sigma(Q).$$

Dalla (28), si ricava $\boldsymbol{e}(P, t; \omega)$, con lo stesso procedimento usato per l'equazione (12) nel n. 3; per mezzo poi dell'antitrasformazione (2), si ottiene il vettore elettrico $\boldsymbol{E}(P, t)$, con una formula analoga alla (16). Similmente si ha $\boldsymbol{H}(P, t)$. Entrambi *i vettori incogniti sono ottenuti per mezzo dei vettori stessi, calcolati lungo il contorno σ.*

Osservazione. A prima vista potrebbe apparire possibile una notevole semplificazione. Infatti se si calcola il rotore di ambo i membri delle equazioni di Maxwell [ciò che invece abbiamo fatto per le equazioni trasformate (26)] si perviene ad una equazione differenziale del tipo (11), di D'Alembert, per il vettore $\boldsymbol{E}$, e ad una analoga per $\boldsymbol{H}$. A ciascuna di tali equazioni sarebbe poi applicabile la formula (16). Per questa via si avrebbe però un inconveniente: l'intervento, nelle formule risolutive, non soltanto di questi vettori, ma anche delle loro derivate, lungo σ; e l'eliminazione di tali derivate non appare affatto agevole.

Questa difficoltà si evita col procedimento indicato, ottenendo così formule risolutive, che si potrebbero identificare con quelle che furono ottenute da Orazio Tedone.

Nota I.

Per dedurre dalla (1) la (2) basta valersi della (8), con $V = 0$. Dopo ciò la (2) si identifica senz'altro con la (10).

Nota II.

Alla dimostrazione della (16) perverremo nell'ipotesi che le rette uscenti da un generico punto P interno a Σ intersechino σ in due soli punti, da bande opposte rispetto a P.

A) - Osserviamo anzitutto che dalla (8) segue

$$(30) \qquad \frac{i}{4\pi^2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(P, \omega)\omega \exp(\varepsilon\omega^2) \cosh(V\omega t)d\omega =$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{\pi^3\varepsilon^3}}\iiint_\Sigma U(Q, 0)\left[(R+Vt)\exp\left(\frac{-(R+Vt)^2}{4\varepsilon}\right)+\right.$$

$$\left.+(R-Vt)\exp\left(\frac{-(R-Vt)^2}{4\varepsilon}\right)\right]\frac{d\Sigma(Q)}{R}.$$

Poniamo poi

$$Q = P + RN.$$

Le componenti di N si possono esprimere con

$$\cos\theta \operatorname{sen}\alpha, \ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha, \ \cos\alpha,$$

dove è chiaro il significato di θ e α.

Si potrà poi ritenere su σ

$$R = R(\theta, \alpha).$$

Ciò premesso, introdotta la sfera unitaria Ω, il secondo membro della (30) diviene

$$\frac{1}{16\sqrt{\pi^3\varepsilon^3}}\iint_\Omega d\Omega\int_0^{R(\theta,\alpha)} RU(P+RN, 0)\left[(R+Vt)\exp\left(\frac{-(R+Vt)^2}{4\varepsilon}\right)+\right.$$

$$\left.+(R-Vt)\exp\left(\frac{-(R-Vt)^2}{4\varepsilon}\right)\right]dR,$$

o ancora, con facili cambiamenti delle variabili di integrazione,

$$(31) \qquad \frac{1}{4\sqrt{\pi^3\varepsilon}}\iint_\Omega d\Omega\left\{\int_{\frac{Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{R(\theta,\alpha)+Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}} \rho(2\sqrt{\varepsilon}\rho - Vt)\exp(-\rho^2)U[P+(2\sqrt{\varepsilon}\rho - \right.$$

$$- Vt)\boldsymbol{N},\ 0]d\rho + \int_{\frac{-Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{R(\theta,\alpha)-Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}} \rho(2\sqrt{\varepsilon}\,\rho + Vt)\exp(-\rho^2)U[P +$$

$$+ (2\sqrt{\varepsilon}\,\rho + Vt)\boldsymbol{N},\ 0]d\rho\,\}.$$

Facendo ora tendere ε a $0+$, si trova che il primo degli integrali estesi ad Ω tende a zero. Riguardo all'altro, osserviamo che

$$U[P + (2\sqrt{\varepsilon}\,\rho + Vt)\boldsymbol{N},\ 0] = U[P + Vt\boldsymbol{N},\ 0] +$$

$$+ 2\sqrt{\varepsilon}\,\rho\boldsymbol{N} \times \operatorname{grad}_P U[P + Vt\boldsymbol{N},\ 0] + \delta,$$

dove δ è infinitesimo del 2.° ordine almeno rispetto a $\sqrt{\varepsilon}$. Siamo così condotti a considerare l'espressione

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi^3\varepsilon}} \iint_{\Omega} d\Omega \int_{\frac{-Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{R(\theta,\alpha)-Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}} \rho(2\sqrt{\varepsilon}\,\rho + Vt)\exp(-\rho^2)\,\{\,U(P + Vt\boldsymbol{N},\ 0) +$$

$$+ 2\sqrt{\varepsilon}\,\rho\boldsymbol{N} \times \operatorname{grad}_P U[P + Vt\boldsymbol{N},\ 0]\,\}\,d\rho$$

la quale tende a

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega'} U[P + Vt\boldsymbol{N},\ 0]d\Omega + \frac{Vt}{4\pi}\iint_{\Omega'} \boldsymbol{N} \times \operatorname{grad}_P [P + Vt\boldsymbol{N},\ 0]d\Omega.$$

B) - Consideriamo ora il termine

$$\frac{i}{4\pi^2 V}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(\varepsilon\omega^2)b(P,\omega)\,\mathrm{senh}\,(V\omega t)d\omega.$$

A causa della (9) esso diviene

$$-\frac{1}{8V\sqrt{\pi^3\varepsilon}}\iiint_{\Sigma} U_t(Q,\ 0)\left[\exp\left(\frac{-(R+Vt)^2}{4\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{-(R-Vt)^2}{4\varepsilon}\right)\right]\frac{d\Sigma(Q)}{R},$$

ossia

$$-\frac{1}{4V\sqrt{\pi^3}}\iint_{\Omega} d\Omega \left\{ \int_{\frac{Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{R(\theta,\alpha)+Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}} (2\sqrt{\varepsilon}\rho - Vt) \exp(-\rho^2) U_t[P + (2\sqrt{\varepsilon}\rho -\right.$$

$$- Vt)\boldsymbol{N}, 0]d\rho - \int_{\frac{-Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{R(\theta,\alpha)-Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}} (2\rho\sqrt{\varepsilon} + Vt) \exp(-\rho^2) U_t[P +$$

$$\left. + (2\rho\sqrt{\varepsilon} + Vt)\boldsymbol{N}, 0]d\rho \right\},$$

Perciò esso tende a

$$\frac{t}{4\pi}\iint_{\Omega'} U_t[P + Vt\boldsymbol{N}, 0]d\Omega .$$

C) - Si ha, per la (9):

$$\frac{Vi}{4\pi^2}\int_0^t d\tau \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(\varepsilon\omega^2)\,\mathrm{senh}\,(V\omega\tau)d\tau \iint_{\sigma} \frac{\exp(\omega R)}{R}\frac{\partial U(Q, t-\tau)}{\partial n} d\sigma(Q) =$$

$$= -\frac{V}{8\sqrt{\pi^3\varepsilon}}\iint_{\sigma}\frac{d\sigma(Q)}{R}\int_0^t \frac{\partial U(Q, t-\tau)}{\partial n}\left[\exp\left(\frac{-(R+V\tau)^2}{4\varepsilon}\right) -\right.$$

(32)
$$\left. - \exp\left(\frac{-(R-V\tau)^2}{4\varepsilon}\right)\right] d\tau = -\frac{1}{4\sqrt{\pi^3}}\iint_{\sigma}\frac{d\sigma(Q)}{R}\left\{ \int_{\frac{R}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{Vt+R}{2\sqrt{\varepsilon}}} \frac{\partial^*}{\partial n} U\left(Q, t + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{R - 2\lambda\sqrt{\varepsilon}}{V}\right) \exp(-\lambda^2) d\lambda -$$

$$- \int_{\frac{-R}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{Vt-R}{2\sqrt{\varepsilon}}} \frac{\partial^*}{\partial n} U\left(Q, t - \frac{R + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}}{V}\right) \exp(-\lambda^2) d\lambda,$$

dove $\frac{\partial^*}{\partial n}$ è la derivata normale, calcolata come se U dipendesse solo da Q. Perciò il primo membro della (32) tende a

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma''}\frac{1}{R}\frac{\partial^*}{\partial n}U\left(Q,\, t-\frac{R}{V}\right)d\sigma(Q).$$

D) - In modo analogo si ha

$$\frac{Vi}{4\pi^2}\int_0^t d\tau\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp(\varepsilon\omega^2)\,\mathrm{senh}\,(V\omega\tau)d\omega\iint_\sigma U(Q,\, t-\tau)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\exp(\omega R)}{R}\right)d\sigma(Q)=$$

$$=-\frac{V}{8\sqrt{\pi^3\varepsilon}}\iint_\sigma d\sigma(Q)\int_0^t U(Q,\, t-\tau)\left\{\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\left[\exp\left(\frac{-(R+V\tau)^2}{4\varepsilon}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\exp\left(\frac{-(R-V\tau)^2}{4\varepsilon}\right)\right]-\frac{1}{2\varepsilon R}\frac{\partial R}{\partial n}\left[(R+V\tau)\exp\left(\frac{-(R+V\tau)^2}{4\varepsilon}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-(R-V\tau)\exp\left(\frac{-(R-V\tau)^2}{4\varepsilon}\right)\right]\right\}d\tau.$$

Quest'ultima espressione si può trasformare nell'altra

$$-\frac{1}{4\sqrt{\pi^3}}\iint_\sigma d\sigma(Q)\int_{\frac{R}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{R+Vt}{2\sqrt{\varepsilon}}}U\left(Q,\, t+\frac{R-2\lambda\sqrt{\varepsilon}}{V}\right)\left\{\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}-\frac{\lambda}{R\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial R}{\partial n}\right\}\exp(-$$

$$-\lambda^2)d\lambda+\frac{1}{4\sqrt{\pi^3}}\iint_\sigma d\sigma(Q)\int_{\frac{-R}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{Vt-R}{2\sqrt{\varepsilon}}}U\left(Q,\, t-\frac{R+2\lambda\sqrt{\varepsilon}}{V}\right)\left\{\frac{\partial\frac{1}{R}}{dn}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{R\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial R}{\partial n}\right\}\exp(-\lambda^2)d\lambda.$$

La prima parte tende a zero. La seconda si può scrivere

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi^3}}\iint_\sigma d\sigma(Q)\int_{\frac{-R}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{Vt-R}{2\sqrt{\varepsilon}}}\left\{U\left(Q,\, t-\frac{R}{V}\right)-\frac{2\lambda\sqrt{\varepsilon}}{V}U_t\left(Q,\, t-\frac{R}{V}\right)+\delta\right\}\left\{\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}+\right.$$

$$+\frac{\lambda}{R\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial R}{\partial n}\Big\}\exp(-\lambda^2)d\lambda,$$

dove $\mathfrak{b}$ è infinitesimo del 2.° ordine almeno rispetto a $\sqrt{\varepsilon}$, e tende a

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma''}\left[U\left(Q,\,t-\frac{R}{V}\right)\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}-\frac{1}{V}U_t\left(Q,\,t-\frac{R}{V}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial n}\right]d\sigma(Q).$$

E) - Il termine di $g(P,\,t\text{-}\tau;\,\omega)$ che dipende da $U(P,\,t\text{-}\tau)$ non porta alcun contributo. Infatti valendosi della (9), con $R = 0$, si ha:

$$\int_0^t U(P,\,t-\tau)d\tau\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp(\varepsilon\omega^2)\,\mathrm{senh}\,(V\omega\tau)d\omega=0.$$

Rimane da considerare l'espressione

$$\frac{Vi}{4\pi^2}\int_0^t d\tau\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp(\varepsilon\omega^2)d\omega\iiint_{\Sigma}\Phi(Q,\,t-\tau)\exp(\omega R)\,\mathrm{senh}\,(V\omega\tau)\,\frac{d\Sigma(Q)}{R},$$

la quale, sempre a causa della (9), si riduce a

$$-\frac{V}{8\sqrt{\pi^3\varepsilon}}\iiint_{\Sigma}\frac{d\Sigma(Q)}{R}\int_0^t\Phi(Q,\,t-\tau)\left[\exp\left(\frac{-(R+V\tau)^2}{4\varepsilon}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp\left(\frac{-(R-V\tau)^2}{4\varepsilon}\right)\right]d\tau,$$

ossia:

$$-\frac{1}{4\sqrt{\pi^3}}\iiint_{\Sigma}\frac{d\Sigma(Q)}{R}\Big\{\int_{\frac{R}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{Vt+R}{2\sqrt{\varepsilon}}}\Phi\left(Q,\,t-\frac{2\lambda\sqrt{\varepsilon}-R}{V}\right)\exp(-\lambda^2)d\lambda-\int_{\frac{-R}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{Vt-R}{2\sqrt{\varepsilon}}}\Phi\left(Q,\,t-\right.$$
$$\left.-\frac{R+2\lambda\sqrt{\varepsilon}}{V}\right)\exp(-\lambda^2)d\lambda\Big\}.$$

Il limite rispettivo è dato da

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Sigma''}\Phi\left(Q,\,t-\frac{R}{V}\right)\frac{d\Sigma(Q)}{R}.$$

Raccogliendo ora i risultati ottenuti, si perviene alla (16) del testo.