

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI PRODI

**Sull'equivalenza tra la seconda formula di Green  
e la corrispondente equazione di Fredholm  
per l'equazione  $\Delta_2 u + \lambda u = 0$**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 24 (1955), p. 103-122

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1955\\_\\_24\\_\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__103_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SULL'EQUIVALENZA TRA LA SECONDA  
FORMULA DI GREEN E LA CORRISPON-  
DENTE EQUAZIONE DI FREDHOLM PER  
L'EQUAZIONE  $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ .**

*Memoria (\*) di GIOVANNI PRODI (a Milano)*

Una soluzione dell'equazione

$$(1) \quad \Delta_2 u + \lambda u = 0$$

definita in un certo campo piano  $\tau$ , può essere rappresentata all'interno di questo, sotto certe ipotesi di regolarità, mediante la (prima) formula di Green

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left\{ u(M) \frac{\partial v(M, P)}{\partial v_M} - \frac{\partial u}{\partial v_M} v(M, P) \right\} d\sigma_M \quad (P \in \tau)$$

dove  $\sigma$  è il contorno di  $\tau$ ,  $v_M$  è la normale a  $\sigma$  in  $M$  orientata verso l'interno e  $v(M, P)$  è la soluzione fondamentale. Questa è funzione della sola distanza  $\overline{MP}$  e tale che  $v(M, P) \sim \log \frac{1}{\overline{MP}}$  sia limitata per  $\overline{MP} \rightarrow 0$ . Se  $Q$  è invece un punto esterno a  $\tau$ , si ha

$$\int_{\sigma} \left\{ u(M) \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} - \frac{\partial u}{\partial v_M} v(M, Q) \right\} d\sigma_M = 0$$

(seconda formula di Green), Quest'ultima formula ha suggerito a L. Amerio [2] un modo naturale di impostare i problemi al contorno generalizzati per la (1). *Consideriamo due fun-*

---

(\*) Pervenuta in Redazione il 5 gennaio 1955.

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico del Politecnico, Milano.

zioni  $A$  e  $B$ , integrabili su  $\sigma$  e tali che si abbia, per ogni  $Q$  esterno a  $\tau$ .

$$(2) \quad \int_{\sigma} \left\{ A(M) \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} - B(M)v(M, Q) \right\} d\sigma_M = 0.$$

Allora, se poniamo

$$(3) \quad u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left\{ A(M) \frac{\partial v(M, P)}{\partial v_M} - B(M)v(M, P) \right\} d\sigma_M \quad (P \in \tau)$$

$u(P)$  porgerà una soluzione generalizzata del problema al contorno in cui  $A$  assegna la traccia della funzione incognita sul contorno,  $B$  assegna la derivata normale. Precisamente, L. Amerio ha dimostrato che si ha, per quasi tutti i punti  $M$  di  $\sigma$ ,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{P \rightarrow M} u(P) = A(M) \text{ (dove } P \rightarrow M \text{ lungo } v_M) \\ \lim_{P \rightarrow M} \frac{\partial u}{\partial v_M} = B(M) \text{ (dove la derivata è presa lungo } v_M \text{ e il} \\ \text{ punto } P \text{ tende ad } M \text{ lungo } v_M) \end{array} \right.$$

Questa impostazione è stata estesa ad altre equazioni ed applicata a vari problemi da L. Amerio [3], [4], [5], da G. Fichera [6] e da E. Magenes [8]; in questi lavori l'equazione analoga alla (2) viene inoltre utilizzata per la risoluzione di problemi al contorno con il metodo di M. Picone [9].

S. Albertoni, in un lavoro di recente pubblicazione [1], si è posto il problema di studiare la (2) riducendola ad una ordinaria equazione integrale. Se, nella (2), dopo avere indicato con  $N$  la variabile di integrazione, si fa tendere il punto  $Q$  ad un punto  $M$  di  $\sigma$  lungo  $v_M$ , si ottiene, tenendo presente la discontinuità del potenziale di doppio strato, l'equazione (valida quasi ovunque su  $\sigma$ )

$$(5) \quad \pi A(M) = \int_{\sigma} A(N) \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_M} d\sigma_N - \int_{\sigma} B(N)v(M, N) d\sigma_N.$$

S. Albertoni ha studiato il problema di Neumann ed ha perciò considerato nella (5),  $A$  come funzione incognita; nel caso in cui l'omogenea associata alla (5) non abbia soluzioni

proprie, ha dimostrato che la soluzione  $A$ , assieme alla  $B$  assegnata, soddisfa certamente alla (2).

Il presente lavoro è rivolto allo studio dell'equivalenza tra la (2) e la (5).

Indicheremo con  $(E)$  la classe delle funzioni rappresentate in  $\tau$  dalla (3), dove  $A$  e  $B$  sono integrabili e soddisfano alla (2).

Occorre dire subito che, quanto al campo  $\tau$ , ci metteremo in condizioni di notevole regolarità: supporremo  $\tau$  limitato, di connessione finita, e dotato di un contorno  $\sigma$  di classe 2<sup>1)</sup>.

Orbene, dimostreremo con un esempio che, anche in queste ipotesi, l'equivalenza tra la (2) e la (5) può mancare; questo implica che, in generale, alle soluzioni della (5) si debba imporre, come ulteriore condizione, di soddisfare anche alla (2) (come appunto fa S. Albertoni). Vedremo che il sussistere della equivalenza tra la (2) e la (5) dipende dal poter rappresentare certe soluzioni della (1) mediante potenziali di semplice strato. Così il nostro problema viene messo in collegamento col problema (già considerato da G. Fichera [7] per il caso  $\lambda = 0$ ) di rappresentare le funzioni della classe  $(E)$  mediante potenziali di semplice strato.

Considereremo inoltre i risultati che si possono ottenere prendendo soluzioni fondamentali complesse: mentre per certi campi (a connessione multipla) permane ancora il risultato negativo circa l'equivalenza, esiste un caso notevole (il campo circolare) in cui l'equivalenza sussiste per ogni valore di  $\lambda$ . Non ho potuto vedere finora se questo risultato si estende a tutti i campi semplicemente connessi.

1. - Cominciamo col dimostrare che i potenziali di semplice strato

$$(6) \quad w(P) = \int_{\sigma} v(P, N) F(N) d\sigma_N$$

---

<sup>1)</sup> Tutti i risultati di questo lavoro si estendono, però, senza difficoltà al caso di un campo a tre dimensioni, purchè sempre a connessione finita e dotato di un contorno di classe 2.

dove  $F$  è integrabile su  $\sigma$ , sono funzioni della classe (E). Dovremmo premettere una enunciazione di alcune proprietà dei potenziali di semplice e doppio strato relativi ad una densità integrabile, ma preferiamo, per brevità, rinviare alla prima parte del lavoro di S. Albertoni [1]. Basterà dire che, per quello che riguarda il comportamento dei potenziali (6) e delle loro derivate normali al tendere del punto  $P$  al contorno, valgono risultati che generalizzano in modo ovvio quelli classici relativi ai potenziali newtoniani e a densità continua. Di tali risultati occorre far uso per passare dalla (2) alla (5).

Ritorniamo dunque alla (6) e poniamo

$$(7) \quad \begin{cases} A(M) = \int_{\sigma} v(M, N) F(N) d\sigma_N \\ B(M) = -\pi F(M) + \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, N)}{\partial \nu_M} F(N) d\sigma_N. \end{cases}$$

Dimostriamo anzitutto che si ha

$$(8) \quad w(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left\{ A(M) \frac{\partial v(M, P)}{\partial \nu_M} - B(M) v(M, P) \right\} d\sigma_M.$$

Se  $P$  è un qualsiasi punto interno a  $\tau$ , e  $Q$  un punto esterno, avremo, per la formula di Green,

$$(9) \quad v(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left\{ v(M, Q) \frac{\partial v(M, P)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial v(M, Q)}{\partial \nu_M} v(M, P) \right\} d\sigma_M.$$

Facciamo ora tendere  $Q$  ad un punto  $N$  di  $\sigma$  lungo  $\nu_N$ , tenendo presente che, per la discontinuità del potenziale di doppio strato, risulta

$$\begin{aligned} \lim_{\rightarrow N} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, Q)}{\partial \nu_M} v(M, P) d\sigma_M &= -\frac{1}{2} v(N, P) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, N)}{\partial \nu_M} v(N, P) d\sigma_M. \end{aligned}$$

mentre il potenziale di semplice strato che rimane è continuo

su  $v_N$ . Otterremo così l'identità (valida per  $P \in \tau$ ,  $N \in \sigma$ )

$$v(P, N) = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma} \left\{ v(M, N) \frac{\partial v(M, P)}{\partial v_M} - \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_M} v(M, P) \right\} d\sigma_M.$$

Basterà ora sostituire questa rappresentazione di  $v(P, N)$  nella (6) e tenere presente la (7) per ottenere la (8).

Procedendo in modo analogo, si verifica che i valori di  $A$  e  $B$  dati dalla (7) soddisfano alla (2) per ogni punto  $Q$  esterno.

Completiamo questo risultato con una osservazione. Ricordando le relazioni di limite (4) e quelle relative ai potenziali di semplice strato e alle loro derivate normali, si ha che, *assegnata una funzione della classe (E) mediante una coppia (A, B) di funzioni integrabili su  $\sigma$  e soddisfacenti alla (2), condizione necessaria e sufficiente perchè essa sia rappresentabile mediante un potenziale di semplice strato a densità integrabile su  $\sigma$  è che il sistema (7) ammetta soluzione in  $L^1$ .* <sup>2)</sup>

**2. - TEOREMA 1.** *Condizione necessaria e sufficiente perchè, nelle ipotesi ammesse per il contorno  $\sigma$ , sussista l'equivalenza tra la (2) e la (5) (quando  $A \in L^1$ ,  $B \in L^1$ ) è che, per ogni punto  $Q$  esterno a  $\tau$ , esista almeno una funzione  $F_Q$  continua che risolva il sistema*

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} = -\pi F_Q(M) + \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_M} F_Q(N) d\sigma_N. \\ v(M, Q) = \int_{\sigma} v(M, N) F_Q(N) d\sigma_N. \end{array} \right.$$

Ricordiamo che la (5) è una conseguenza della (2): affermare l'equivalenza tra queste equazioni significherà perciò dire che ogni coppia di funzioni  $(A, B)$  che soddisfa alla (5) soddisfa anche alla (2) per ogni punto  $Q$  esterno.

<sup>2)</sup> Osserviamo che i risultati di questo paragrafo valgono sotto condizioni più generali, per il contorno, di quelle che qui ci interessano; si constata facilmente che basta porre le stesse condizioni sotto cui L. Amerio ha dimostrato il suo teorema di inversione [2].

Dimostriamo ora che la condizione espressa dal teorema è sufficiente. Infatti, moltiplicando la prima delle (10) membro a membro per una qualunque  $A \in L^1$ , la seconda delle (10) per una qualunque  $B \in L^1$  e sottraendo membro a membro, si ottiene l'identità

$$(1) \quad \int_{\sigma} \left\{ A(M) \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} - B(M)v(M, Q) \right\} d\sigma_M \equiv \\ \equiv - \int_{\sigma} F_Q(M) \left\{ \pi A(M) - \int_{\sigma} A(N) \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_N} d\sigma_N + \int_{\sigma} B(N)v(M, N) d\sigma_N \right\} d\sigma_M.$$

Da questa si deduce subito che, quando è soddisfatta la (5), lo è anche la (2).

Per dimostrare la necessità della nostra condizione, cominciamo col considerare l'equazione omogenea associata alla prima delle (10):

$$(12) \quad \pi F(M) = \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_M} F(N) d\sigma_N.$$

Essa è la trasposta della omogenea associata alla (5):

$$(13) \quad \pi A(M) = \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_N} A(N) d\sigma_N.$$

Le due equazioni, come è ben noto, hanno lo stesso numero  $s \geq 0$  di soluzioni proprie linearmente indipendenti<sup>3)</sup> e queste sono continue. Supponiamo  $s > 0$ ; facciamo ora vedere che, se sussiste l'equivalenza tra la (2) e la (5), dette

$$F_1, F_2, \dots, F_s$$

---

<sup>3)</sup> In virtù delle ipotesi che abbiamo fatto per il contorno, il nucleo  $\frac{1}{\pi} \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_N}$ , come è ben noto, può essere definito anche per  $M = N$  in modo da risultare continuo; possiamo dunque valerci della teoria classica di Fredholm: questa si estende al caso in cui il nucleo, pur non essendo limitato, abbia però un iterato limitato. Ora, impostando la nostra ricerca per un campo tridimensionale, purchè sempre dotato di un contorno di classe 2, si trova, come è ben noto (vedi [7], lemma II, pag. 301) che il secondo iterato del nucleo è continuo.

$s$  soluzioni della (12) linearmente indipendenti, i relativi potenziali considerati sul contorno

$$\int_{\sigma} v(M, N) F_i(N) d\sigma_N \quad (M \in \sigma, i = 1, 2, \dots, s)$$

devono essere linearmente indipendenti. Infatti supponiamo che sia

$$\sum_1^s k_i \int_{\sigma} v(M, N) F_i(N) d\sigma_N = 0 \quad (M \in \sigma)$$

dove le costanti  $k_i$  non sono tutte nulle. Ponendo

$$\sum_1^s k_i F_i(N) = \Phi(N)$$

il relativo potenziale

$$w(P) = \int_{\sigma} v(P, N) \Phi(N) d\sigma_N$$

avrà derivata normale interna nulla su  $\sigma$ , essendo  $\Phi$  soluzione della (12). D'altra parte, la relazione

$$\int_{\sigma} v(M, N) \Phi(N) d\sigma_N = 0 \quad (M \in \sigma)$$

ci dice che la (5) è soddisfatta ponendo

$$A(N) = 0 \quad , \quad B(N) = \Phi(N).$$

Per l'equivalenza, si deduce che deve essere soddisfatta la (2), cioè si deve avere

$$\int_{\sigma} v(M, Q) \Phi(N) d\sigma_N = 0$$

per ogni punto  $Q$  esterno; ma allora anche la derivata normale esterna del nostro potenziale è nulla. Ciò implica (secondo un ben noto risultato) che deve essere

$$\Phi(N) = 0 \quad (N \in \sigma)$$

Ma questo è assurdo perchè abbiamo supposto le funzioni  $F_i$  linearmente indipendenti. Tenendo presente che i po-



tenziali di semplice strato appartengono alla classe (E), si ricava che le funzioni

$$(14) \quad A_i(M) = \int_{\sigma} v(M, N) F_i(N) d\sigma_N$$

costituiscono un sistema completo di soluzioni proprie della (13).

Dimostriamo ora che la prima delle (10) ammette soluzione. Notiamo che la (5) è soddisfatta quando si ponga

$$A(M) = v(M, Q) \quad B(M) = \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M}.$$

Infatti la  $v(P, Q)$ , come funzione di  $P$  in  $\tau$ , appartiene ad (E), per ogni  $Q$  esterno. Questo implica che, dette ancora  $F_i$  le soluzioni proprie della (12), deve essere soddisfatta la condizione di risolubilità

$$\int_{\sigma} F_i(N) d\sigma_N \int_{\sigma} v(M, N) \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma_M = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma_M \int_{\sigma} v(M, N) F_i(N) d\sigma_N = \\ = \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} A_i(M) d\sigma_M = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

Ma quest'ultima relazione è la condizione di risolubilità della prima delle (10). Questa ammetterà pertanto una varietà lineare di soluzioni di dimensione  $s$ ; si constata facilmente che esse sono tutte continue, essendo continua  $\frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M}$ .

Anche la varietà dei relativi potenziali di semplice strato, presi sul contorno, per quanto abbiamo visto sopra, avrà dimensione  $s$ : essa conterrà pertanto tutte le soluzioni della (5), ove si ponga  $B = \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M}$  e si consideri la  $A$  come incognita. Esisterà allora una soluzione della prima delle (10) che soddisfa anche alla seconda.

Nel caso in cui sia  $s = 0$ , si dimostra immediatamente che il sistema (10) ammette soluzione, senza fare ulteriori ipotesi, e si ritrova così il risultato di S. Albertoni riportato nell'introduzione.

Riflettendo sul modo con cui è stato dimostrato il Teorema 1, si ottiene anche facilmente il seguente risultato.

**TEOREMA 2.** *Condizione necessaria e sufficiente perchè sussista l'equivalenza tra la (2) e la (5) è che l'identità*

$$(15) \quad \int_{\sigma} v(P, N)F(N)d\tau_N = 0 \quad (P \in \tau)$$

per una funzione  $F$  continua, implichi  $F(N) \equiv 0$  su  $\sigma$ .

Infatti, se c'è equivalenza, dovendo sussistere, con la (15), l'analoga

$$\int_{\sigma} v(Q, N)F(N)d\sigma_N = 0$$

per ogni punto  $Q$  esterno, si ha  $F(N) = 0$  su  $\sigma$ , essendo nulle le derivate normali interna ed esterna. Questo dimostra che la condizione è necessaria; che sia anche sufficiente, lo si vede esaminando l'ultima parte della dimostrazione del teorema 1. La dimostrazione dell'esistenza di una soluzione del sistema (10) era fondata sull'indipendenza lineare delle funzioni  $A_i$  date dalla (14); ma questa segue immediatamente anche dalla condizione del teorema 2. Infatti, avendo i potenziali

$$w_i(P) = \int_{\sigma} v(P, N)F_i(N)d\sigma_N \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

derivata normale nulla su  $\sigma$ , dalla dipendenza lineare delle loro tracce su  $\sigma$  conseguirebbe la loro dipendenza lineare all'interno di  $\tau$  e, pertanto, anche la dipendenza lineare delle  $F_i$ , contro l'ipotesi.

**3.** - Il seguente teorema dà una interpretazione espressiva della condizione di equivalenza contenuta nel sistema (10).

**TEOREMA 3.** *Condizione necessaria e sufficiente perchè, nelle ipotesi ammesse per il contorno  $\sigma$ , sussista l'equivalenza tra la (2) e la (5) (quando  $A \in L^1$ ,  $B \in L^1$ ) è che la soluzione fondamentale relativa ad un qualsiasi punto  $Q$  esterno a  $\tau$  si possa rappresentare all'interno di  $\tau$  mediante un potenziale di semplice strato indotto da una densità continua su  $\sigma$ .*

Esponiamo la semplice dimostrazione, malgrado essa sia contenuta quasi esplicitamente nell'osservazione finale del n. 1. Supponiamo infatti che sia

$$(16) \quad v(P, Q) = \int_{\sigma} v(P, N) F_Q(N) d\sigma_N$$

dove  $F_Q$  è una funzione continua.

Allora si vede subito che la (16) deve valere anche quando  $P$  è sul contorno, cioè è soddisfatta, dalla  $F_Q$ , la seconda delle (10). Se poi prendiamo un punto  $P$  sulla normale  $\nu_M$ , internamente a  $\tau$ , e deriviamo lungo la normale stessa, facendo tendere  $P$  ad  $M$  otteniamo la prima delle (10).

Viceversa, supponiamo che il sistema (10) abbia una soluzione  $F_Q$  e poniamo

$$w(P) = \int_{\sigma} v(P, N) F_Q(N) d\sigma_N \quad (P \in \tau)$$

$w(P)$  e  $v(P, Q)$  appartengono entrambe alla classe (E) in  $\tau$ ; inoltre, come esprime il sistema (10), esse assumono il medesimo valore ed hanno derivate normali coincidenti su  $\sigma$ . Si avrà allora identicamente

$$v(P, Q) = w(P) \quad (P \in \tau).$$

Osserviamo che, nel caso classico dell'equazione di Laplace, la rappresentazione in questione è sempre possibile, come si può vedere anche applicando i risultati di G. Fichera [6]. Questo caso ha particolare importanza perchè allora la (13), che è l'omogenea associata alla (5), possiede, come è noto, una soluzione propria e non si può applicare il criterio di equivalenza di S. Albertoni sopra riferito. Malgrado questo, dunque, la (2) e la (5) sono equivalenti per  $\lambda = 0$ .

Ma non si può affermare che questa equivalenza sussista sempre; siamo ora in grado di dimostrarlo con un esempio.

*Esempio 1.* - Si consideri un cerchio di centro  $O$  e raggio  $R$  e, in esso, le soluzioni dell'equazione

$$\Delta_2 u + u = 0$$

Come soluzione fondamentale dovremo prendere  $v(P, Q) = V(\overline{PQ})$ , dove  $V(r)$  è una soluzione singolare dell'equazione di Bessel di ordine 0 che ha come parte principale, per  $r \rightarrow 0$ ,  $\log \frac{1}{r}$ . Potremo prendere, ad es.  $V(r) = -Y_0(r)$ , dove  $Y_0(r)$  è la funzione di Bessel di seconda specie o funzione di Neumann, di ordine 0. Ma le funzioni di Bessel di argomento reale hanno tutte andamento oscillante; se ora prendiamo  $R$  uguale ad uno zero di  $Y_0(r)$ , ogni potenziale prodotto da una distribuzione assegnata sulla circonferenza sarà nullo nel punto  $O$ . Quindi sarà impossibile rappresentare la soluzione fondamentale relativa ad un punto  $Q$  esterno: questo, almeno, tutte le volte che sia  $Y_0(\overline{OQ}) \neq 0$ .

4. - L'esempio trovato ci porta spontaneamente a chiederci se la rappresentazione (16) non possa sussistere quando si assuma una soluzione fondamentale complessa e si possano assegnare distribuzioni complesse.

E' necessario però riesaminare il nostro problema fin da principio per precisare il senso di questa estensione.

E' evidente, in primo luogo, che possiamo considerare soluzione della (1) complesse. Le formule di Green e il teorema di inversione di L. Amerio sussistono anche se si prende una soluzione fondamentale complessa e si prendono funzioni  $A$  e  $B$  complesse. Così, per  $\lambda$  reale positivo, ci si può servire di una delle funzioni di Hankel, ponendo

$$(17) \quad v(E, S) = V(r) = i \{ J_0(\sqrt{\lambda}r) + iY_0(\sqrt{\lambda}r) \} = iH_0(\sqrt{\lambda}r) \quad (\overline{RS} = r).$$

Si può allora definire una classe analoga alla  $(E)$ , che potremo indicare con  $(\overline{E})$ , formata dalle funzioni che ammettono una rappresentazione (3), dove  $A$  e  $B$  sono funzioni com-

plesse, a modulo integrabile su  $\sigma$ , e soddisfacenti sempre alla (2).

I risultati espressi dai teoremi 1, 2, 3, sussistono inalterati anche con la nostra estensione: basterà tener presente che l'equazione (12) è ancora la trasposta della (13).

Il significato fisico-matematico della nostra estensione, nel problema della rappresentazione (16), è chiarito dalla considerazione delle formule asintotiche valide per le funzioni di Hankel (cfr. [10] pp. 196 - 198): l'averne una densità  $F$  complessa fa sì che si possa disporre anche della fase dell'onda stazionaria che è rappresentata dalla soluzione fondamentale.

Tuttavia la nostra estensione non rende sempre possibile la rappresentazione (16): lo dimostra il seguente esempio.

*Esempio 2.* - Consideriamo ancora l'equazione dell'Esempio 1; questa volta però prendiamo come campo la corona circolare  $\beta$  con centro  $O$  e raggi  $R_1$  ed  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). La soluzione fondamentale sia data dalla (17) con  $\lambda = 1$ . Supponiamo che la soluzione fondamentale relativa al punto  $O$  (che è esterno a  $\beta$ ) si possa rappresentare, all'interno di  $\beta$ , con un potenziale di semplice strato individuato da due densità:  $F_1(\theta)$  sul cerchio interno ed  $F_2(\theta)$  sul cerchio esterno (dove  $\theta$  è l'anomalia di un raggio passante per  $O$  rispetto ad un raggio determinato e le densità sono riferite all'anomalia). Per un punto  $P$  di  $\beta$  che abbia come coordinate  $(r, \varphi)$  nello stesso riferimento polare, avremo

$$v(O, P) = iH_0^{(1)}(r) = i \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(\sqrt{R_1^2 + r^2 - 2R_1r \cos \eta}) F_1(\eta + \varphi) d\eta + \\ + i \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2R_2r \cos \eta}) F_2(\eta + \varphi) d\eta$$

e, poichè  $v(O, P)$  è costante rispetto a  $\varphi$ , potremo scrivere

$$v(O, P) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(\sqrt{R_1^2 + r^2 - 2R_1r \cos \eta}) F_1(\eta + \varphi) d\eta +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_0^{1\pi} d\varphi \int_0^{1\pi} H_0^{(1)}(\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2R_2r \cos \eta}) F_2(\eta + \varphi) d\eta$$

e perciò

$$\begin{aligned} v(O, P) = 2i\bar{F}_1 \int_0^\pi H_0^{(1)}(\sqrt{R_1^2 + r^2 - 2R_1r \cos \eta}) d\eta + \\ + 2i\bar{F}_2 \int_0^\pi H_0^{(1)}(\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2R_2r \cos \eta}) d\eta \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con  $\bar{F}_1$  e  $\bar{F}_2$  i valori medi di  $F_1$  ed  $F_2$  rispettivamente. Applicando una formula dovuta a Gegenbauer (cfr [10] p. 367), otterremo

$$v(O, P) = 2i\bar{F}_1 H_0^{(1)}(r) J_0(R_1) + 2i\bar{F}_2 H_0^{(1)}(R_2) J_0(r).$$

Prendiamo ora  $R_1$  tale che sia  $J_0(R_1) = 0$ ; avremo allora

$$v(O, P) = iH_0^{(1)}(r) = 2i\bar{F}_2 H_0^{(1)}(R_2) J_0(r).$$

Ma questa relazione è assurda, per l'indipendenza lineare delle funzioni  $H_0^{(1)}$  e  $J_0$ .

**5.** - Contrariamente a quello che si potrebbe arguire dal risultato negativo contenuto nell'esempio 2, esistono però campi per cui la rappresentazione (16) (e quindi anche l'equivalenza tra la (2) e la (5)) si hanno per qualsiasi valore reale di  $\lambda$ , quando la soluzione fondamentale e la densità siano complesse. Consideriamo infatti il seguente esempio.

*Esempio 3.* - Consideriamo la (1) in un cerchio  $\gamma$  di centro  $O$  e raggio  $R$ . Supponiamo  $\lambda > 0$  e prendiamo come soluzione fondamentale la funzione data dalla (17). Per dimostrare che sussiste la rappresentazione (16) per ogni punto  $Q$  esterno (e perciò l'equivalenza tra la (2) e la (5)) basterà dimostrare, in virtù del teorema 2, che, se un potenziale dovuto ad una densità continua distribuita sulla circonferenza è nullo all'interno, la densità è nulla.

Siano  $(r, \varphi)$  le coordinate di un punto interno al cerchio, in un riferimento polare e sia  $F(\theta)$  la densità, riferita all'anomalia. Il potenziale avrà l'espressione

$$(18) \quad w(P) = i \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda(R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi))}) F(\theta) d\theta$$

e, per ipotesi, sia  $w(P) = 0$  in  $\gamma$ . Possiamo ora applicare la seguente notevole formula dovuta a Neumann (cfr. [10] pp. 358-365)

$$H_0^{(1)}(\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi}) = \sum_0^{\infty} \epsilon_m H_m^{(1)}(R) J_m(r) \cos m\varphi \quad (i=1, 2)$$

dove è  $\epsilon_m = 2$  per  $m = 0$ ,  $\epsilon_m = 1$  per  $m > 0$  e i simboli  $J_m$ ,  $H_m^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ) indicano, come di consueto, le funzioni di Bessel e di Hankel di ordine intero  $m$ . Sostituendo nella (18) e integrando la serie termine a termine (cosa possibile per la uniforme convergenza della serie, quando  $P$  sia contenuto in un dominio (chiuso) interno a  $\gamma$ ) si avrà

$$\begin{aligned} w(P) &= i \sum_0^{\infty} \epsilon_m H_m^{(1)}(\lambda R) J_m(\sqrt{\lambda} r) \int_0^{2\pi} \cos m(\theta - \varphi) F(\theta) d\theta = \\ &= 2i H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} R) J_0(\sqrt{\lambda} r) \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta + \\ &+ i \sum_1^{\infty} H_m^{(1)}(\sqrt{\lambda} R) J_m(\sqrt{\lambda} r) \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos m\theta F(\theta) d\theta + \\ &+ i \sum_1^{\infty} H_m^{(1)}(\sqrt{\lambda} R) J_m(\sqrt{\lambda} r) \sin m\varphi \int_0^{2\pi} \sin m\theta F(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ma essendo  $w(P)$  identicamente nulla al variare di  $\varphi$  e di  $r$ , si dovrà avere

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} R) \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = 0, \quad H_m^{(1)}(\sqrt{\lambda} R) \int_0^{2\pi} \cos m\theta F(\theta) d\theta = 0 \quad (m=1, 2, \dots) \\ H_m^{(1)}(\sqrt{\lambda} R) \int_0^{2\pi} \sin m\theta F(\theta) d\theta = 0 \quad (m=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Basta ora tenere presente che le funzioni di Hankel  $H_m$  non si annullano per alcun valore reale positivo, per concludere che si ha

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos m\theta F(\theta) d\theta = 0 \quad \int_0^{2\pi} \sin m\theta F(\theta) d\theta = 0$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

La funzione  $F(\theta)$ , avendo nulli tutti i coefficienti di Fourier rispetto al sistema  $1, \cos m\theta, \sin m\theta (m = 1, 2, \dots)$ , che è completo nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ , è identicamente nulla.

Quando sia  $\lambda < 0$  si può procedere in modo analogo; ma allora si può assumere come soluzione fondamentale la funzione  $K_0(\sqrt{\lambda}r)$  che è reale per ogni  $r > 0$  e che (con tutte le  $K_m(\sqrt{\lambda}r)$ ) non si annulla per alcun  $r > 0$ .

Per  $\lambda = 0$  abbiamo già notato che la (2) e la (5) sono equivalenti.

**6.** - Ricapitoliamo ora brevemente i risultati espressi dai teoremi 1, 2, 3. Abbiamo trovato che le seguenti condizioni si implicano a vicenda:

- a) la (2) e la (5) sono equivalenti;
- b) il sistema (10) ammette una soluzione continua;
- c) vale la rappresentazione (16) (con una  $F$  continua);
- d) se un potenziale dovuto ad una densità continua distribuita su  $\sigma$  è nullo in  $\tau$ , la sua densità è nulla.

Concludiamo la nostra ricerca con il seguente teorema che collega le funzioni della classe ( $E$ ) con i potenziali di semplice strato (e che si estende in modo ovvio alla classe ( $\bar{E}$ )).

**TEOREMA 4.** *Condizione necessaria e sufficiente perchè, nelle ipotesi ammesse per il contorno  $\sigma$ , ogni funzione della classe ( $E$ ) si possa rappresentare mediante un potenziale di semplice strato dato da una densità integrabile su  $\sigma$  è che valga una delle a), b), c), d).*

Dall'osservazione finale del n. 1 si deduce che la rappresentazione in questione equivale alla risoluzione in  $L^1$  del



sistema

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{B}(M) = -\pi F(M) + \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_M} F(N) d\sigma_N \\ \bar{A}(M) = \int_{\sigma} v(M, N) F(N) d\sigma_N \end{cases}$$

dove  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  sono funzioni di  $L^1$  soddisfacenti alla (2). Considerando la prima delle (19) si vede senza difficoltà che, se  $\bar{B}(M)$  è continua, anche la soluzione  $F$  è continua <sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> Nel caso tridimensionale vale un risultato analogo, pur non essendo allora continuo il nucleo. Infatti, l'equazione corrispondente alla prima delle (19) è allora la

$$(\circ) \quad \bar{B}(M) = -2\pi F(M) + \int_{\sigma} \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_M} F(N) d\sigma_N$$

dove abbiamo indicato ancora con  $v(M, N)$  la soluzione fondamentale (che diventa infinita come  $\frac{1}{MN}$  per  $MN \rightarrow 0$ ). Indichiamo con  $K(M, N)$  il nucleo  $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_M}$  e con  $K_1(M, N)$  e  $K_2(M, N)$  i suoi iterati primo e secondo. Moltiplicando la ( $\circ$ ) membro a membro per  $\frac{1}{2\pi} K_1(S, M)$  e integrando rispetto ad  $M$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K_1(S, M) \bar{B}(M) d\sigma_M &= - \int_{\sigma} K_1(S, M) F(M) d\sigma_M + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} F(N) \left\{ \int_{\sigma} K_1(S, M) K(M, N) d\sigma_M \right\} d\sigma_N \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K_1(S, M) \bar{B}(M) d\sigma_M = - \int_{\sigma} K_1(S, M) F(M) d\sigma_M + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K_2(S, N) F(N) d\sigma_N.$$

Ma il primo membro è continuo; così pure l'ultimo termine del secondo membro perchè  $K_2(S, N)$ , secondo un classico risultato che abbiamo già richiamato, risulta continuo. Perciò  $\int_{\sigma} K_1(S, M) F(M) d\sigma_M$  è continuo. Moltiplicando la ( $\circ$ ) membro a membro per  $K(S, M)$  e integrando rispetto ad  $M$  si ottiene, utilizzando questo risultato, che  $\int_{\sigma} K(S, M) F(M) d\sigma_M$  è continuo. La ( $\circ$ ) ci dice allora che  $F(M)$  è continua.

Ciò premesso, dimostriamo che la condizione espressa dal teorema è necessaria. Se è risolubile il sistema (19) in  $L^1$ , quando  $A$  e  $B$  soddisfano alla (2), sarà sempre risolubile anche il sistema (10) in  $L^1$ ; ma poichè  $\frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M}$  è continua al variare di  $M$  in  $\sigma$ , le soluzioni devono essere continue, cioè è soddisfatta la  $b$ ).

Viceversa, supponiamo che sia soddisfatta la condizione  $d$ ). Imiteremo il ragionamento che abbiamo fatto per il teorema 1. Poichè le soluzioni proprie della (12) in  $L^1$  sono tutte continue, per l'ipotesi  $d$ ) i rispettivi potenziali presi su  $\sigma$

$$w_i(M) = \int_{\sigma} v(M, N)F_i(N)d\sigma_N$$

formano un sistema completo di soluzioni proprie della (13).

Infatti le  $w$  devono essere linearmente indipendenti perchè una loro dipendenza lineare implicherebbe la dipendenza dei potenziali

$$w_i(P) = \int_{\sigma} v(P, N)F_i(N)d\sigma \quad (P \in \tau)$$

e quindi delle  $F_i$ , secondo la condizione  $d$ ).

Sarà poi soddisfatta l'equazione (5) dalla coppia  $(\bar{A}, \bar{B})$ . Questo implica che deve essere soddisfatta la condizione di risolubilità

$$\int_{\sigma} F_i(M) \left\{ \int_{\sigma} v(M, N)\bar{B}(N)d\sigma_N \right\} d\sigma_M = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, S)$$

da cui

$$\int_{\sigma} \bar{B}(N)w_i(N)d\sigma_N = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, S)$$

Ma questa è la condizione di risolubilità per la prima delle (19) in  $L^1$ : essa ammetterà pertanto una varietà  $s$ -dimensionale di soluzioni. I rispettivi potenziali, presi su  $\sigma$

$$\int_{\sigma} v(M, N)F(N)d\sigma_N$$

descriveranno una varietà  $s$ -dimensionale che, pertanto, esaurirà quella delle soluzioni della (5) in cui si ponga  $B = \bar{B}$  e si consideri  $A$  come incognita. Esisterà allora una soluzione della prima delle (19)  $\bar{F}$ , per cui si ha

$$\int_{\sigma} v(M, N) \bar{F}(N) d\sigma_N = \bar{A}(M)$$

Il nostro asserto risulta così completamente provato.

**7.** - Aggiungiamo ancora un'osservazione: tutti i risultati di questo lavoro si possono estendere ad una equazione non omogenea del tipo

$$(1') \quad \Delta_2 u + \lambda u = f$$

dove la funzione  $f$  è definita e continua in  $\tau$  e soddisfa ad una condizione di Hölder. Tenendo conto della espressione che assumono per la (1') le formule di Green, ad ogni funzione  $f$  soddisfacente alle condizioni dette si può associare la classe delle soluzioni della (1') che ammettono in  $\tau$  la rappresentazione

$$(3') \quad u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left\{ A'(M) \frac{\partial v(M, P)}{\partial v_M} - B'(M) v(M, P) \right\} d\sigma_M - \frac{1}{2\pi} \int_{\tau} f(R) v(R, P) d\tau_R$$

dove  $A'$  e  $B'$  sono funzioni integrabili su  $\sigma$  che soddisfano, per ogni punto  $Q$  esterno, alla relazione

$$(2') \quad 0 = \int_{\sigma} \left\{ A'(M) \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} - B'(M) v(M, Q) \right\} d\sigma_M - \int_{\tau} f(R) v(R, Q) d\tau_R$$

Si potrà poi scrivere l'equazione integrale analoga della (5):

$$(5') \quad \pi A(M) = \int_{\sigma} A(N) \frac{\partial v(M, N)}{\partial v_M} d\sigma_N - \int_{\sigma} B(N) v(M, N) d\sigma_N - \int_{\tau} f(R) v(R, M) d\tau_R$$

Notiamo che il teorema di inversione è stato dato da L. Amerio per questa classe più ampia (che indicheremo col simbolo  $(E_{\rho})$ ).

La funzione

$$u^*(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\tau} v(R, P) f(R) d\tau_R$$

appartiene ad  $(E_{\rho})$ .

Infatti poniamo

$$A^*(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} v(R, M) f(R) d\tau_R, \quad B^*(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial v(R, M)}{\partial v_M} f(R) d\sigma_R.$$

Si riconosce subito che ambedue queste funzioni sono integrabili su  $\sigma$ ; basta tener presente che gli integrali  $\int_{\sigma} |v(M, R)| d\sigma_M$  e  $\int_{\sigma} \left| \frac{\partial v(M, R)}{\partial v_M} \right| d\sigma_M$  esistono e sono limitati al variare di  $R$  in  $\tau$  e che  $f(R)$  è integrabile in  $\tau$ . Ora, la  $u^*$  si può rappresentare mediante la (3') ponendo  $A' = A^*$ ,  $B' = B^*$ . Per la verifica basta tener presente l'identità, valida per ogni  $P, R \in \tau$ ,

$$\int_{\sigma} \left\{ v(M, R) \frac{\partial v(M, P)}{\partial v_M} - \frac{\partial v(M, R)}{\partial v_M} v(M, P) \right\} d\sigma_M = 0.$$

Inoltre la coppia  $(A^*, B^*)$  soddisfa alla (2'), come si verifica subito mediante la (9).

Premesso questo, possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca tra le funzioni  $u$  della classe  $(E)$  (individuate da una coppia  $(A, B)$ ) e le funzioni  $u'$  della classe  $(E_{\rho})$  (individuate da una coppia  $(A', B')$  ponendo  $u = u' - u^*$  cioè  $A = A' - A^*$ ,  $B = B' - B^*$ ).

Avremo allora, evidentemente, che quando e solamente quando  $(A, B)$  soddisfa alla (2)  $(A', B')$  soddisfa alla (2); quando e solamente quando  $(A, B)$  soddisfa alla (5)  $(A', B')$  soddisfa alla (5').

Il problema della equivalenza tra la (5') e la (2') è ricondotto allora al problema della equivalenza tra la (5) e la (2); pertanto i teoremi 1, 2, 3 valgono inalterati per l'equivalenza tra la (5') e la (2').

Avendo poi presente che la densità di un potenziale superficiale che sia soluzione della (1') è univocamente determinata dalla  $f$  si deduce che la stessa condizione del teorema 4 è necessaria e sufficiente perchè una funzione della classe  $(E_7)$  sia esprimibile come somma di un potenziale di semplice strato a densità integrabile su  $\sigma$  e di un potenziale superficiale di densità hölderiana in  $\tau$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ALBERTONI S.: *Sulla risoluzione del problema di Neumann per l'equazione  $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$* , « Rend. Istituto Lombardo », 87, (1954).
- [2] AMERIO L.: *Sull'integrazione dell'equazione  $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$  in un dominio a connessione qualsiasi*, « Rend. Istituto Lombardo », 78, (1944-1945).
- [3] — — *Sull'integrazione dell'equazione  $\Delta_{2k} u = f$* . « Annali di Mat. Pura e Applicata », IV, 24, (1945).
- [4] — — *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico*, « American Journal of Math. », 69, (1947).
- [5] — — *Sull'equazione di propagazione del calore*, « Rend. di Matematica e delle sue applicazioni », V, 5, (1946).
- [6] FICHERA G.: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, « Annali di Mat. Pura e Applicata », IV, 27, (1948).
- [7] KELLOG O. D.: *Foundations of potential theory*, (Berlino, 1929).
- [8] MAGENES E.: *Sull'equazione del calore: teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone*, « Rend. Seminario Mat. Univ. Padova », 21, (1952).
- [9] PICONE M.: *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti*, « Atti Acc. delle Scienze di Torino », (1940).
- [10] WATSON G. N.: *Theory of Bessel Functions*, (Cambridge, 1922).