RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROBERTO CONTI

Sulla convergenza in media delle derivate di una successione di funzioni convergente in lunghezza

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 86-90

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__86_0>

SULLA CONVERGENZA IN MEDIA DELLE DERIVATE DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI CONVERGENTE IN LUNGHEZZA

Nota (*) *di* ROBERTO CONTI (*Firenze*)

1. E. BAIADA ha di recente provato il seguente criterio di convergenza in lunghezza, dimostrato poi più brevemente da G. SCORZA-DRAGONI [1]):

A) *Sia* $\{ y_n(x) \}$ *una successione uniformemente convergente di funzioni (reali) definite in un intervallo* $a \vdash\!\dashv b$ *ed ivi assolutamente continue. La funzione limite* $y_0(x)$ *sia (continua e) a variazione limitata.*

Si abbia inoltre per ogni n:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{h \to 0+} \sum_1^{\infty}{}_r \int_a^{b-h/2^r} | y'_n(x + h/2^r) - y'_n(x) | \, dx \equiv 0 ,$$

dove il segno $\equiv 0$ *indica* (qui e nel seguito) *che la convergenza a zero è uniforme rispetto all'indice* n.

Allora la successione $\{ L_n \}$ *delle lunghezze delle curve* $y = y_n(x)$ *tende, per* $n \to \infty$, *verso la lunghezza* L_0 *della curva* $y = y_0(x)$.

Da ciò segue, per un noto teorema di L. TONELLI [2]):

(*) Pervenuta in redazione il 7 ottobre 1953.

[1]) E. BAIADA, *Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie*, Annali della S.N.S. di Pisa (3), 6, (1952), pp. 59-68; G. SCORZA-DRAGONI, *Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, XXII (1953), pp. 177-180.

[2]) L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Vol. I (Bologna, 1921), p. 92.

B$_1$) *Nelle ipotesi di* A) *la successione delle derivate* $\{y'_n(x)\}$ *converge in misura verso la derivata* $y'_0(x)$ *in* $a|\!-\!|b$, ed inoltre, per un teorema di T. RADÒ [3]):

B$_2$) *Nelle ipotesi di* A) *la successione* $\{y'_n(x)\}$ *converge in* $a|\!-\!|b$ *verso la* $y'_0(x)$ *in media di ordine* $1-\alpha$, *con* $\alpha > 0$ (*e minore di* 1) *arbitrario,*

ed infine, per un teorema di A. P. MORSE [4]):

B$_3$) *Nelle ipotesi di* A) *la successione* $\{y'_n(x)\}$ *converge verso* $y'_0(x)$ *quasi in media in* $a|\!-\!|b$.

In questa Nota ci proponiamo di rafforzare i tre enunciati B$_1$), B$_2$), B$_3$) col seguente:

B) *Nelle ipotesi di* A) *la* $y_0(x)$ *risulta assolutamente continua in* $a|\!-\!|b$ *e quindi* [5]) *la successione* $\{y'_n(x)\}$ *converge in media del* 1° *ordine verso la* $y'_0(x)$ [6]).

2. Sappiamo da A) che $\{L_n\}$ converge verso L_0; allora [7]) la successione $\{V_n\}$ delle variazioni in $a|\!-\!|b$ delle $y_n(x)$ converge verso la variazione V_0 in $a|\!-\!|b$ della $y_0(x)$. Di conseguenza la successione $\{V_n(\alpha, \beta)\}$ delle variazioni in $\alpha|\!-\!|\beta$ delle $y_n(x)$ converge verso la variazione $V_0(\alpha, \beta)$ in $\alpha|\!-\!|\beta$ della $y_0(x)$, qualunque sia l'intervallo $\alpha|\!-\!|\beta$ con $a \leq \alpha < \beta \leq b$ [8]).

---

[3]) T. RADÒ, *Length and area*, Am. Math. Coll. Publ., vol. XXX (New York, 1948), p. 245 (III.3.70; III.3.71).

[4]) A. P. MORSE, *Convergence in variation and related topics*, Trans. Am. Math. Soc., 41 (1937), pp. 48-83 (Teorema 5.6). Una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni sommabili su di un insieme E misurabile si dice che converge quasi in media (almost in the mean) verso una funzione $f_0(x)$, sommabile, se ad ogni numero $\varepsilon > 0$ corrisponde un sottinsieme E_ε di E tale che mis $(E - E_\varepsilon) < \varepsilon$ e $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{E_\varepsilon} |f_n(x) - f_0(x)|\, dx = 0$.

[5]) Ved. L. TONELLI, Op. cit., p. 186.

[6]) Nel seguito, parlando di convergenza in media, sottintenderemo sempre «del 1° ordine».

[7]) Ved. C. R. ADAMS-H. LEWY, *On convergence in length*, Duke Math. Journal, 1 (1935), pp. 19-26; p. 20.

[8]) Poichè $V_n(\alpha, \beta) = V_n(a, \beta) - V_n(a, \alpha)$ basterà provare che per $a < c < b$ è $\lim V_n(a, c) = V_0(a, c)$. Ora si ha $\underline{\lim}\, V_n(c, b) =$

In particolare, se poniamo, per $0 \leq h \leq b - a$:

$$\varphi_n(h) = V_n(a,\ a + h),\ \varphi_0(h) = V_0(a,\ a + h)\,,$$

la successione $\{\varphi_n(h)\}$ converge in $0 \vdash\!\dashv b - a$ verso la $\varphi_0(h)$. Anzi, poichè la $\varphi_0(h)$ è funzione continua di h (essendo la variazione della $y_0(x)$ che è continua) e poichè le $\varphi_n(h)$ sono non decrescenti, la convergenza della $\{\varphi_n(h)\}$ verso $\varphi_0(h)$ è uniforme in $0 \vdash\!\dashv b - a$ rispetto ad h [9]).

Dunque $\{\varphi_n(h)\}$ è una successione uniformemente convergente di funzioni (assolutamente) continue in $0 \vdash\!\dashv b - a$ e pertanto essa è costituita di funzioni ugualmente uniformemente continue. Vale a dire, fissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero $\delta > 0$ tale che per ogni coppia $h' < h''$ di punti di $0 \vdash\!\dashv b - a$ si abbia

$$0 \leq \varphi_n(h'') - \varphi_n(h') < \varepsilon$$

qualunque sia l'indice n.

In particolare, fissato $\varepsilon > 0$ come si è detto, potremo determinare un $\delta > 0$ in modo che se $0 \leq h \leq \delta$ sia

$$0 \leq \varphi_n(h) - \varphi_n(0) = \varphi_n(h) < \varepsilon$$

qualunque sia l'indice n.

Ma è

$$\varphi_n(h) = V_n(a,\ a + h) = \int_a^{a+h} |\, y'_n(x) \,|\, dx$$

e pertanto, usando il simbolo $\equiv 0$ introdotto in A), la rela-

---

$= \underline{\lim}\,(V_n - V_n(a,\ c)) \leq \lim V_n + \underline{\lim}(- V_n(a,\ c)) = V_0 - \overline{lim}\, V_n(a, c)$. Se non fosse vera la tesi avremmo $\overline{\lim}\, V_n(a,\ c) > V_0(a,\ c)$ (dovendo sempre aversi, come è noto, che $\underline{\lim}\, V_n(\alpha,\ \beta) \geq V_0(\alpha,\ \beta)$ qualunque sia l'intervallo $(\alpha,\ \beta)$) e quindi anche $\underline{\lim}\, V_n(c,\ b) < V_0 - V_0(a,\ c) =$ $= V_0(c,\ b)$, che è assurda, per quanto si è ricordato ora.

9) Cfr. ad es. H. BUCHANAN-T. H. HILDEBRANDT, *Note on the convergence of a sequence of functions of a certain type*, Ann. of Math., (2), 9 (1908), pp. 123-6.

zione precedente si può scrivere

$$\lim_{h \to 0+} \int_a^{a+h} | y'_n(x) | \, dx \equiv 0 . \tag{1}$$

Svolgendo gli stessi ragionamenti sulle $\psi_n(h) = V_n(b-h, b)$ e $\psi_0(h) = V_0(b-h, b)$ si conclude con la

$$\lim_{h \to 0+} \int_{b-h}^{b} | y'_n(x) | \, dx \equiv 0 . \tag{2}$$

Si noti infine che per la A) potremo scrivere la

$$\lim_{h \to 0+} \int_a^{b-h} | y'_n(x+h) - y'_n(x) | \, dx \equiv 0 . \tag{3}$$

Ciò premesso, definiamo su tutto l'asse reale le funzioni $\bar{y}'_n(x)$ ponendole uguali a zero fuori di $a|\!-\!|b$, uguali a $y'_n(x)$ dove queste esistono finite, ed ancora uguali a zero negli altri punti di $a|\!-\!|b$.

Avremo per $0 \leq h \leq b-a$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | \bar{y}'_n(x+h) - \bar{y}'_n(x) | \, dx = \int_{a-h}^{a} | y'_n(x+h) | \, dx +$$

$$+ \int_a^{b-h} | y'_n(x+h) - y'_n(x) | \, dx + \int_{b-h}^{b} | y'_n(x) | \, dx ,$$

e quindi per le (1), (2), (3):

$$\lim_{h \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} | \bar{y}'_n(x+h) - \bar{y}'_n(x) | \, dx \equiv 0 ,$$

da cui, anche, per λ reale, infinitesimo

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} | \bar{y}'_n(x+\lambda) - \bar{y}'_n(x) | \, dx \equiv 0 . \tag{B}$$

Inoltre, avendosi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\bar{y}'_n(x)\,|\,dx = \int_a^b |\,y'_n(x)\,|\,dx = V_n\,,$$

poichè, come si è osservato in principio $\{V_n\}$ converge (verso V_0), esisterà una costante $M > 0$ tale che sia

$$\text{(C)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\,\bar{y}'_n(x)\,|\,dx < M\,. \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

La (B) e la (C) assicurano [10]) l'esistenza [di una sottosuccessione $\{\bar{y}_\nu'(x)\}$ convergente in media in $(-\infty, +\infty)$, ossia l'esistenza] di una sottosuccessione $\{y_\nu'(x)\}$ convergente in media in $a|\!\!-\!\!|b$, verso una certa $\eta(x)$.

Avremo allora

$$\left|y_0(x) - y_0(a) - \int_a^x \eta(t)dt\right| = \left|y_0(x) - y_\nu(x) + y_\nu(a) - y_0(a) + \right.$$

$$\left. + \int_a^x y_\nu'(t)dt - \int_a^x \eta(t)dt\,\right| \leq$$

$$\leq 2 \max_{a|-|b} |\,y_\nu(x) - y_0(x)\,| + \int_a^b |\,y_\nu'(t) - \eta(t)\,|\,dt$$

e quindi

$$y_0(x) = y_0(a) + \int_a^x \eta(t)dt\,,$$

da cui l'assoluta continuità della $y_0(x)$ e quanto asserito in B).

Oss. — Come ha rilevato E. BAIADA [11]) le ipotesi di A) *non sono sufficienti* in generale ad assicurare anche la convergenza di $\{y'_n(x)\}$ quasi dappertutto in $a|\!\!-\!\!|b$.

---

10) M. RIESZ, *Sur les ensembles compacts de fonctions sommables*, Acta Szeged, t. VI (1932-4), pp. 136-142.

11) Loc. cit., p. 67.