RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA GHEZZO

Sulla dimensione della serie doppia di una data serie lineare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 398-406

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__398_0>

SULLA DIMENSIONE DELLA SERIE DOPPIA DI UNA DATA SERIE LINEARE

Nota (*) *di* SANTUZZA GHEZZO (*a Padova*)

1. - G. CASTELNUOVO ha determinato in una ricerca classica [1]), un minimo valore per la dimensione della serie k-pla minima d'una data serie lineare g_n^ρ semplice sopra una curva algebrica ed irriducibile. In particolare egli ha dimostrato che, per $k = 2$, siffatto minimo $\rho_2 = 3\rho - 1$ è raggiunto se (e solo se) la curva C^n d'ordine n di S_ρ, immagine proiettiva della data serie g_n^ρ, giace su di una superficie $F_2^{\rho-1}$ d'ordine $\rho - 1$ dello S_ρ stesso [2]): cioè su di una rigata razionale o su di una superficie di Veronese.

B. SEGRE ha d'altronde caratterizzate [3]), indipendentemente dalla suddetta questione, in campo analitico, le curve d'una quadrica dell'S_3, come quelle curve dotate di un sistema di ∞^3 coniche n-secanti $(n > 5)$; in altre parole ha dimostrato che: *la postulazione di una curva C^n di S_3 rispetto alle forme quadriche dell'S_3 stesso, ripete quella delle forme quadriche del piano rispetto al gruppo sezione piana.*

Vien fornita così, se si vuole, a complemento della ricerca di Castelnuovo, la possibilità di concludere che: *la serie lineare doppia di una g_n^3 semplice con $n > 5$, ha dimensione mi-*

(*) Pervenuta in Redazione il 13 luglio 1954.

1) G. CASTELNUOVO, *Memorie scelte* (Zanichelli, Bologna, 1937), II, 19a ediz., VIII, 95.

2) Cfr. loc. cit., in 1), p. 41 e p. 101 (nota a piè di pagina)

3) B. SEGRE, *Una proprietà caratteristica in grande delle curve giacenti su di una quadrica.* «Rend. Acc. Naz. Lincei» (12), *4*, 374-378. Per un'altra dimostrazione di questo teorema cfr. E. MARCHIONNA, *Sopra una proprietà caratteristica delle curve algebriche appartenenti ad una quadrica.* «Rend. Acc. Naz. Lincei», (16), *2*, 205-209.

nima 8 *quando i gruppi della serie iperpiana del modello proiettivo* C^n *di* S_3, *escluso al più un sottinsieme proprio della loro totalità, giacciono sopra coniche, altrimenti la dimensione è sempre* 9.

In questa Nota, mi propongo la questione per un qualsiasi valore della dimensione $\rho > 2$, sempre limitatamente alla serie doppia, della g_n^ρ, e farò vedere che: *condizione necessaria e sufficiente perchè la serie doppia di una data serie lineare semplice* g_n^ρ *con* $n > 2\rho - 1$ *abbia dimensione minima* $\rho_2 = 3\rho - 1$, *è che il modello proiettivo* C^n *di* S_ρ *abbia quasi tutte*[4]) *le sezioni iperpiane contenute in almeno una curva razionale normale dell'iperpiano segante.*

Risulterà inoltre che *questa condizione è anche sufficiente (ed ovviamente necessaria), perchè la* C^n *giaccia su di una* $F_2^{\rho-1}$ *dell'*S_ρ.

Infine sarà facile concludere che *condizione necessaria e sufficiente perchè la serie doppia di una data serie lineare semplice* g_n^ρ *abbia dimensione minima, è che la curva* C^n *immagine proiettiva in* S_ρ *della* g_n^ρ *ammetta* ∞^ρ *curve razionali normali* $\gamma^{\rho-1}$ *d'ordine* $\rho - 1$, *almeno* 2ρ*-secanti.*

Questi risultati vengono conseguiti per via puramente algebrica e, per $\rho = 3$, ripetono naturalmente, in campo algebrico, il teorema di B. Segre.

Osserviamo che la questione potrebbe esser studiata per i casi intermedî della dimensione della serie doppia, e per il caso della serie k-pla con $k > 2$; certamente in quest'ultimo caso si presenteranno necessarie ulteriori condizioni, in quanto già B. Segre ha dato esempi di C^{10} di S_3 non appartenenti a superficie cubiche e tuttavia intersecate in 10 punti da ∞^3 cubiche piane.

2. - Sia Γ^m una curva algebrica irriducibile d'ordine m, definita sul corpo complesso k, e sia g_n^ρ una serie lineare semplice e priva di punti fissi su di essa, completa od incompleta ed eventualmente dotata di gruppi neutri di specie qualsiasi.

---

[4]) Useremo questa terminologia volendo intendere « a meno di una sottovarietà algebrica propria».

È noto[5]) che quasi tutti i gruppi G_q di q punti di Γ^m impongono lo stesso numero di condizioni (precisamente q se $q \leq \rho$) ai gruppi della serie g_n^ρ che li contengono. Ciò può generalizzarsi nel seguente:

TEOREMA 1. - *I sottogruppi G_q dei gruppi G_n d'una serie lineare g_n^ρ hanno quasi tutti uguale postulazione rispetto ai gruppi della serie k-pla minima.*

Si rappresenti la g_n^ρ nella serie iperpiana $\bar{g}_n^\rho$ d'una curva C^n d'ordine n di S_ρ, questa C^n sarà un modello birazionale della Γ^m, e sopra di essa la serie lineare k-pla minima sarà segata (eventualmente in modo sovrabbondante) dalle forme Φ^k d'ordine k dello S_ρ [6]).

Il teorema enunciato equivale a dire che: *per quasi tutti i gruppi G_q di q punti della C^n, giacenti nello stesso iperpiano, passa un sistema lineare di forme Φ^k di egual dimensione δ.*

Per provare ciò osserviamo che: se è $q \leq \rho$ *il* G_q è sulla C^n un qualsiasi gruppo di q punti, e si può sempre sceglierne $q-1$ fra essi in modo che questi individuino uno S_{q-2} che non seghi ulteriormente la C^n [7]): dunque in tal caso non tutte le forme Φ^k passanti per quei $\rho-1$ punti contengono l'ulteriore punto P del gruppo G_q, poichè ciò non accade per le Φ^k spezzate in un'iperpiano per quello S_{q-2} ed una Φ^{k-1} non contenenti P. Dunque in tal caso il G_q offre esattamente q condizioni alle forme d'ordine k.

Se è $q > \rho$, osserviamo che per ogni gruppo G_q di un dato G_n passa un sistema di forme Φ^k, rappresentabile con i punti di uno spazio Λ dello $S_N\left[N = \binom{k+\rho}{\rho} - 1\right]$.

Così all'insieme dei sottogruppi G_q di G_n resta associato secondo una corrispondenza algebrica un insieme di spazi di S_N. Se $(u) = (u_0, u_1, ..., u_\rho)$ è l'iperpiano segante il G_n, questi spazi risultano coniugati uno dell'altro su $K(u)$, ed il loro in-

---

[5]) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica* (Zanichelli, Bologna, 1926), p. 64.

[6]) Cfr. [1]), p. 98 a piè di pagina.

[7]) Cfr. nota [5]).

sieme è dunque una varietà irriducibile su $K(u)$ [8]), cosicchè essi hanno in particolare tutti la medesima dimensione.

Ne discende che la dimensione di Λ può variare solo al variare di (u) e non del sottogruppo G_q nel G_n: d'altra parte quegli iperpiani (u) per i quali la dimensione di Λ si eleva formano notoriamente un insieme algebrico dello S_ρ che non può coincidere con lo S_ρ e dunque ha dimensione inferiore a ρ.

Pertanto i gruppi G_q impongono quasi tutti la stessa postulazione alle forme Φ^k di S_ρ.

3. - In generale, $q \leq n$ punti di un gruppo G_n della g_n^ρ impongono q condizioni alla serie k-pla, ma può accadere che solo $\varkappa < q$ fra queste condizioni siano indipendenti.

In tal caso dimostreremo che vale il seguente:

TEOREMA 2. - *Se quasi tutti i gruppi G_n della g_n^ρ hanno almeno un sottogruppo G_q che impone $\varkappa < q$ condizioni alla serie k-pla della g_n^ρ altrettante e non più ne impongono gli stessi gruppi G_n.*

In termini proiettivi sul modello C^n in S_ρ della g_n^ρ ciò equivale a dire che:

TEOREMA 2'. - *Se quasi tutte le sezioni iperpiane G_n di una curva algebrica C^n, irriducibile e d'ordine n, dello S_ρ, hanno q punti che presentano $\varkappa < q$ condizioni indipendenti alle forme Φ^k d'ordine k dell'iperpiano considerato, queste forme contengono di conseguenza l'intero gruppo G_n.*

Infatti abbiamo visto che la varietà dei G di C^n giacenti in un iperpiano ed aventi egual postulazione rispetto alle Φ^k ha dimensione ρ ed è irriducibile; nell'ipotesi ora posta, esistendo un insieme ∞^ρ di G_q aventi postulazione $\varkappa$, ogni sottogruppo G_q del gruppo G_n considerato (per il teor. 1) presenta postulazione $\varkappa$ rispetto alle forme Φ^k sopradette.

Sia ora α^* un iperpiano che sega C^n in un gruppo G_n^* di punti tutti distinti, esisterà qui un valore massimo $\delta > 1$

---

[8]) Cfr. VAN DER WAERDEN, *Algebraische Geometrie* (Springer, Berlin, 1937), Cap. IX.

in corrispondenza al quale almeno un sottogruppo G_δ^* di G_n^* fornisce postulazione regolare alle forme Φ^k di α^*; cioè se si indica con $k_{\rho-s}$ la dimensione di tutte le forme d'ordine k di α^*, per G_δ^* passerà esattamente un sistema $\Phi \infty^{k_{\rho-s}-\delta-1}$ di Φ^k di α^*.

Ma in questo caso ogni $G_{\delta+1}^*$ presenta postulazione irregolare alle Φ^k, quindi è contenuto nel gruppo base del sistema Φ: ciò accade di conseguenza per tutti i punti del gruppo G_n^*.

Segue in particolare, per $k = 1$, che se una curva C^n dello S_ρ è tale che ogni $S_{\varkappa-1}$ $\varkappa$ secante è di conseguenza q-secante con $q > \varkappa$, allora tutto il gruppo della sezione iperpiana giace in uno $S_{\varkappa-1}$ e dunque la C^n appartiene ad uno $S_\varkappa$ [9]); questo, in base al teor. 2, può presentarsi come un criterio per determinare la dimensione della serie g_n nota la postulazione dei gruppi $G_q (q \leq n)$ della Γ^m.

4. - Si supponga ora $n > 2\rho - 1$. Allora un G_n della g_n^ρ impone almeno $2\rho - 1$ condizioni indipendenti ai gruppi della serie doppia minima. Infatti in tal caso si possono scegliere in G_n due gruppi di $\rho - 1$ punti, siffatti che ciascuno di essi non imponga ulteriori condizioni alla g_n^ρ, e quindi, i gruppi G_{2n} della serie doppia che contengono quei $2(\rho - 1)$ punti non contengono necessariamente nessun altro punto del G_n. Questo impone dunque alla serie doppia minima almeno $2\rho - 1$ condizioni.

Consideriamo ora la serie resto della serie doppia rispetto ad un qualsiasi G_n della g_n, che (se g_n^ρ non è completa) può non coincidere con la g_n^ρ stessa, ma risultare una serie più ampia $g_n^{\rho_1}$ contenente la g_n^ρ, cioè può essere $\rho_1 \geq \rho$. La dimensione ρ_2 della serie doppia soddisfa di conseguenza alla disuguaglianza

$$\rho_2 - \rho \geq 2(\rho - 1) + 1$$

cioè

$$\rho_2 \geq 3\rho - 1 .$$

9) Cfr. E. BERTINI, *Introduzione alla Geom. Proiett. degli Iperspazi.* (Principato, Messina, 1923), p. 346.

Inoltre ρ_2 può effettivamente assumere tutti i valori compresi fra il suo massimo $\delta_\rho = \binom{\rho+2}{2} - 1$ ed il suo minimo $3\rho - 1$, presentandosi certo l'ultimo caso (n. 1) quando la C^n modello proiettivo della g_n^ρ giaccia su di una $F_2^{\rho-1}$, e quelli intermedi quando la C^n sia curva base di sistemi di quadriche di dimensioni minori.

5. - Sia C^n una curva algebrica irriducibile d'ordine n dello S_ρ e g_n^ρ la sua serie iperpiana. Supponiamo che ogni gruppo G_n della g_n^ρ imponga $x \leq n$ condizioni alle forme quadriche $\Phi^2_{\rho-1}$, di S_ρ; vogliamo dimostrare che: *i gruppi residui delle sezioni iperpiane, rispetto alla serie lineare doppia minima, impongono lo stesso numero x di condizioni alle $\Phi^2_{\rho-1}$, quando sia $x < 2\rho$.*

Rappresentiamo allo scopo le quadriche $\Phi^2_{\rho-1}$ di S_ρ con gli iperpiani d'uno spazio $S_{\delta_\rho} \left[\delta_\rho = \binom{\rho+2}{2} - 1\right]$; la C^n si trasforma quivi in una $\overline{C}^{2n}$ sulla quale gli iperpiani segano la serie lineare doppia minima della g_n^ρ, serie che indichiamo con $g_{2n}^{\rho_2}$, la cui dimensione, se per un suo gruppo passano ∞^y iperpiani, vale $\rho_2 = \delta_\rho - y$. La $\overline{C}^{2n}$ giace quindi in uno S_{ρ_2}.

Sia ora $\overline{g}_n^\rho$ l'immagine della g_n^ρ sulla $\overline{C}^{2n}$; un suo gruppo $\overline{G}_n$ impone x condizioni agli iperpiani di S_{δ_ρ} e perciò anche a quelli di S_{ρ_2}: quindi per esso passano $\infty^{\rho_2 - x}$ iperpiani di S_{ρ_2}, cioè il gruppo giace in uno spazio ad $x-1$ dimensioni; sia α questo S_{x-1}.

Gli iperpiani di S_{ρ_2} passanti per α, staccano residualmente sulla $\overline{C}^{2n}$ una serie $g_n^{\rho'}$ di dimensione $\rho' = \rho_2 - x \geq \rho$ (perchè la $g_n^{\rho'}$ contiene la g_n^ρ). Supponiamo che sia $\rho' > \rho$.

Consideriamo allora un gruppo $\overline{G}'_n$ della $g_n^{\rho'}$ appartenente alla $\overline{g}_n^\rho$ e sia β il suo spazio S_{x-1} di appartenenza. Fra i punti di $\overline{G}'_n$ scegliamone $q = \rho_2 - 2\rho < n$, e ciò è possibile se $q < \rho' = \rho_2 - x$ (in quanto $\rho' \leq n$) ossia se è $x < 2\rho$, ipotesi che d'ora in poi supporremo verificata.

Per i q punti fissati passano infiniti gruppi della $g_n^{\rho'}$ non appartenenti alla $\overline{g}_n^\rho$ ($\rho' > \rho_2 - 2\rho$, $\rho' > \rho$).

Sia G'_n uno di questi, esso giacerà in uno spazio γ a d dimensioni, e poichè la $g_{2n}^{\rho_2}$ è la serie doppia minima della g_n^ρ per γ dovranno passare almeno gli ∞^ρ iperpiani di S_{ρ_2} che segano residualmente la $\bar{g}_n^\rho$, perciò la dimensione d di γ soddisferà alla relazione:

$$d \leq \rho_2 - \rho - 1 .$$

Inoltre: o $q > x$ ed allora per il teor. 2 il G_q impone x condizioni agli iperpiani di S_{ρ_2} e quindi giace in uno S_{x-1} che sarà lo stesso β; oppure è $q < x$, ma in questo caso il G_q impone esattamente q condizioni agli iperpiani di S_{ρ_2}, altrimenti aggiungendo $x - q$ punti del $\bar{G}'_n$ si otterrebbe un G_x il quale imporrebbe $\varkappa < x$ condizioni alla serie doppia e ciò dovrebbe accadere anche per il $\bar{G}'_n$ (teor. 2) contro l'ipotesi. Dunque lo spazio γ o coincide con β e quindi $d = x - 1$ oppure ha in comune con β uno S_{q-1}. Ma β e γ giacciono in un iperpiano e perciò

$$x - 1 + d = q - 1 + \rho_2 - 1 \tag{1}$$

$$\rho_2 - 1 = x - q + d = (\rho_2 - \rho') - (\rho_2 - 2\rho) + d = 2\rho - \rho' + d$$

$$\rho_2 - 1 \leq 2\rho - \rho' + (\rho_2 - \rho - 1)$$

$$\rho - \rho' \geq 0$$

quindi risulterebbe $\rho' > \rho$ contro l'ipotesi. Ne segue $\rho' = \rho$; e la (1) dà per d il valore:

$$d = q - 1 + \rho_2 - 1 - x + 1 = \rho_2 - 2\rho - 1 + \rho_2 - x =$$
$$= 2(\rho' + x) - 2\rho - 1 - x = x - 1$$

come volevasi.

Dalla dimostrazione del teorema prec. risulta anche che, nelle ipotesi poste, la serie resto di un gruppo G_n della g_n^ρ rispetto alla serie lineare doppia minima è la g_n^ρ stessa e non una serie più ampia.

6. - Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA 3. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva C^n dello S_ρ ($\rho > 2$, $n > 2\rho - 1$) giaccia su di una super-*

ficie $F_2^{\rho-1}$ *d'ordine* $\rho - 1$ *dello* S_ρ, *è che quasi tutte le sezioni della* C^n *con gli iperpiani, appartengono ad una curva razionale normale dello* $S_{\rho-1}$.

La necessità della condizione è evidente; dimostriamone la sufficienza. Intanto, se esiste una curva $\gamma^{\rho-1}$ razionale normale in un'iperpiano τ che contenga il gruppo G_n sezione della C^n con τ, essa è unica poichè $n > 2\rho - 1$ e $\rho > 2$ [10]). Inoltre, in tal caso, il G_n impone alle forme quadriche $\Phi^2_{\rho-1}$ di S_ρ $2\rho - 1$ condizioni, quante cioè ne sono sufficienti perchè esse contengano la $\gamma^{\rho-}$: è dunque soddisfatta la condizione $x < 2\rho$ del n. 5; ne conseguente pertanto che una quadrica per un G_n sega ulteriormente la C^n in un gruppo D_n di n punti, il quale impone alle quadriche dell'S_ρ ancora esattamente $2\rho - 1$ condizioni. Questo gruppo D_n risulta dunque contenuto in un sistema $\infty^{\delta_\rho - 2\rho + 1}$ di quadriche, quindi giace in uno $S_{\rho-1}$, cioè è un gruppo della g_n^ρ. Dunque per il G_n e per il D_n passano in tutto $\infty^{\delta_\rho - 2\rho + 1 - \rho} = \infty^{\delta_\rho - 3\rho + 1}$ quadriche, e quindi per la C^n ne passa un sistema lineare Σ di dimensione D data da:

$$D = \delta_\rho - 3\rho = \binom{\rho + 2}{2} - 3\rho - 1 = \frac{(\rho + 2)(\rho + 1)}{2} - 3\rho - 1 =$$

$$= \frac{\rho(\rho - 3)}{2} = \binom{\rho - 1}{2} - 1 .$$

Il sistema Σ di quadriche ottenuto, deve avere una varietà base Δ contenente la C^n, sulla quale devono esser tracciate tutte le $\gamma^{\rho-1}$ contenenti i G_n, ed anzi gli iperpiani segheranno Σ in un sistema Σ^* della stessa dimensione di Σ, in quanto nessuna quadrica di Σ può essere spezzata in due iperpiani. Σ^* dovrà quindi avere come varietà base la sola $\gamma^{\rho-1}$ di quell'iperpiano (in quanto il sistema delle quadriche dello $S_{\rho-1}$, passanti per $\gamma^{\rho-1}$ ha appunto la dimensione D); la varietà Δ sarà dunque una superficie dello S_ρ a curve sezioni razionali normali, vale a dire una rigata razionale normale o, per $r = 5$, la superficie di Veronese.

---

10) Cfr. nota (9), pag. 346.

7. - Tenuto conto del teor. 3, si può dunque affermare che *condizione necessaria e sufficiente perchè la serie doppia di una data serie lineare semplice g_n^ρ abbia dimensione minima $\rho_2 = 3\rho - 1$ è che il modello proiettivo C^n in S_ρ abbia quasi ogni sezione iperpiana contenuta in (almeno) una curva razionale normale dell'iperpiano segante.*

Osserviamo ora che se $q = 2\rho$ punti di C^n giacciono su di una curva razionale normale $\gamma^{\rho-1}$ essi impongono alle quadriche dell'iperpiano α contenente $\gamma^{\rho-1}$, $\varkappa = 2\rho - 1$ condizioni; è dunque soddisfatta la condizione ($\varkappa < q$) del teor. 2 per cui si può affermare che l'intera sezione G_n di C^n con α giace su tutte le quadriche di α che contengono i fissati 2ρ punti. Ma il sistema di queste quadriche ha dimensione

$$H \geq \binom{\rho - 1 + 2}{2} - 1 - 2\rho + 1 = \frac{(\rho + 1)\rho}{2} - 2\rho =$$
$$= \frac{\rho^2 - 3\rho}{2} = \frac{\rho(\rho - 3)}{2}$$

cioè

$$H \geq D .$$

Si conclude dunque per il teor. 3 che tutto il gruppo G_n appartiene alla curva $\gamma^{\rho-1}$.

Siamo dunque in grado di affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie doppia di una data serie lineare semplice g_n^ρ ($\rho > 2$, $n > 2\rho - 1$) abbia dimensione minima, è che la curva C^n immagine in S_ρ della g_n^ρ ammetta ∞^ρ curve razionali normali $\gamma^{\rho-1}$ d'ordine $\rho - 1$ almeno 2ρ-secanti.