RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO BOMPIANI

Sul significato topologico di certe equazioni differenziali del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 352-356

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__352_0>

SUL SIGNIFICATO TOPOLOGICO DI CERTE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Nota (*) *di* ENRICO BOMPIANI (*a Roma*)

1. Oggetto della Nota.

In un gruppo di lavori pubblicati diversi anni or sono [1]) mi sono occupato dell'interpretazione proiettiva di equazioni differenziali del 2° ordine del tipo

1.1 $$v'' P_i(v') = P_{i+3}(v')$$

ove $P_i(v')$, $P_{i+3}(v')$ sono polinomi in v' (a coefficienti funzioni di u, v), nella derivata prima $v' = \frac{dv}{du}$, per $i = 0, 1, 2, 3$, interpretando u, v, come coordinate sopra una superficie di uno spazio proiettivo qualsiasi.

Recentemente (e senza alcun riferimento alle mie precedenti ricerche) si sono di nuovo imbattuti in equazioni differenziali del tipo 1.1, in ricerche di carattere metrico nell'ordinario

---

(*) Pervenuta in Redazione il 19 Giugno 1954.

1) E. BOMPIANI: *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà.* Rend. Acc. Lincei, s. 6, Vol. V, 1927, p. 383-389;

Interpretazione proiettiva di alcune equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine, Rend. Acc. Lincei, s. 6, Vol. XI, 1930, p. 33-40;

Significato proiettivo di alcuni tipi di equazioni differenziali del 2° ordine, Ann. di Matem. s. IV, t. VII, 1930, p. 273-300;

Sull'interpretazione proiettiva dell'equazione $v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3$, Boll. UMI, IX, 1930, p. 3-8.

spazio euclideo, D. B. DEKKER [2]) e A. CORIO [3]) e il primo di essi ha attribuito alle curve integrali di 1.1 il nome di *supergeodetiche.*

L'interesse del tipo di equazioni 1.1 sta nel fatto che comunque s'interpretino u, v come coordinate sopra un ente a due dimensioni il tipo stesso si conserva per trasformazioni regolari qualsiansi di variabili o, come dirò, ha carattere topologico. Ed ha perciò interesse ricercare, ed è ciò che mi ha indotto a ritornare sull'argomento, quale sia una *forma canonica* della 1.1 nell'intorno del 2° ordine di un punto dell'ente bidimensionale, e come si possa assegnare la costruzione degli ∞^1 elementi differenziali E_2 passanti per un punto e appartenenti alla 1.1 (cioè alle sue curve integrali per il punto).

Nel caso $i = 0$, cioè delle ordinarie geodetiche o linee autoparallele di una qualsiasi connessione lineare, la forma canonica, fino all'intorno del 2° ordine di $u = v = 0$ è $v'' = 0$, sicchè si possono pensare gli E_2 per un punto come quelli delle rette per esso di un piano proiettivo: ed è questa circostanza che pone in evidenza l'importanza di quelle linee.

Qui risolvo il problema per $i > 0$ qualsiasi.

2. Trasformazioni di coordinate.

Fissato un punto O dell'ente bidimensionale, che possiamo supporre individuato da $u = v = 0$, consideriamo le trasformazioni di coordinate che lasciano fisso il punto e le direzioni per esso (cioè la loro rappresentazione). Esse sono del tipo

$$2.1 \qquad \begin{aligned} u &= \alpha\bar{u} + R_2(\bar{u}, \bar{v}) + [3] \\ v &= \alpha\bar{v} + S_2(\bar{u}, \bar{v}) + [3] \end{aligned}, \qquad \alpha \neq 0$$

ove R_2, S_2 sono *forme* di 2° grado in $\bar{u}$, $\bar{v}$, e [3] indica termini d'ordine ≥ 3.

2) D. B. DEKKER: *Hypergeodesic curvature and torsion,* Bull. Am. Math. Soc. 55, 1949, 1151-1168;

Generalizations of hypergeodesics, Pacific J. Math., 1, 1951, p. 53-57.

3) A. CORIO: *Sopra una notevole famiglia di supergeodetiche,* Atti Acc. Torino, Vol. 87, 1952-53, p. 99-111.

Un elemento differenziale del 2° ordine E_2 per O

2.2 $$v = ku + \mu u^2 + [3]$$

si rappresenta nelle nuove coordinate con

2.3 $$\bar{v} = k\bar{u} + \bar{\mu}\bar{u}^2 + [3]$$

ove

2.4 $$\bar{\mu} = \frac{1}{\alpha}[kR_2(1,\ k) - S_2(1,\ k)] + \alpha\mu.$$

Scritte esplicitamente le forme

2.5 $$\begin{aligned} R_2(u,\ v) &= r_{20}u^2 + 2r_{11}uv + r_{02}v^2 \\ S_2(u,\ v) &= s_{20}u^2 + 2s_{11}uv + s_{02}v^2 \end{aligned}$$

si ha

2.6 $$kR_2(1,\ k) - S_2(1,\ k) = r_{02}k^3 + (2r_{11} - s_{02})k^2 + (r_{20} - 2s_{11})k - s_{20}.$$

3. Forma canonica dell'equazione differenziale in un punto.

Sia data l'equazione

3.1 $$P_s(v')v'' = P_{s+3}(v').$$

Gli E_2 appartenenti alle sue curve integrali e passanti per O sono caratterizzati da

3.2 $$\mu = \frac{1}{2}\frac{\overset{\circ}{P}_{s+3}(k)}{\overset{\circ}{P}_s(k)}$$

ove $\overset{\circ}{P}_{s+3}$, $\overset{\circ}{P}_s$ sono i valori di $P_{s+3}(v')$, $P_s(v')$ per $u = v = 0$, $v' = k$.

Nelle nuove coordinate $\bar{u}$, $\bar{v}$, si ha

3.3 $$\bar{\mu} = \frac{[kR_2(1,\ k) - S_2(1,\ k)]\overset{\circ}{P}_s(k) + \frac{\alpha^2}{2}\overset{\circ}{P}_{s+3}(k)}{\alpha\overset{\circ}{P}_s(k)}.$$

Possiamo sempre supporre il coefficiente di k^s in $P_s(k)$ uguale ad 1. Se si pone

3.4 $$\overset{\circ}{P}_{s+3}(k) = p_{s+3}k^{s+3} + p_{s+2}k^{s+2} + p_{s+1}k^{s+1} + p_sk^s + \ldots$$

ci si può giovare dell'arbitrarietà di R_2, S_2 per annullare i coefficienti dei termini con le quattro potenze più alte di k nella espressione di $\bar{\mu}$; e si ha

$$\begin{aligned} r_{02} &= -\frac{\alpha^2}{2} p_{s+3}\,, & 2r_{11} &= -\frac{\alpha^2}{4}(p_{s+2}+n)\,, & r_{20} &= -\frac{\alpha_2}{4}(p_{s+1}+m) \\ s_{20} &= \frac{\alpha^2}{2} p_s\,, & 2s_{11} &= \frac{\alpha^2}{4}(p_{s+1}-m)\,, & s_{02} &= \frac{\alpha^2}{4}(p_{s+2}-n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

ove m, n, rimangono arbitrarie.

Si può poi determinare α in modo che il coefficiente del termine in k^{s-1} nel numeratore di $\bar{\mu}$ sia uguale ad 1.

Supposto ciò fatto, cioè supposto che già le coordinate u, v soddisfino alle relazioni precedenti (ossia che per le u, v si abbia già $p_{s+3} = \dots = p_s = 0$) si ha in O

$$\mu = \frac{Q_{s-1}(k)}{Q_s(k)} \tag{3.6}$$

(con i coefficienti dei termini di grado più alto in Q_{s-1}, Q_s uguali ad 1) e tutte le trasformazioni di coordinate che non alterano questo tipo sono

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} - \bar{u}(m\bar{u} + n\bar{v}) + [3] \\ v &= \bar{v} - \bar{v}(m\bar{u} + n\bar{v}) + [3] \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} u &= \frac{\bar{u}}{1 + m\bar{u} + n\bar{v}} + [3] \\ v &= \frac{\bar{v}}{1 + m\bar{u} + n\bar{v}} + [3]\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ciò vuol dire che ottenuto un sistema (u, v) che dia luogo alla 3.6 ogni altro sistema che conservi tale forma si ottiene da esso, per quel che riguarda l'intorno del 2° ordine, mediante un cambiamento proiettivo di coordinate. Cioè:

Un'equazione differenziale del 2° ordine

$$P_s(v')v'' = P_{s+3}(v')\,, \qquad s > 0$$

ed un punto determinano fino all'intorno del 2° ordine del punto un sistema di coordinate proiettive per le quali gli elementi E_2 di curve integrali uscenti dal punto acquistano la forma $v = ku + \mu u^2 + \dots$ ove μ è dato dalla 3.6.

4. Modello proiettivo degli ∞^1 E_2 integrali di 1.1 per un punto.

In base al risultato ora conseguito ha senso interpretare in un *piano proiettivo* gli E_2 integrali di 1.1 per un punto. Indicando coordinate proiettive omogenee con x, y, z (corrispondente a coordinate non omogenee u, v) e preso il punto O come $x = y = 0$, $z = 1$, consideriamo il *fascio* di curve (al variare di k) d'ordine $s + 2$ definite da

$$z(y - kx)Q_s(x, y) = x^3 Q_{s-1}(x, y)$$

aventi O come punto s-plo con le tangenti principali definite da $Q_{s-1}(x, y) = 0$ in comune.

Per l'E_2 di una di esse tangente a $y = kx$ si ha

$$y = kx + \mu x^2 + [3]$$

con

$$\mu = \frac{Q_{s-1}(1, k)}{Q_s(1, k)}$$

cioè precisamente del tipo voluto. Le due curve che definiscono il fascio per $k = 0$, $k = \infty$ sono:

a) la curva che, oltre alle tangenti $Q_s(x, y) = 0$, ha in O la tangente $y = 0$ e che ha un flesso nel punto $(0, 1, 0)$ con tangente di flesso $z = 0$.

b) la curva spezzata in $Q_s(x, y) = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Il fascio è quindi pienamente caratterizzato e gli E_2 appartenenti alle sue curve per O con tangenti diverse da quelle fissate da $Q_s(x, y) = 0$ forniscono un *modello* proiettivo degli E_2 integrali di 1.1 per O.

Quando la tangente variabile viene a coincidere con una di quelle fisse la curva del fascio ha in O una cuspide (il che corrisponde a $y'' = \infty$).

Il risultato sta bene anche per $s = 0$, perchè in questo caso le curve del fascio si spezzano nelle rette per O e nella retta $z = 0$ (arbitraria).