GABRIELE DARBO

Convergenza in variazione in senso forte e derivazione per serie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 310-315

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__310_0>

CONVERGENZA IN VARIAZIONE IN SENSO FORTE E DERIVAZIONE PER SERIE

Nota (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Padova*)

Recentemente E. BAJADA [1]) ha dato un criterio di convergenza in lunghezza per una successione di funzioni assolutamente continue. R. CONTI [2]) ha poi fatto notare che dalle stesse ipotesi si poteva trarre la convergenza in media di ordine 1 della successione delle derivate.

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare, sotto ipotesi meno onerose di quelle di BAJADA, la convergenza, in variazione in senso forte, di una successione di funzioni a variazione limitata verso una funzione assolutamente continua. Tali ipotesi, risultando necessarie, non possono essere attenuate.

Com'è noto, una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni a variazione limitata in un intervallo $a \vdash\!\dashv b$ dicesi *convergente in variazione in senso forte* verso una funzione $f(x)$, pure a variazione limitata, se essa converge a $f(x)$ in ogni punto di $a \vdash\!\dashv b$ e se è

$$\lim_{n \to \infty} \overset{b}{\underset{a}{V}} [f_n(x) - f(x)] = 0 .$$

(*) Pervenuta in Redazione il 3 maggio 1954.

1) E. BAJADA, *Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie*, Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa, (3), 6, (1952), pp. 59-68. Per una dimostrazione più semplice, vedasi: G. SCORZA-DRAGONI, *Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, XXII (1953), pp. 177-180.

2) R. CONTI, *Sulla convergenza in media delle derivate di una successione di funzioni convergente in lunghezza*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, XXIII (1954), pp. 86-90.

La convergenza in variazione in senso forte, implica la convergenza in lunghezza [3]) ed anche, come si trae dalla disuguaglianza

$$\int_a^b | f'_n(x) - f'(x) | \, dx \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}[f_n(x) - f'(x)] ,$$

la convergenza in media di ordine 1 della successione delle derivate.

1. - Vogliamo dimostrare il seguente teorema

Sia $\{ f_n(x) \}$ *una successione di funzioni a variazione limitata, convergente in ogni punto di* $a \vdash\!\dashv b$. *Allora, perchè si abbia la convergenza in variazione in senso forte delle* $f_n(x)$ *verso una funzione assolutamente continua, è necessario e sufficiente che sia*

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ h \to 0+}} \overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f_n(x+h) - f_n(x)] = 0 . \tag{1}$$

Per quanto riguarda la necessità della condizione (1), si osservi che, posto

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) , \qquad a \leq x \leq b,$$

si ha

$$\begin{aligned} \overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f_n(x+h) - f_n(x)] &\leq \overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f_n(x+h) - f(x+h)] + \\ &+ \overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f(x+h) - f(x)] + \overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f(x) - f_n(x)] \leq \\ &\leq \overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f(x+h) - f(x)] + 2\overset{b}{\underset{a}{V}}[f_n(x) - f(x)] . \end{aligned}$$

E di qui la (1), perchè dalla assoluta continuità di $f(x)$ si trae

$$\lim_{h \to 0+} \overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f(x+h) - f(x)] = \lim_{h \to 0+} \int_a^{b-h} | f'(x+h) - f'(x) | \, dx = 0 , \text{ [4])}$$

---

[3]) Cfr. C. R. ADAMS - H. LEWY, *On convergence in length*, Duke Math. Journal, vol. 1, N. 1 (1935), pp. 19-26, pag. 26, Teorema 5.

[4]) Cfr. A. Zygmund, *Trigonometrical series*, (Warszawa - Lwow, 1935), pag. 17, n. 2.201.

mentre

$$\lim_{n\to\infty} \overset{b}{\underset{a}{V}}[f_n(x)-f(x)]=0$$

sempre per ipotesi.

La (1) è altresì sufficiente. Per dimostrarlo poniamo

$$(2)\qquad f_{n,\delta}(x)=\frac{1}{\delta}\int_0^\delta f_n(x+h)dh\,,\qquad a\leq x\leq b-\delta$$

con $0<\delta<b-a$. Chiamiamo inoltre $\sigma_n(\delta)$ l'estremo superiore di $\overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f_n(x+h)-f_n(x)]$ per $0\leq h\leq\delta$; dalla (1) segue allora

$$(3)\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0+}} \sigma_n(\delta)=0\,.$$

Se $D(x_0, x_1, ..., x_k)$ è una suddivisione di $a|\!-\!|(b-\delta)$ $(a=x_0<x_1<...<x_k=b-\delta)$, risulta

$$\sum_1^k{}_i\,|[f_{n,\delta}(x_i)-f_n(x_i)]-[f_{n,\delta}(x_{i-1})-f_n(x_{i-1})]|=$$

$$=\frac{1}{\delta}\sum_1^k{}_i\left|\int_0^\delta[f_n(x_i+h)-f_n(x_i)-f_n(x_{i-1}+h)+f_n(x_{i-1})]dh\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\delta}\int_0^\delta\sum_1^k{}_i\,|f_n(x_i+h)-f_n(x_i)-f_n(x_{i-1}+h)+f_n(x_{i-1})|\,dh\leq\sigma_n(\delta),$$

donde, per l'arbitrarietà della suddivisione D,

$$(4)\qquad \overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_{n,\delta}(x)-f_n(x)]\leq\sigma_n(\delta).$$

Per una coppia qualunque d'indici p e q si ha

$$\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_p(x)-f_q(x)]\leq\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_{p,\delta}(x)-f_p(x)]+\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_{p,\delta}(x)-f_{q,\delta}(x)]+$$
$$+\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_{q,\delta}(x)-f_q(x)],$$

e in virtù della (4)

$$\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_p(x)-f_q(x)]\leq\sigma_p(\delta)+\sigma_q(\delta)+\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_{p,\delta}(x)-f_{q,\delta}(x)].$$

Poichè

$$f_{p,\delta}(x) - f_{q,\delta}(x) = \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} \{f_p(t) - f_p(t)\}\, dt,$$

risulta ovviamente

$$\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_{p,\delta}(x) - f_{q,\delta}(x)] = \frac{1}{\delta}\int_a^{b-\delta} |f'_{p,\delta}(x) - f'_{q,\delta}(x)|\, dx =$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_a^{b-\delta} |f_p(x+\delta) - f_q(x+\delta) - f_p(x) + f_q(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \frac{2}{\delta}\int_a^b |f_p(x) - f_q(x)|\, dx,$$

epperò

$$\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_p(x) - f_q(x)] \leq \sigma_p(\delta) + \sigma_q(\delta) + \frac{2}{\delta}\int_a^b |f_p(x) - f_q(x)|\, dx. \tag{5}$$

Con ragionamento analogo, considerando al posto di $f_{n,\delta}(x)$ la funzione

$$f_{n,-\delta}(x) = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{0} f(x+h)dh, \quad a+\delta \leq x \leq b,$$

e tenendo presente la

$$\overset{b}{\underset{a+h}{V}}[f_n(x) - f_n(x-h)] = \overset{b-h}{\underset{a}{V}}[f_n(x+h) - f_n(x)]$$

si perviene alla

$$\overset{b}{\underset{a+\delta}{V}}[f_p(x) - f_q(x)] \leq \sigma_p(\delta) + \sigma_q(\delta) + \frac{2}{\delta}\int_a^b |f_p(x) - f_q(x)|\, dx. \tag{6}$$

Le (5) e (6), se è $\delta \leq \dfrac{b-a}{2}$, porgono

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[f_p(x) - f_q(x)] \leq 2\sigma_p(\delta) + 2\sigma_q(\delta) + \frac{4}{\delta}\int_a^b |f_p(x) - f_q(x)|\, dx. \tag{7}$$

Fissato ora il numero positivo ε, determiniamo l'intero m e un δ' positivo e non superiore a $(b-a)/2$, in modo che per $n \geq m$ si abbia

$$\sigma_n(\delta') < \frac{\varepsilon}{8}, \tag{8}$$

ciò che è possibile in virtù della (3). Suddividiamo l'integrale $a \vdash\!\dashv b$ in parti di ampiezza minore di $\delta'/8$, mediante certi punti fissi $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_s = b$; avremo

$$\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} |f_p(x) - f_q(x)|\, dx \leq \frac{\delta'}{8} \left\{ |f_p(\xi_i) - f_q(\xi_i)| + \overset{\xi_i}{\underset{\xi_{i-1}}{V}} [f_p(x) - f_q(x)] \right\},$$

$$(i = 1, 2, \dots, s),$$

da cui

$$\frac{4}{\delta'} \int_a^b |f_p(x) - f_q(x)|\, dx \leq \frac{1}{2} \sum_1^s{}_i |f_p(\xi_i) - f_q(\xi_i)| + \frac{1}{2} \overset{b}{\underset{a}{V}} [f_p(x) - f_q(x)]. \tag{9}$$

Dalla (7), per $\delta = \delta'$, e dalle (8) e (9), per $p \geq m$ e $q \geq m$ si ottiene

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} [f_p(x) - f_q(x)] \leq \varepsilon + \sum_1^s{}_i |f_p(\xi_i) - f_q(\xi_i)|,$$

cioè, attesa la convergenza [5]) delle $f_n(x)$,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} [f_p(x) - f_q(x)] < 2\varepsilon,$$

se p e q sono maggiori di un conveniente numero; da cui la convergenza in variazione in senso forte della successione.

Da ciò segue intanto che la $f(x)$ è a variazione limitata in $a \vdash\!\dashv b$.

2. - Rimane ancora da dimostrare l'assoluta continuità

---

[5]) Si noti che in questo ragionamento basta supporre le $f_n(x)$ convergenti in un inseme denso in $a \vdash\!\dashv b$, in cui si possono scegliere i punti ξ_i.

di $f(x)$. A tale scopo poniamo

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta f(x+h)dh = \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(t)dt, \quad a \leq x \leq b-\delta,$$

allora è, per la semicontinuità della variazione totale

$$\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_\delta(x) - f(x)] = \overset{b-\delta}{\underset{a}{V}} \lim_{n\to\infty} [f_{n,\delta}(x) - f_n(x)] \leq \lim_{n\to\infty} \overset{b-\delta}{\underset{a}{V}} [f_{n,\delta}(x) - f_n(x)].$$

Fissato quindi ε positivo, è possibile determinare, in virtù della (4), un δ positivo e non superiore a $(b-a)/2$, in modo che sia

$$\overset{b-\delta}{\underset{a}{V}}[f_\delta(x) - f(x)] < \varepsilon,$$

e quindi *a fortiori*,

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}[f_\delta(x) - f(x)] < \varepsilon$$

se c è il punto medio di $a \vdash\!\dashv b$.

Di qui e dalla disuguaglianza

$$\Sigma_i |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| \leq \Sigma_i |f_\delta(\alpha_i) - f_\delta(\beta_i)| + \overset{c}{\underset{a}{V}}[f_\delta(x) - f(x)],$$

valida per un qualunque sistema d'intervalli disgiunti $\{\alpha_i \frown \beta_i\}$ di $a \vdash\!\dashv c$, nonchè dall'assoluta continuità di $f_\delta(x)$, segue subito quella di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv c$.

Approssimando $f(x)$ mediante

$$f_{-\delta}(x) = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{0} f(x+h)dh = \frac{1}{\delta}\int_{x-\delta}^{x} f(t)dt, \quad a+\delta \leq x \leq b,$$

con ragionamento analogo si dimostra l'assoluta continuità di $f(x)$ in $c \vdash\!\dashv b$ e quindi in tutto $a \vdash\!\dashv b$.

OSSERVAZIONE. - Si noti che per $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f(x)$ il teorema dimostrato porge, in modo ovvio, una condizione necessaria e sufficiente per l'assoluta continuità di una funzione a variazione limitata in un certo intervallo.