Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Mario Volpato

Sopra un problema di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 224-244

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__224_0>

SOPRA UN PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda)$

Memoria (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

In una Nota precedente [1]) ho stabilito due criteri di esistenza per il problema

$$(1) \qquad \begin{cases} y''=f(x, y, y', \lambda) \\ y(x_1)=c_1, \ y(x_2)=c_2, \ y(x_3)=c_3, \end{cases}$$

nelle incognite λ (numero reale) ed $y(x)$.

Il metodo da me seguito nel citato lavoro non sembra adattabile allo studio del seguente problema generale

$$(2) \qquad \begin{cases} y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda) \\ y(x_1)=c_1, \ y(x_2)=c_2, \dots, y(x_n)=c_n, \ y(x_{n+1})=c_{n+1}. \end{cases}$$

Nella presente Memoria, con metodo completamente diverso, mi occupo del problema generale ora segnalato e stabilisco il seguente

TEOREMA DI ESISTENZA. - *Siano*: $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda)$ *una funzione reale delle variabili reali* $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda)$, *definita nello strato*

$$S: a \leq x \leq b\,; \ |y|, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty, \ \alpha < \lambda < \beta,$$

(*) Pervenuta in Redazione il 9 febbraio 1954.

1) M. VOLPATO, *Su un problema ai limiti relativo all'equazione* $y''=f(x, y, y', \lambda)$, « Giornale di Matematiche » di Battaglini, serie IV, vol. 79 (1949-50), pagg. 132-143.

ivi misurabile rispetto ad x e continua rispetto a $(y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$; $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$, $n+1$ *numeri reali qualsiasi;* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, *un gruppo* T_{n+1} *di* $n+1$ *punti qualsiasi dell'intervallo* (a, b) *e si consideri il problema indicato in* (2), *nelle incognite* λ *ed* $y(x)$. *Supponiamo che esistano due funzioni* $p(x, \lambda)$, $q(x, \lambda)$ *sommabili, rispetto ad* x, *in* (a, b) *continue e monotone, rispetto a* λ, *in* (α, β) *tali che risulti in* S

$$p(x, \lambda) \leq f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda) \leq q(x, \lambda), \tag{3}$$

e inoltre che, posto

$$\varphi_\nu(t/T_{n+1}) = (x_{n+1} - t)^{n-1} - \sum_{\nu+1}^{n}{}_j (x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i) \tag{4}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

ove [2])

$$(x_{n+1}x_jx_i) = \frac{x_{n+1} - x_i}{x_j - x_i},$$

$$\sum_{n}^{n}{}_j(x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i) = (x_n - t)^{n-1} \prod_{1}^{n-1}{}_i(x_{n+1}x_nx_i),$$

$$\sum_{n+1}^{n}{}_j(x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i) = 0,$$

esistano due numeri reali c, d, $(\alpha < c < d < \beta)$, *tali che risulti*

$$\frac{1}{(n-1)!}\sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})q(t, c)dt \leq c_{n+1} - \sum_{1}^{n}{}_j c_j \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i) \leq \tag{5}$$

$$\leq \frac{1}{(n-1)!}\sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})p(t, d)dt,$$

---

[2]) Senza bisogno di dichiararlo di volta in volta, d'ora in poi intenderemo che

$$(abc) = \frac{a - c}{b - c};$$

$$\sum_{n}^{n}{}_j\, a_j = a_n \quad ; \quad \sum_{n+1}^{n}{}_j\, a_j = 0.$$

oppure

$$(6)\qquad \frac{1}{(n-1)!}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\varphi_\nu(t/T_{n+1})q(t,\ d)\leq c_{n+1}-\sum_{1}^{n}{}_{j}\,c_j\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i)\leq$$

$$\leq\frac{1}{(n-1)!}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\varphi_\nu(t/T_{n+1})p(t,\ c)dt.$$

In tali condizioni il problema (2) *ammette almeno una soluzione* $[\lambda_0,\ y_0(x)]$, *con* $y_0(x)$ *assolutamente continua assieme alle sue prime* $n-1$ *derivate in* $(a,\ b)$.

Nel caso particolare del problema

$$(7)\qquad \begin{cases} y^{(n)}=\lambda\, g(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \\ y(x_1)=c_1,\ y(x_2)=c_2,\ \ldots,\ y(x_n)=c_n,\ y(x_{n+1})=c_{n+1}, \end{cases}$$

ove $g(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ *è una funzione reale delle variabili reali* $(x,\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)})$, *definita nello strato*

$$S' : a\leq x\leq b\ ;\ |\,y\,|,\ |\,y'\,|,\ \ldots,\ |\,y^{(n-1)}\,|<+\infty,$$

ivi misurabile rispetto ad x *e continua rispetto a* $(y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)})$ *e* λ *è un numero reale qualsiasi,* il teorema d'esistenza dianzi enunciato fornisce il seguente notevole risultato:

Il problema (7) *ammette almeno una soluzione* $[\lambda_0,\ y_0(x)]$, *con* $y_0(x)$ *assolutamente continua assieme alle sue prime* $(n-1)$ *derivate in* $(a,\ b)$, *ogniqualvolta esistono due funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$, $(\varphi(x)\leq\psi(x))$ *non negative e sommabili in* $(a,\ b)$ *tali che risulti*

$$(8)\qquad \varphi(x)\leq g(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})\leq\psi(x),$$

in tutto lo strato S' *e che vi sia almeno un intervallo* $(x_\nu,\ x_{\nu+1})$, $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n)$ *ove risulta*

$$(9)\qquad \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\varphi(x)dx>0\,.$$

Questo criterio estende ampiamente i risultati stabiliti da MAGENES [3]), STAMPACCHIA [4]) e CONTI [5]) per il problema (7) con n qualunque, e dà i criteri enunciati da A. TOSO [6]) e M. GIANUIZZI [7]), sempre per il problema (7) ma con referenza ai casi, rispettivamente, $n=3$ ed $n=4$.

Non mi risulta che, prima d'ora, sia stato studiato, nella sua generalità, il problema (2). Per il caso particolare di $n=1$ si vedano i lavori di CAFIERO [8]) e ZWIRNER [9]) e per $n=2$ il mio lavoro cit. in [1]). Come ho detto, il metodo che seguo ora è diverso da quello seguito in [1]) e sostanzialmente si basa su un ben noto procedimento funzionale indicato da CACCIOPPOLI [10]). Faccio presente, però, che il risultato enunciato viene

---

3) E. MAGENES, *Problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale* $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, «Ann. di Mat. pura ed applicata, serie IV, tomo XXVII, (1948), pagg. 39-74.

4) G. STAMPACCHIA, *Un'osservazione sui problemi di valori al contorno per l'equazione* $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, «Boll. Unione Mat. Ital.». Serie III - Anno IV (1949), pagg. 295-239.

5) R. CONTI, *I problemi ai limiti lineari per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie: teoremi di esistenza*, «Ann. di Mat. pura ed applicata», serie IV, tomo XXXV, (1953), pagg. 155-182, (pagg. 174-175).

6) A. TOSO, *A proposito di un problema al contorno per equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine*, «Rendic. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova», vol. XX, (1951), pagg. 299-306.

7) M. GIANUIZZI. *Un criterio di esistenza per un problema al contorno relativo all'equazione* $y^{(IV)} = \lambda f(x, y, y', y'', y''')$, «Annali dell'Univ. di Ferrara», (nuova serie), sezione VII, vol. II, (1953), pagg. 35-43.

8) F. CAFIERO, *Su un problema ai limiti relativo all'equazione* $y' = f(x, y, \lambda)$, «Giornale di Matematiche» di Battaglini, serie IV, vol. 77 (1947), pagg. 145-163; *Sui problemi ai limiti relativi ad un'equazione differenziale del primo ordine e dipendente da un parametro*, «Rendic. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova», vol. XVIII, (1949), pagine 239-257.

9) G. ZWIRNER, *Alcuni teoremi sulle equazioni differenziali dipendenti da un parametro*, «Annali Triestini», (serie IV, vol. II), vol. XVII, (1946-47), pagg. 1-32; *Criteri di esistenza per un problema al contorno relativo all'equazione* $y' = f(x, y, \lambda)$, «Rendic. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova», vol. XIX (1950), pagg. 141-158.

10) R. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sulla esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, «Rendic. Acc. Naz. Lin-

acquisito soprattutto in grazia di un lemma che assicura che le funzioni $\varphi_\nu(t/T_{n+1})$, indicate in (4), sono positive, rispettivamente, negli intervalli $(x_\nu, x_{\nu+1})$, $(\nu = 1, 2, ..., n)$; lemma che estende quelli dati da A. Toso $(n = 3)$ e da M. GIANUIZZI $(n = 4)$ nei lavori già citati.

§ 1. — Alcune proprietà riguardanti un gruppo di funzioni associate a un gruppo di punti distinti allineati.

1. - Sopra una retta r consideriamo un gruppo T_{n+1} di $n+1 (n \geq 2)$ punti distinti, e, fissato su r un sistema di coordinate cartesiane (ascisse), supponiamo che

$$x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1},$$

siano le ascisse dei punti di T_{n+1}.

Indicata con t l'ascissa del punto variabile su r, consideriamo, rispettivamente negli intervalli

$$x_\nu \leq t \leq x_{\nu+1} \quad , \quad (\nu = 1, 2, ..., n),$$

---

cei», (1930), serie 6ª, vol. 11, pagg. 171-180; cfr. anche M. VOLPATO, *Sugli elementi uniti di trasformazioni funzionali: un problema ai limiti per una classe di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*, «Annali dell'Univ. di Ferrara», (nuova serie), sezione VII, vol. II, (1953), pagg. 93-109. A proposito di questo mio lavoro, colgo l'occasione per rettificare una svista, inessenziale, in esso contenuta. A pag. 104 nella formula che maggiora l'espressione $| v^{(n,\mu)}(x_1, y_1) - v^{(n,\mu)}(x_2, y_2) |$, e così pure nella formula (21) di pag. 105, va aggiunto, nel secondo membro, l'addendo:

$$\left| \frac{\partial^{n+\mu}}{\partial x^n \partial y^\mu} G(x_1, y_1) - \frac{\partial^{n+\mu}}{\partial x^n \partial y^\mu} G(x_2, y_2) \right| .$$

Questo non impedisce di arrivare ugualmente alla (23). Infatti, osservato che nella definizione di $G(x, y)$, data a pag. 102, intervengono solo la funzione $v_*^{(0,0)}(x, y)$ con le sue derivate parziali, rispetto ad x fino all'ordine $n-1$ al più, rispetto ad y fino all'ordine $m-1$ al più, le quali, evidentemente, sono tutte funzioni equicontinue in R, segue che l'espressione omessa è uniformemente infinitesima con $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Tale infinitesimo, nella (23), può essere conglobato nell'espressione di $H_{n,\mu}(\delta)$.

le seguenti n funzioni [11])

$$(10)\qquad \varphi_\nu(t/T_{n+1}) = (x_{n+1} - t)^{n-1} - \sum_{\nu+1}^{n}{}_j\,(x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j}(x_{n+1}x_jx_i),$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n),$$

che chiameremo: *funzioni associate al gruppo* T_{n+1}.

Diremo anche che $\varphi_\nu(t/T_{n+1})$ *è la funzione associata al gruppo* T_{n+1} *e all'intervallo* $(x_\nu, x_{\nu+1})$.

Sia x_h uno qualsivoglia degli $n-1$ punti

$$(11)\qquad x_2\,,\ x_3\,,\ \dots,\ x_{n-1}\,;\ x_n\,,$$

e indichiamo con $T_{n+1} - x_h$ il gruppo di n punti che si ottiene da T_{n+1} sopprimendo ivi il punto x_h. Fra le funzioni associate al gruppo $T_{n+1} - x_h$, quella che è associata all'intervallo (x_{h-1}, x_{h+1}) è

$$(12)\qquad \varphi_{h-1}(t/T_{n+1} - x_h) = (x_{n+1} - t)^{n-2} -$$

$$- \sum_{h+1}^{n}{}_j\,(x_j - t)^{n-2} \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j,h}\,(x_{n+1}x_jx_i).$$

Ora, detto $x_{\nu+1}$ uno qualsiasi degli $n-1$ punti indicati in (11), mettiamo in evidenza una relazione che vincola la funzione $\varphi_\nu(t/T_{n+1})$, associata al gruppo T_{n+1} e all'intervallo $(x_\nu, x_{\nu+1})$, con la funzione $\varphi_\nu(t/T_{n+1} - x_{\nu+1})$ associata al gruppo $T_{n+1} - x_{\nu+1}$ e all'intervallo $(x_\nu, x_{\nu+2})$.

Precisamente dimostriamo che per qualsivoglia $t \neq x_{\nu+1}$ e per $s = 0, 1, 2, \dots, n-2$, sussiste la formula:

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1})}{(x_{\nu+1} - t)^{n-s-1}}\right] = (n-1)\frac{x_{n+1} - x_{\nu+1}}{(x_{\nu+1} - t)^{n-s}}\,[\varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1} - x_{\nu+1})],$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n-1),$$

ove

$$\varphi_\nu^{(p)}(t/T_{n+1}) = \frac{d^p}{dt^p}\varphi_\nu(t/T_{n+1}) \quad , \quad \varphi_\nu^{(0)}(t/T_{n+1}) = \varphi_\nu(t/T_{n+1}),$$

---

[11]) Si ricordi la convenzione precisata in nota [2]) a piè di pag. 225.

e

$$\varphi_\nu^{(p)}(t/T_{n+1}-x_{\nu+1})=\frac{d^p}{dt^p}\varphi_\nu(t/T_{n+1}-x_{\nu+1}) \quad , \quad \varphi_\nu^{(0)}(t/T_{n+1}-x_{\nu+1}) =$$
$$= \varphi_\nu(t/T_{n+1}-x_{\nu+1}).$$

Infatti osserviamo intanto che derivando, rispetto a t, s volte la (10) si ottiene

$$(14) \qquad \varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1}) = (-1)^s \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!}[(x_{n+1}-t)^{n-s-1} -$$
$$- \sum_{\nu+1}^{n}{}_j (x_j-t)^{n-s-1} \prod_1^n{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_j x_i)],$$

e che ponendo nella (12) $h=\nu+1$ e derivando, rispetto a t, s volte, si ha

$$(15) \qquad \varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1}-x_{\nu+1}) = (-1)^s \frac{(n-2)!}{(n-s-2)!}[(x_{n+1}-t)^{n-s-2} -$$
$$- \sum_{\nu+2}^{n}{}_j (x_j-t)^{n-s-2} \prod_1^n{}_{i\neq j,\nu+1} (x_{n+1}x_j x_i)].$$

Dalla (14) segue

$$\varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1}) = (-1)^s \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!}[(x_{n+1}-t)^{n-s-1} -$$
$$-(x_{\nu+1}-t)^{n-s-1}\prod_1^n{}_{i\neq\nu+1}(x_{n+1}x_{\nu+1}x_i) - \sum_{\nu+2}^{n}{}_j (x_j-t)^{n-s-1}\prod_1^n{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_j x_i)],$$

e quindi, essendo $t\neq x_{\nu+1}$,

$$(16) \qquad \frac{\varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1})}{(x_{\nu+1}-t)^{n-s-1}} = (-1)^s \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!}\left[\left(\frac{x_{n+1}-t}{x_{\nu+1}-t}\right)^{n-s-1} -\right.$$
$$\left.-\prod_1^n{}_{i\neq\nu+1}(x_{n+1}x_{\nu+1}x_i) - \sum_{\nu+2}^{n}{}_j\left(\frac{x_j-t}{x_{\nu+1}-t}\right)^{n-s-1}\prod_1^n{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_j x_i)\right].$$

Di qui, derivando rispetto a t, si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1})}{(x_{\nu+1}-t)^{n-s-1}}\right] = (-1)^s\frac{(n-1)!}{(n-s-2)!}\left[\left(\frac{x_{n+1}-t}{x_{\nu+1}-t}\right)^{n-s-2}\frac{x_{n+1}-x_{\nu+1}}{(x_{\nu+1}-t)^2} -\right.$$

$$-\sum_{\nu+2}^{n}{}_j\left(\frac{x_j-t}{x_{\nu+1}-t}\right)^{n-s-2}\frac{x_j-x_{\nu+1}}{(x_{\nu+1}-t)^2}\,\frac{x_{n+1}-x_{\nu+1}}{x_j-x_{\nu+1}}\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j,\nu+1}(x_{n+1}x_jx_i)\Bigg]=$$

$$=(n-1)\frac{x_{n+1}-x_{\nu+1}}{(x_{\nu+1}-t)^{n-s}}(-1)^s\frac{(n-2)!}{(n-s-2)!}\big[(x_{n+1}-t)^{n-s-2}-$$

$$-\sum_{\nu+2}^{n}{}_j(x_j-t)^{n-s-2}\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j,\nu+1}(x_{n+1}x_jx_i)\big].$$

Ora, ricordando la (15), segue subito la (13), che pertanto resta provata.

Un'altra relazione, che ci sarà utile, è la seguente

$$\text{(17)}\qquad \varphi_\nu(t/T_{n+1})=\varphi_{\nu+1}(t/T_{n+1})-(x_{\nu+1}-t)^{n-1}\prod_{1}^{n}{}_{i\neq\nu+1}(x_{n+1}x_{\nu+1}x_i),$$

$$(\nu=1,\ 2,\dots,\ n-1),$$

che si stabilisce immediatamente. Infatti si ha

$$\varphi_\nu(t/T_{n+1})=(x_{n+1}-t)^{n-1}-\sum_{\nu+2}^{n}{}_j(x_j-t)^{n-1}\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i)-$$

$$-(x_{\nu+1}-t)^{n-1}\prod_{1}^{n}{}_{i\neq\nu+1}(x_{n+1}x_{\nu+1}x_i).$$

E di qui, ricordando la definizione data in (10) delle funzioni $\varphi_\nu(t/T_{n+1})$, segue subito la (17).

E da ultimo, giustifichiamo la seguente altra relazione

$$\text{(18)}\qquad \varphi_\nu(x_\nu/T_{n+1})=(x_{n+1}-x_\nu)\varphi_{\nu-1}(x_\nu/T_{n+1}-x_\nu),$$

$$(\nu=2,\ 3,\dots,\ n).$$

Infatti, dalla (10) segue

$$\varphi_\nu(t/T_{n+1})=(x_{n+1}-t)\Big[(x_{n+1}-t)^{n-2}-$$

$$-\sum_{\nu+1}^{n}{}_j(x_j-t)^{n-2}\frac{x_j-t}{x_{n+1}-t}\,\frac{x_{n+1}-x_\nu}{x_j-x_\nu}\sum_{1}^{n}{}_{i\neq j,\nu}(x_{n+1}x_jx_i)\Big],$$

e quindi

$$\varphi_\nu(t/T_{n+1}) = (x_{n+1} - x_\nu)[(x_{n+1} - x_\nu)^{n-2} -$$

$$- \sum_{\nu+1}^{n}{}_j (x_j - x_\nu)^{n-2} \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j,\nu} (x_{n+1} x_j x_i)] .$$

Di qui, ricordando la (12), segue subito la (18).

2. - Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

LEMMA: *Le funzioni* $\varphi_\nu(t/T_{n+1})$, *indicate in* (10), *soddisfano le relazioni*:

(19) $\varphi_1^{(s)}(x_1/T_{n+1}) = 0$, $\left(s = 0, 1, \dots, n-2 ;\ \varphi_1^{(s)} = \dfrac{d^s}{dt^s}\varphi_1 ;\ \varphi_1^{(0)} = \varphi_1\right)$

(20) $\varphi_1(t/T_{n+1}) > 0$ per $x_1 < t \leq x_2$,

(21) $\varphi_n(x_{n+1}/T_{n+1}) = 0$, $\varphi_n(t/T_{n+1}) > 0$ per $x_n \leq t < x_{n+1}$,

(22) $\varphi_\nu(t/T_{n+1}) > 0$ per $x_\nu \leq t \leq x_{\nu+1}$, $(\nu = 2, 3, \dots, n-1)$.

Il lemma è quasi immediato quando si tratta di un gruppo T_{2+1} di 3 punti. Infatti se $x_1 < x_2 < x_3$ sono le ascisse dei tre punti del gruppo T_{2+1}, le funzioni associate al gruppo stesso si riducono a due, precisamente le seguenti

$$\varphi_1(t/T_{2+1}) = (x_3 - t) - (x_3 x_2 x_1)(x_2 - t) ,$$
$$\varphi_2(t/T_{2+1}) = (x_3 - t) ,$$

la seconda delle quali soddisfa, evidentemente, le (21).

Per quanto riguarda $\varphi_1(t/T_{2+1})$ si osservi che

$$\varphi_1(x_1/T_{2+1}) = (x_3 - x_1) - \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = 0 ,$$

e che

$$\varphi'_1(t/T_{2+1}) = -1 + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} > 0 .$$

Pertanto sono soddisfatte e la (19) e la (20).

Per quanto riguarda il caso generale, ragioniamo per induzione e proviamo che se le (19), (20), (21), (22) sono soddisfatte dalle funzioni associate ad un gruppo qualsiasi di n

punti distinti, quelle relazioni stesse sono verificate anche dalle funzioni associate ad un gruppo qualsiasi di $n+1$ punti. Tale procedimento ci permette allora di supporre che le funzioni associate ad uno qualsiasi degli $(n-1)$ gruppi $T_{n+1}-x_h$, $(h=2, 3, ..., n)$ di n punti, ottenuti dal gruppo T_{n+1} sopprimendo ivi x_h $(h=2, 3, ..., n)$, verificano le relazioni del tipo (19), (20), (21), (22). In particolare quindi, possiamo supporre verificate le seguenti relazioni:

$$(23)\quad \varphi_1^{(s)}(x_1/T_{n+1}-x_2)=0\ ,\ \left(s=0, 1,\dots, n-3\,;\, \varphi_1^{(s)}=\frac{d^s}{dt^s}\varphi_1\,;\, \varphi_1^{(0)}=\varphi_1\right),$$

$$(24)\quad \varphi_1(t/T_{n+1}-x_2)>0 \quad \text{per} \quad x_1<t\leq x_3,$$

$$(25)\quad \varphi_{n-1}(x_{n+1}/T_{n+1}-x_n)=0,\ \varphi_{n-1}(t/T_{n+1}-x_n)>0 \quad \text{per } x_{n-1}\leq t<x_{n+1},$$

$$(26)\quad \varphi_h(t/T_{n+1}-x_{h+1})>0 \quad \text{per} \quad x_h\leq t\leq x_{h+2}\ ,\ (h=2, 3,\dots, n-2),$$

e queste, come ora proveremo, ci permettono di giustificare le (19), (20), (21), (22) per le funzioni associate al gruppo T_{n+1}.

Poichè

$$\varphi_n(t/T_{n+1})=(x_{n+1}-t)^{n-1},$$

è evidente che le (21) sono senz'altro soddisfatte.

Giustifichiamo, per intanto, la (19). A tale scopo osserviamo che, calcolando la derivata che figura nel primo membro della (13), la (13) si può scrivere nel modo che segue:

$$(27)\quad (x_{\nu+1}-t)\varphi_\nu^{(s+1)}(t/T_{n+1})+(n-s-1)\varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1})=$$
$$=(n-1)(x_{n+1}-x_{\nu+1})\varphi_\nu^{(s)}(t/T_{n+1}-x_{\nu+1})\,.$$

Allora ponendo ivi $\nu=1$ e $t=x_1$ si ottiene,

$$(x_2-x_1)\varphi_1^{(s+1)}(x_1/T_{n+1})+(n-s-1)\varphi_1^{(s)}(x_1/T_{n+1})=$$
$$=(n-1)(x_{n+1}-x_2)\varphi_1^{(s)}(x_1/T_{n+1}-x_2)\,,$$
$$(s=0,\ 1,\ \dots,\ n-2)\,,$$

e quindi per la (23), che per ipotesi sussiste per $s=0, 1, \ldots, n-3$, segue

$$(28) \qquad (x_2-x_1)\varphi_1^{(s+1)}(x_1/T_{n+1})+(n-s-1)\varphi_1^{(s)}(x_1/T_{n+1})=0\,, \qquad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-3)\,,$$

Questa relazione permette di dire che se è

$$\varphi_1^{(s+1)}(x_1/T_{n+1})=0 \quad , \quad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-3)\,,$$

allora è pure

$$\varphi_1^{(s)}(x_1/T_{n+1})=0 \quad , \quad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-3)\,,$$

e quindi che sussiste la (19) non appena si dimostri che

$$(29) \qquad \varphi_1^{(n-2)}(x_1/T_{n+1})=0\,.$$

Ora, ponendo $s=n-2$, $\nu=1$ e $t=x_1$ nella (14), si ottiene

$$\varphi_1^{(n-2)}(x_1/T_{n+1})=(-1)^{n-2}(n-1)!\,[(x_{n+1}-x_1)-$$
$$-\sum_2^n{}_j(x_j-x_1)\prod_1^n{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i)]=$$
$$=(-1)^{n-2}(n-1)!\,(x_{n+1}-x_1)[1-\sum_2^n{}_j\prod_2^n{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i)]\,,$$

nella quale l'espressione

$$1-\sum_2^n{}_j\prod_2^n{}_{i\neq j}(x_{n+1}x_jx_i)\,,$$

è nulla, perchè il polinomio

$$(30) \qquad 1-\sum_2^n{}_j\prod_2^n{}_{i\neq j}(tx_jx_i)\,,$$

di grado $n-2$ al più, annullandosi negli $n-1$ punti distinti: $x_2, x_3, \ldots, x_n$, è identicamente nullo.

La (29), e quindi la (19), è provata.

Proviamo ora che la (22) è soddisfatta nell'estremo sinistro x_ν dell'intervallo, ossia che

$$(31) \qquad \varphi_\nu(x_\nu/T_{n+1})>0 \quad , \quad (\nu=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1)\,.$$

Infatti dalle (24), (25), (26) segue

$$\varphi_{\nu-1}(x_\nu/T_{n+1} - x_\nu) > 0 \quad , \quad (\nu = 2, \ldots, n),$$

e questa, con la relazione (18), porge subito la (31).

Proviamo ora che la (20) e (22) sono soddisfatte nei punti interni ai rispettivi intervalli, ossia che

$$(32) \quad \varphi_\nu(t/T_{n+1}) > 0 , \quad \text{per } x_\nu < t < x_{\nu+1} \quad , \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

A tale scopo osserviamo che ponendo $s = 0$ nella (13) si ottiene

$$(33) \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\varphi_\nu(t/T_{n+1})}{(x_{\nu+1} - t)^{n-1}}\right] = (n-1)\frac{x_{n+1} - x_{\nu+1}}{(x_{\nu+1} - t)^n}\,\varphi_\nu(t/T_{n+1} - x_{\nu+1}),$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

E poichè per le (24), (25), (26) risulta

$$\varphi_\nu(t/T_{n+1} - x_{\nu+1}) > 0 , \quad \text{per } x_\nu < t < x_{\nu+2} \quad , \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

segue che la funzione

$$(34) \qquad \frac{\varphi_\nu(t/T_{n+1})}{(\quad_{\nu+1} - t)^{n-1}} \quad , \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

è crescente in tutti i punti interni all'intervallo $(x_\nu , x_{\nu+1})$.

Ma per le (19) e (31), da noi già provate, la funzione (34) è non negativa nell'estremo sinistro x_ν. Allora, data la sua crescenza, essa è positiva nei punti interni all'intervallo $(x_\nu, x_{\nu+1})$. Ivi, però, è pure positivo il denominatore della (34). Pertanto rimane giustificata la (32).

Per completare la dimostrazione del lemma resta da provare che le (20) e (22) sono soddisfatte nell'estremo destro dei rispettivi intervalli, e cioè che

$$(35) \qquad \varphi_\nu(x_{\nu+1}/T_{n+1}) > 0 \quad , \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ci soccorre, in questo, la (17). Infatti la (17) permette di dire che se per $t = x_{\nu+1}$ è positiva la funzione $\varphi_{\nu+1}(t/T_{n+1})$, allora per $t = x_{\nu+1}$ è pure positiva la funzione $\varphi_\nu(t/T_{n+1})$.

Ma per quanto si è finora provato, risulta

$$\varphi_{\nu+1}(t/T_{n+1})>0\,, \quad \text{per} \quad x_{\nu+1}\leq t<x_{\nu+2}\quad , \quad (\nu=1,\ 2,\ \dots,\ n-1)\,.$$

E' quindi

$$\varphi_{\nu+1}(x_{\nu+1}/T_{n+1})>0 \quad , \quad (\nu=0,\ 1,\ \dots,\ n-1)\,,$$

e questa, con la (17) che sussiste per $\nu=1,\ 2,\ \dots,\ n-1$, porge subito la (35). Il nostro lemma è, pertanto, dimostrato.

§ 2. - Dimostrazione del teorema di esistenza per il problema (2).

3. - Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di esistenza, relativo al problema (2), enunciato nella prefazione.

Indichiamo con Σ lo spazio funzionale, la metrica essendo quella lagrangiana, di cui la *n-upla* $[z_0(x,\ \lambda),\ z_1(x,\ \lambda),\ \dots,\ z_{n-1}(x,\ \lambda)]$ di funzioni qualsiasi, continue nel rettangolo R : $a\leq x\leq b\,;\ c\leq y\leq d,$ è il punto variabile e, posto

$$F(t,\ \lambda)=f[t,\ z_0(t,\ \lambda),\ z_1(t,\ \lambda),\dots,\ z_{n-1}(t,\ \lambda),\ \lambda]\,,$$

consideriamo la trasformazione funzionale definita dalle relazioni

$$(36)\qquad v_s(x,\ \lambda)=\int_{x_1}^{x}\frac{(x-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)\,!}F(t,\ \lambda)\,dt+c_1\,[\prod_{2}^{n}{}_i(xx_1x_i)]^{(s)}+$$
$$+\sum_{2}^{n}{}_j[\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}[xx_jx_i)]^{(s)}\left[c_j-\int_{x_1}^{x_j}\frac{(x_j-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}F(t,\ \lambda)\,dt\right],$$
$$(s=0,\ 1,\ \dots,\ n-1)\,,$$

ove

$$[\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(xx_jx_i]^{(s)}=\frac{d^s}{dx^s}\,[\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(xx_jx_i)]\ ;\ [\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(xx_jx_i)]^{(0)}=\prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(xx_jx_i)\,,$$
$$(j=1,\ 2,\ \dots,\ n)\,.$$

La trasformazione (36) associa ad ogni fissato punto $[z_0(x,\ \lambda),\ z_1(x,\ \lambda),\ \dots,\ z_{n-1}(x,\ \lambda)]$ di Σ, uno ed un solo punto

$[v_0(x, \lambda), v_1(x, \lambda), ..., v_{n-1}(x, \lambda)]$ di Σ stesso. Poichè la funzione f per ipotesi è continua rispetto a tutti i suoi argomenti ad eccezione del primo, e dato che la (3) e la monotomia rispetto a λ di $p(x, \lambda)$ e $q(x, \lambda)$ permettono il passaggio al limite sotto il segno di integrale, è evidente che la trasformazione (36) è continua in Σ. Ancora la (3) e la succitata monotonia di $p(x, \lambda)$ e $q(x, \lambda)$ permettono di dire che le funzioni $v_s(x, \lambda)$, $(s = 0, 1, ..., n-1)$, sono equilimitate in R. Inoltre, qualunque sia λ, si vede subito che risulta

$$v_0(x_i, \lambda) = c_i \quad , \quad (i = 1, 2, ..., n) . \tag{37}$$

Pertanto la trasformazione (36) converte l'intero spazio Σ in una sua porzione limitata.

Fissato un numero intero e positivo r, eseguiamo ora una triangolazione T_r del rettangolo R nel modo che segue.

Dividiamo l'intervallo (a, b), dell'asse x, in 2^r parti uguali mediante i punti

$$\xi_1 = a < \xi_2 < ... < \xi_{2^r} < \xi_{2^r+1} = b , \tag{38}$$

e l'intervallo (c, d), dell'asse λ, pure in 2^r parti uguali mediante i punti

$$\eta_1 = c < \eta_2 < .. < \eta_{2^r} < \eta_{2^r+1} = d , \tag{39}$$

e conduciamo per i punti ξ_n ed η_m le parallele agli assi x e λ rispettivamente. Il rettangolo R resta così diviso in tanti rettangoli $R_{n,m}$. Suddividiamo poi ciascun rettangolo $R_{n,m}$ in due triangoli mediante una delle sue diagonali. La divisione di R, in triangoli, così ottenuta sia quella che abbiamo indicato con T_r.

Per cose note [12]), esistono allora, in Σ, due successioni

$$\{ Z_{0T_r}(x, \lambda), Z_{1T_r}(x, \lambda), ... , Z_{n-1T_r}(x, \lambda) \} , \tag{40}$$

$$\{ V_{0T_r}(x, \lambda), V_{1T_r}(x, \lambda), ... , Z_{n-1T_r}(x, \lambda) \} , \tag{41}$$

---

[12]) Vedi i lavori cit. in [10]). In quello citato per secondo, vedi le pagg. 96-98.

di punti, corrispondentisi nella trasformazione (36) e tali che, per qualsivoglia fissato r, ogni Z_{sT_r}, $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$, è lineare in ciascun triangolo di T_r e soddisfa l'uguaglianza

$$Z_{sT_r} = V_{sT_r} \quad , \quad (s = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{42}$$

in tutti i vertici dei triangoli di T_r.

Ebbene, dimostriamo che, per ogni fissato r, esiste un λ_r, $(c \leq \lambda_r \leq d)$, tale che nella n-upla

$$(V_{0T_r}(x, \lambda_r), \; V_{1T_r}(x, \lambda_r), \ldots, \; V_{n-1T_r}(x, \lambda_r)) \,, \tag{43}$$

subordinata dalla (41) per $\lambda = \lambda_r$, la funzione $V_{0T_r}(x, \lambda_r)$, della sola variabile x, soddisfa l'uguaglianza

$$V_{0T_r}(x_{n+1}, \lambda_r) = c_{n+1} \,. \tag{44}$$

A tale scopo osserviamo che

$$V_{0T_r}(x_{n+1}, \lambda) = \int_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t, \lambda)dt + c_1 \prod_{2}^{n}{}_i (x_{n+1}x_1x_i) + \tag{45}$$

$$+ \sum_{2}^{n}{}_j \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j} (x_{n+1}x_jx_i) \left[c_j - \int_{x_1}^{x_j} \frac{(x_j - t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t, \lambda)dt \right] =$$

$$= \int_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t, \lambda)dt - \sum_{2}^{n}{}_j \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j} (x_{n+1}x_jx_i) \int_{x_1}^{x_j} \frac{(x_j - t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t, \lambda)dt +$$

$$+ \sum_{1}^{n}{}_j \, c_j \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j} (x_{n+1} x_jx_i) \,.$$

Di qui, essendo

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t, \lambda)dt = \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{(x_{n+1} - t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t, \lambda)dt \,,$$

e

$$\sum_{2}^{n}{}_j \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j} (x_{n+1}\, x_j x_i) \int_{x_1}^{x_j} \frac{(x_j - t)^{n-1}}{(n-1)\,!} F(t,\ \lambda) dt =$$

$$= \prod_{1}^{n}{}_{i\neq 2} (x_{n+1}\, x_2 x_i) \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{n-1}}{(n-1)\,!} F(t,\ \lambda)\, dt + \dots +$$

$$+ \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j} (x_{n+1} x_j x_i) \left[\left(\int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_3} + \dots + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right) \frac{(x_j - t)^{n-1}}{(n-1)\,!} F(t,\ \lambda)\, dt \right] + \dots +$$

$$+ \prod_{1}^{n}{}_{i\neq n} (x_{n+1} x_n x_i) \left[\left(\int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_3} + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \right) \frac{(x_n - t)^{n-1}}{(n-1)\,!} F(t,\ \lambda)\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)\,!} \int_{x_1}^{x_2} \sum_{2}^{n}{}_j (x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j} (x_{n+1}\, x_j x_i) F(t,\ \lambda)\, dt + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)\,!} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \sum_{\nu+1}^{n}{}_j (x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j} (x_{n+1}\, x_j x_i) F(t,\ \lambda)\, dt + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)\,!} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x_n - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i\neq n} (x_{n+1}\, x_n x_i) F(t,\ \lambda)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)\,!} \sum_{1}^{n-1}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \sum_{\nu+1}^{n}{}_j (x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j} (x_{n+1}\, x_j x_i) F(t,\ \lambda) dt\ ,$$

segue

$$V_{0T_r}(x_{n+1}\, ,\ \lambda) = \frac{1}{(n-1)\,!} \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} [(x_{n+1} - t)^{n-1} -$$

$$- \sum_{\nu+1}^{n}{}_j (x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}\ (x_{n+1}\, x_j x_i)]\ F(t,\ \lambda)\, dt + \sum_{1}^{n}{}_j c_j \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j} (x_{n+1}\, x_j x_i)\, ,$$

e quindi, ricordata la definizione delle funzioni $\varphi_\nu(t/T_{n+1})$ data in (4) e in (10),

$$(45)^{\text{bis}} \qquad V_{0T_r}(x_{n+1}, \lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1}) F(t, \lambda)\, dt + $$

$$+ \sum_{1}^{n}{}_j\, c_j \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j} (x_{n+1}\, x_j x_i) \,.$$

E' questo il momento di applicare il lemma stabilito nel paragrafo precedente. In grazia del detto lemma ogni $\varphi_\nu(t/T_{n+1})$ è non negativa in $(x_\nu, x_{\nu+1})$, e allora, ricordando che per ipotesi sussistano la (3) e la (5), oppure la (6), segue che

$$(46) \qquad V_{0T_r}(x_{n+1}\ \ c) \leq c_{n+1} \leq V_{0T_r}(x_{n+1}, d),$$

oppure

$$(47) \qquad V_{0T_r}(x_{n+1}, d) \leq c_{n+1} \leq V_{0T_r}(x_{n+1}, c) \,.$$

In ogni caso, attesa la continuità di $V_{0T_r}(x_{n+1}, \lambda)$ in $(c \leq \lambda \leq d)$, esiste un λ_r [13]), $(c \leq \lambda_r \leq d)$, per cui è soddisfatta la (44). È evidente che, per ogni fissato r, esistono due punti η_{p_r}, η_{p_r+1} fra quelli indicati in (39), per cui risulta

$$(48) \qquad \eta_{p_r} \leq \lambda_r \leq \eta_{p_r+1} \,.$$

Ebbene, consideriamo allora le successioni

$$(49) \qquad \{ Z_{0T_r}(x, \eta_{p_r}), Z_{1T_r}(x, \eta_{p_r}), \dots, Z_{n-1T_r}(x, \eta_{p_r}) \},$$

$$(50) \qquad \{ V_{0T_r}(x, \eta_{p_r}), V_{1T_r}(x, \eta_{p_r}), \dots, V_{n-1T_r}(x, \eta_{p_r}) \},$$

$$(51) \qquad \{ V_{0T_r}(x, \lambda_r), V_{1T_r}(x, \lambda_r), \dots, V_{n-1T_r}(x, \lambda_r) \},$$

formate dalle funzioni della sola variabile x subordinate, per ogni fissato r, dalle funzioni delle successioni (40), e (41) sulle

---

13) Per es. si potrebbe considerare, per ogni fissato r, il primo λ_r che si incontra percorrendo nel verso da c a d l'intervallo (c, d) e per il quale è soddisfatta la (44).

sezioni del rettangolo R con le orizzontali $\lambda = \eta_{p_r}$, $\lambda = \lambda_r$. Evidentemente le funzioni delle successioni (50) e (51), la cui espressione è data dalle (36), sono equicontinue. Altrettanto può dirsi delle funzioni della successione (49) perchè queste, per ogni fissato r, sono lineari nei tratti di (a, b) individuati dai punti indicati in (38), e, in questi punti, coincidono con le corrispondenti funzioni, aventi indici uguali, della successione (50). Allora, osservato che $c \leq \eta_{p_r} \leq \lambda_r \leq d$, qualunque sia r, e che la differenza $\lambda_r - \eta_{p_r}$ è infinitesima al divergere di r, vi è la possibilità di estrarre dalle successioni (48), (49), (50), (51) delle sottosuccessioni, che per semplicità supponiamo che siano quelle stesse ora indicate, tali che si abbia

$$\{\eta_{p_r}\} \to \lambda_0 \quad , \quad \{\lambda_r\} \to \lambda_0,$$

e le (49), (50), (51) tendenti, uniformemente, a una stessa n-upla

$$[V_0(x, \lambda_0), V_1(x, \lambda_0), \dots, V_{n-1}(x, \lambda_0)].$$

Inoltre per le (37) e la (44) risulta

$$V_0(x_i, \lambda_0) = c_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n, n+1). \tag{52}$$

A questo punto osserviamo che, dal fatto che le n-uple delle successioni (40) e (41) si corrispondano nella trasformazione definita dalle (36), sussistono le relazioni:

$$\begin{aligned} V_{s,T_r}(x, \eta_{p_r}) = {} & \int_{x_1}^{x} \frac{(x-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} \Phi(t, \eta_{p_r})dt + c_1 [\prod_2^n{}_i(xx_1x_i)]^{(s)} + \\ & + \sum_2^n{}_j [\prod_1^n{}_{i \neq j}(xx_jx_i)]^{(s)} \left[c_j - \int_{x_1}^{x_j} \frac{(x_j-t)^{n-1}}{(n-1)!} \Phi(t, \eta_{p_r})dt \right], \end{aligned} \tag{53}$$

$$(s = 0, 1, \dots, n-1),$$

ove

$$\Phi(t, \eta_{p_r}) = f[t, Z_{0T_r}(t, \eta_{p_r}), Z_{1T_r}(t, \eta_{p_r}), \dots, Z_{n-1T_r}(t, \eta_{p_r}), \eta_{p_r}].$$

Inoltre osserviamo che, per un noto teorema di derivazione sotto il segno di integrale [14]), risulta

$$(54)\qquad V_{s,\,T_r}(x,\ \eta_{p_r}) = \frac{d^s}{dx^s} V_{0,\,T_r}(x,\ \eta_{p_r}),$$

e quindi

$$(55)\qquad V_s(x,\ \lambda_0) = \frac{d^s}{dx^s} V_0(x,\ \lambda_0)\ \ ,\quad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)\,.$$

Allora, basta passare al limite per $r \to \infty$ nelle (53), ricordare le (55) e le (52), per riconoscere che $[\lambda_0,\ V_0(x,\ \lambda_0)]$ è una soluzione del problema (2).

Il nostro teorema d'esistenza è così provato.

§ 3. - Dimostrazione del teorema di esistenza per il problema (7).

4. - Dimostriamo ora come il teorema di esistenza, relativo al problema (7), enunciato nella prefazione, si possa dedurre dal teorema di esistenza relativo al problema (2), già dimostrato nel precedente paragrafo.

Se si pone

$$(56)\qquad f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ \lambda) = \lambda\ g(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})\,,$$

$\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$, il problema (7) rientra come caso particolare, nel problema (2).

Se si assume

$$p(x,\ \lambda) = \begin{cases} \lambda\varphi(x) & \text{per}\quad \lambda \geq 0 \\ \lambda\psi(x) & \text{per}\quad \lambda \leq 0 \end{cases},\quad q(x,\ \lambda) = \begin{cases} \lambda\psi(x) & \text{per}\quad \lambda \geq 0 \\ \lambda\varphi(x) & \text{per}\quad \lambda \leq 0 \end{cases}$$

la (8) assicura che è soddisfatta la (3).

---

14) Cfr. M. VOLPATO, *Sulla derivazione sotto il segno di integrale*, «Rendic. Acc. Naz. Lincei», (1952), serie VIII, vol. XII, pagg. 146-150.

Inoltre la non negatività di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, la (9) e il lemma dimostrato nel paragrafo 1, assicurano che le espressioni

$$\frac{1}{(n-1)!}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})\varphi(t)\,dt,$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})\psi(t)\,dt,$$

sono positive [15]).

---

[15]) Segue di qui, e dalla (8), che l'espressione

$$(*) \qquad \frac{1}{(n-1)!}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})G(t)dt,$$

ove $G(t)=g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, è maggiore di una quantità positiva qualunque sia la n-upla $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di numeri reali. Ora l'espressione $(*)$, a meno di un fattore costante positivo, è lo sviluppo del determinante

$$(**) \quad \begin{vmatrix} (x_2-x_1) & \dfrac{(x_2-x_1)^2}{2!} \ldots & \dfrac{(x_2-t)^{n-1}}{(n-1)!} & \displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{(x_2-t)^{n-1}}{(n-1)!}G(t)\,dt \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ (x_j-x_1) & \dfrac{(x_j-x_1)^2}{2!} \ldots & \dfrac{(x_j-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} & \displaystyle\int_{x_1}^{x_j}\frac{(x_j-t)^{n-1}}{(n-1)!}G(t)\,dt \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ (x_{n+1}-x_1) & \dfrac{(x_{n+1}-x_1)^2}{2!} \ldots & \dfrac{(x_{n+1}-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} & \displaystyle\int_{x_1}^{x_{n+1}}\frac{(x_{n+1}-t)^{n-1}}{(n-1)!}G(t)dt \end{vmatrix}.$$

Ciò si vede sviluppando il determinante secondo gli elementi dell'ultima colonna, raccogliendo a fattor comune il complemento algebrico di $\displaystyle\int_{x_1}^{x_{n+1}}\frac{(x_{n+1}-t)^{n-1}}{(n-1)}G(t)dt$ ed operando, sull'espressione che figura come fattore del detto complemento algebrico, le decomposizioni da noi fatte per passare dalla (45) alla (45 bis). Il determinante $(**)$ è dunque maggiore di un numero positivo. In questo modo, nel caso delle condizioni ai limiti da noi considerate, si può giustificare l'affermazione, inerente

Allora se è

$$c_{n+1} - \sum_{1}^{n}{}_j\, c_j \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}\, x_j x_i) \geq 0\,, \tag{57}$$

esistono certamente due numeri c, d $(c < d)$ che soddisfano le relazioni

$$0 \leq c \leq \frac{c_{n+1} - \sum_{1}^{n}{}_j\, c_j \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}\, x_j x_i)}{\frac{1}{(n-1)\,!} \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})\psi(t)\, dt} \leq$$

$$\leq \frac{c_{n+1} - \sum_{1}^{n}{}_j\, c_j \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}\, x_j x_i)}{\frac{1}{(n-1)\,!} \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})\varphi(t)\, dt} \leq d\,,$$

e quindi si vede subito che è soddisfatta la (5).

Se invece l'espressione che figura nel primo membro di (57) è negativa, esistono due numeri c, d $(c < d)$ che soddisfano le relazioni

$$\frac{c_{n+1} - \sum_{1}^{n}{}_j\, c_j \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}\, x_j x_i)}{\frac{1}{(n-1)\,!} \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})\varphi(t)\, dt} \leq c < d \leq$$

$$\leq \frac{c_{n+1} - \sum_{1}^{n}{}_j\, c_j \prod_{1}^{n}{}_{i\neq j}(x_{n+1}\, x_j x_i)}{\frac{1}{(n-1)\,!} \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1})\psi(t)\, dt} < 0\,,$$

quindi è soddisfatta la (6), e con questa tutte le ipotesi del teorema relativo al problema (2). Pertanto il teorema enunciato nella prefazione, relativo al problema (7), è dimostrato.

---

la positività del detto determinante, fatta da CONTI a pag. 175 del lavoro cit. in [5]).