RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

Commemorazione di Gregorio Ricci-Curbastro nel primo centenario della nascita

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__1_0>

COMMEMORAZIONE DI GREGORIO RICCI-CURBASTRO NEL PRIMO CENTENARIO DELLA NASCITA (*)

di ANGELO TONOLO (*Padova*)

Chiamato all'alto onore di celebrare in quest'Aula, resa ancora più solenne dalla Vostra presenza, il primo centenario della nascita di GREGORIO RICCI-CURBASTRO, io mi sono proposto di passare in rassegna quanto vi è di più significativo nella Sua opera di Scienziato e di Maestro e di rievocare la Sua luminosa figura morale. Sono grato al Comitato promotore dell'occasione che ha offerto al devoto discepolo di assolvere un debito di riconoscenza verso il Suo grande Maestro che gli fu sempre largo di affettuosa benevolenza.

GREGORIO RICCI-CURBASTRO, nato a Lugo di Romagna il 12 Gennaio 1853, iniziò gli studi di matematica nella Università di Roma nel 1870; nel 1872 si iscrisse all'Università di Bologna e da qui passò all'Università di Pisa, attratto dalla fama di quella Scuola Normale Superiore, ove, in seguito a concorso, entrò come alunno esterno nel 1873 e vi ebbe, come Maestri più insigni, ULISSE DINI ed ENRICO BETTI. Nel 1875 si laureò con una dissertazione di carattere monografico: « Sulle ricerche di FUCHS relative alle equazioni differenziali lineari » e nell'anno successivo compose la Sua Tesi di Abilitazione: « Sopra

---

*) Questa Commemorazione differisce soltanto per alcune aggiunte, specialmente nella parte tecnica, da quella che è stata letta il 21 Settembre 1953 nell'Aula Magna dell'Università di Padova per la Celebrazione di GREGORIO RICCI-CURBASTRO, promossa da questa Università, nel centesimo anno della Sua nascita.

una generalizzazione del problema di RIEMANN relativo alle funzioni ipergeometriche ». Vincitore nel concorso per posti di perfezionamento all'estero nel 1877, seguì a Monaco i corsi del KLEIN e del BRILL; nell'anno successivo tornò a Pisa come Assistente del DINI e nel 1880 ottenne la Cattedra di Fisica matematica all'Università di Padova. In questa Università si è svolto tutto il Suo insegnamento che ha durato quarantacinque anni.

La prima ricerca (1) originale del RICCI, compiuta nel 1877, prende lo spunto da una Memoria (2) dello JÜRGENS sulle relazioni che passano fra gli integrali di due equazioni differenziali lineari di cui una è l'aggiunta lagrangiana dell'altra. RICCI, ponendosi da un punto di vista completamente diverso da quello dello JÜRGENS, ottiene rapidamente quelle relazioni, non che le altre che intercedono fra due sistemi fondamentali di integrali di una delle due equazioni, quando essi sono i corrispondenti, nel senso da Lui precisato, di altri due sistemi di soluzioni dell'altra equazione, pure fondamentali. A queste relazioni fanno seguito teoremi collegati con quelli dello JÜRGENS e del FROBENIUS (3) sulla teoria di FUCHS sui punti singolari delle equazioni differenziali lineari.

A questa Memoria segue un gruppo di Note (4) di carattere fisico matematico, le quali danno una chiara visione riassuntiva sul modo di agire delle forze ponderomotrici ed elettromotrici fra due conduttori filiformi, quale risulta, da un lato dalle leggi elementari di NEUMANN, WEBER, RIEMANN, CLAUSIUS, e dall'altro dalla teoria elettromagnetica di MAXWELL, collegandovi alcune osservazioni meccaniche del BETTI. Originale, per novità di investigazione, è la Nota (5) ove viene risolto, in certi casi, il problema della determinazione di una distribuzione di magneti permanenti equivalente ad un assegnato sistema di correnti galvaniche stazionarie e viceversa, adoperando soltanto una giudiziosa trasformazione di integrali. Con questa ricerca, che porta la data del 1882, si chiude il periodo iniziale dell'attività matematica del RICCI.

Come avvenne presso altri Scienziati di grandissima fama, anche per il RICCI, il primo esordio nell'agone scientifico non indicò un decisivo orientamento verso una determinata parte della matematica. Ma si comprende bene che un ingegno della Sua tempra, nutrito ormai di larga e ben assimilata cultura, dòveva sentire fortemente il bisogno di trovare una via che portasse alla visione di larghi orizzonti. Questa via si apre con le Memorie del 1884 e del 1886 sulle forme differenziali quadratiche e sugli invarianti e parametri differenziali. Christoffel, Lipschitz, Riemann, Voss, per indicare i più grandi, avevano portato cospicui contributi alla teoria delle forme quadratiche, ma i metodi escogitati per ottenerli sembravano al Ricci poco appropriati, perchè, o prendevano a norma quanto avveniva nel caso binario, oppure assumevano come guida analogie meccaniche, vedute queste che non avevano con le quistioni generali, nè connessione, nè erano atte ad aprire larghi campi di indagine, tanto più che il caso binario forma, sotto vari aspetti della teoria, un caso di eccezione. Nella prima ricerca (6) del Ricci, completata con una Nota lincea (7) del 1888, viene stabilita una teoria completa e razionale di tali forme, fondata su concetti e sviluppata con metodi puramente analitici, fra i quali concetti spicca quello di classe di una data forma. Sono assegnate le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una quadrica sia di una classe determinata, condizioni che, come è ben noto, assumono una forma espressiva per le quadriche di classe uno e, più ancora, per quelle di classe zero. Il problema della effettiva riducibilità delle quadriche di classe zero a forma canonica, viene da Lui risolto mediante un metodo ingegnoso, col quale la determinazione degli integrali del noto sistema ai differenziali totali di tipo misto, viene ricondotta alla ricerca di soluzioni particolari di successivi sistemi completi, in ciascuno dei quali figura sempre una sola funzione incognita, mentre il numero delle variabili indipendenti diminuisce di una unità.

Lo sviluppo della teoria degli invarianti delle forme algebriche, il diffondersi delle idee contenute nella memorabile Tesi di Abilitazione (8) di Riemann, avevano promosso, nella seconda metà del secolo passato, un imponente fiorire di studi sulla determinazione degli invarianti e dei parametri differenziali di una quadrica differenziale. Beltrami, in una classica

Memoria (9), aveva già dato una ingegnosa, ma indiretta trattazione generale dei parametri differenziali, ponendo a fondamento, per quelli del second'ordine, seguendo le vedute di JACOBI, la variazione prima di certi integrali. Ma il problema appartiene, per sua natura, alla teoria algebrica dell'eliminazione, come l'avevano visto, per gli invarianti differenziali, il CASORATI (10) per le forme binarie ed il CHRISTOFFEL (11) per le quadriche generali. Il RICCI, ispirandosi ai loro criteri, diede dapprima la costruzione degli invarianti del second'ordine per le quadriche di classe uno — quelle di classe zero, come è noto, non hanno invarianti differenziali —. Traendo profitto del fatto che i simboli di RIEMANN, per queste forme, si identificano con i minori del second'ordine di un determinante simmetrico, Egli prova che la forma quadratica, che ha per coefficienti gli elementi di questo determinante, è covariante alla data. Gli invarianti algebrici assoluti di queste due forme, sono allora gli invarianti differenziali del second'ordine della quadrica assegnata. Per ognuno di essi Egli dà anche il significato geometrico, facendo intervenire i raggi principali di curvatura dell'ipersuperficie che ha per quadrato dell'elemento lineare la data forma differenziale.

L'idea di ricondurre la determinazione degli invarianti differenziali delle quadriche nel suo campo naturale, cioè a quello algebrico, fu, con felicissima intuizione, trasportata dal RICCI alla costruzione dei parametri differenzali di quante si vogliano funzioni (12). Mi limito a segnalare il caso di una sola funzione; allora le forme associate alla quadrica hanno per coefficienti le derivate parziali del prim'ordine della funzione, quando si vogliono costruire i parametri differenziali del prim'ordine, oppure quelle espressioni che Egli più tardi (13) chiamerà derivate covarianti seconde, terze, ... m-esime della funzione rispetto alla quadrica, a seconda che si vogliano costruire i parametri differenziali del secondo, terzo ... m-esimo ordine della funzione.

La Memoria del BELTRAMI, ove è contenuta una larga e notevole estensione della teoria di LAMÉ dei parametri differenziali, è di altissimo valore scientifico, ma ciò che sorprende, è la via indiretta ivi seguita per dimostrare il carattere fondamentale d'invarianza dei parametri del second'ordine. Nella Memoria del RICCI si trova invece la visione unitaria della teoria dei parametri differenziali; il concetto direttore, il metodo adoperato per dimostrare la loro invarianza, Lo porteranno, non solo ad ottenere una catena di parametri, di cui il primo ed il più importante anello è dato dal classico $\Delta_2 U$, ma addirittura alla scoperta di quei metodi che costituiscono il Calcolo differenziale assoluto, come da Lui stesso viene esplicitamente affermato.

Di vigorosa costruzione è la Memoria (14) sui sistemi di integrali indipendenti di un'equazione lineare ed omogenea a derivate parziali del prim'ordine. Fissata una varietà riemanniana ad un numero qualunque di dimensioni ed una equazione del tipo sopradichiarato, si tratta di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè essa ammetta un sistema di integrali ortogonali fra loro due a due nella varietà e, verificate queste condizioni, precisare il grado di indeterminazione di tali integrali ed il modo col quale essi possono ottenersi. Il problema viene qui risolto in tutta la sua generalità, riconducendolo allo studio di certi sistemi differenziali completi e di una equazione algebrica che interviene in modo essenziale attraverso le sue radici (sempre reali) e le loro moltiplicità. Questa interessante generalizzazione dei noti sistemi n-upli ortogonali in uno spazio euclideo, condurrà più tardi il RICCI alla concezione di quei sistemi di congruenze di linee in una varietà riemanniana, che chiamerà i sistemi canonici rapporto ad una data congruenza. Le considerazioni che Egli fa all'inizio della ricerca, Lo portano ad associare alla forma quadratica, che dà il ds^2 della varietà, una forma differenziale lineare, e la via seguita per risolvere la quistione, nel caso che l'equazione algebrica sopramenzionata abbia tutte le radici distinte, Lo conduce alla determinazione di certi invarianti differenziali del prim'ordine del sistema formato dalle due forme, determinazione che Egli compie con il metodo usato nella precedente ricerca del 1886.

Viene esaminato a fondo un caso particolare di notevolissimo interesse, sia perchè nelle equazioni definitive figurano quelle derivate covarianti che il RICCI aveva già incontrato nello studio sui parametri differenziali, sia perchè vi si trovano le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una famiglia di ipersuperficie della varietà appartenga ad un sistema n-uplo ortogonale.

Nel caso delle varietà a tre dimensioni, il RICCI ottiene dei risultati che implicitamente contengono, come caso particolare, la ben nota equazione differenziale alla quale soddisfa il parametro d'una famiglia di LAMÉ, quando il quadrato dell'elemento lineare della varietà è euclideo e pitagorico, nella forma assegnatale da WEINGARTEN. Su questa equazione Egli ritorna con una Nota lincea (15) del 1894, a proposito di una pubblicazione del LILIENTHAL, scrivendola subito in coordinate generali, essendo Egli allora in possesso dei metodi del Suo Calcolo assoluto e quindi facendo uso di essi.

Alla quistione qui trattata, come è ben noto, aveva già risposto il DARBOUX, limitatamente però al caso che la varietà sia euclidea e le coordinate di riferimento siano cartesiane ortogonali (16).

Mi sono soffermato alquanto nell'esame di queste tre Memorie, perchè in esse, e specialmente nella seconda e nella terza, si trova il germe del Calcolo differenziale assoluto. Qui il RICCI incontra per la prima volta quelle espressioni, che poi chiamerà derivate covarianti d'una funzione rispetto ad una quadrica, e qui Egli riconosce tutto il vantaggio dell'uso sistematico di tale derivata nelle ricerche su sistemi di funzioni covarianti di fronte a qualsiasi trasformazione puntuale delle loro variabili, perchè essa conserva le caratteristiche della derivata ordinaria ed, applicata a quei sistemi, ne lascia immutato il loro carattere di covarianza. Che queste derivate abbiano fortemente richiamato l'attenzione del RICCI, risulta dalle Sue seguenti dichiarazioni (17): « Ad esse, forse meglio che ai parametri differenziali, si addice il considerarle, come disse di questi il LAMÉ, come qualche cosa « *plus essentielle, plus simple et en même temps plus complète que toutes les dérivées partielles* ». Egli osserverà più tardi (18): « L'algorithme du Calcul différentiel absolu, c'est à dire l'instrument matériel des méthodes, se trouve tout entier dans une remarque due à M.

Christoffel » cioè, nella derivata covariante. Spetta però soltanto al Ricci il merito di aver divinato la grandiosa portata di questa operazione differenziale, posta alla base di un Calcolo che porta il Suo nome. La Sua opera ha confermato quello che si verifica sempre nella Scienza, che cioè nessuna grande scoperta si deve ad un solo uomo; il genio più originale non costruisce mai ex nihilo, ma elabora e trasforma ciò che trova attorno a sè.

Come fanno tutti i grandi novatori, i quali, scoperto che abbiano un qualche cosa che armonizzi con il loro intelletto e che faccia loro sentire che con esso si può elaborare tutta una teoria, rapidamente la costruiscono, abbandonandosi per intero al loro estro creativo, senza bisogno delle altrui dottrine, così fece il Ricci. La tecnica del Calcolo assoluto, con le prime applicazioni, è tutta contenuta in pochi lavori che vanno dal 1888 al 1892 (19). Essa è stata poi da Lui stesso cimentata con ininterrotto successo alla risoluzione di svariati problemi, specialmente di Geometria differenizale. Nessuna variante sostanziale ha subìto dopo questa tecnica, la quale si presta in modo perfetto ad operare sistematicamente sopra le varietà riemanniane ad un numero qualunque di dimensioni con operazioni invarianti e covarianti rispetto alle trasformazioni che conservano l'elemento lineare della varietà. Essa viene adoperata tutte le volte che l'indole della ricerca porta a considerare una forma differenziale quadratica invariante per trasformazione delle sue variabili, come accade: in Meccanica analitica ove la quadrica interviene attraverso la forza viva, nella teoria della relatività ove la quadrica esprime il quadrato dell'intervallo elementare di due avvenimenti dello spazio-tempo, nella teoria dei corpi deformabili ove la quadrica è data dalla espressione del quadrato della distanza di due punti vicinissimi.

Nell'anno 1893 Ricci diede per la prima volta il nome di Calcolo differenziale assoluto al Suo algoritmo. In una ricerca (20), pubblicata appunto in quell'anno, si legge: « Per brevità designerò col nome di Calcolo differenziale assoluto l'insieme dei metodi da me detti altra volta di derivazione covariante e controvariante, in quanto essi sono applicabili per ogni forma fondamentale indipendentemente dalla scelta delle variabili indipendenti ed esigono anzi che queste siano affatto generali ed arbitrarie ».

Sono notissimi gli scopi che questo Calcolo si propone ed in che modo esso cerchi di raggiungerli. Considero però non privo di interesse sentirli esporre con le stesse parole usate dal RICCI. Egli dice (21): « Nelle questioni di Analisi, che per loro natura non sono collegate colla scelta delle variabili indipendenti, io mi valgo da molto tempo di uno strumento, che chiamo *Calcolo differenziale assoluto,* il quale conduce a formule ed equazioni, che si presentano sempre sotto la identica forma per qualunque sistema di variabili. Eliminati da tali questioni gli elementi ad esse estranei rappresentati dalle variabili indipendenti, quando queste non siano lasciate affatto arbitrarie, i metodi di ricerca assumono una notevole uniformità e spontaneità ed i risultati una simmetria tutta loro propria mentre, grazie anche ad un opportuno sistema di notazioni, la stessa generalità va a vantaggio, anzichè a scapito, della semplicità ed evidenza delle formule e della rapidità delle deduzioni. E ciò è naturale, dacchè, se le vie indirette e gli espedienti faticosamente pensati volta per volta fanno fede dell'acume di chi li additò, danno in pari tempo a vedere che la scienza non ha ancora trovato la via maestra, che conduce alla meta; la quale via, una volta scoperta, risulta sempre facile e piana ed apre alla vista nuovi e più larghi orizzonti ».

Le prime applicazioni che fece il RICCI dei Suoi metodi, si trovano esposte nelle Memorie (22) del 1888 e del 1892. Egli ottiene in poche righe le equazioni generali dell'elasticità, dovute al BELTRAMI (23), utilizzando il ben noto principio di Calcolo assoluto: per ottenere le equazioni di un problema in coordinate generali, quando se ne conoscono quelle in coordinate particolari, basta costruire un sistema di funzioni a carattere invariante o covariante che si identificano con i primi membri delle equazioni primitive, quando le variabili generali diventano le variabili particolari.

Le equazioni di compatibilità del SAINT-VENANT di un mezzo elastico, immerso in una varietà riemanniana qualunque a tre dimensioni sono ottenute in modo diretto, e sarebbero senz'altro le definitive, qualora il RICCI avesse subito osservato, cosa che fece l'anno successivo in una lettera al Collega Prof. PADOVA, che certe somme, formate con le derivate covarianti dei simboli di RIEMANN, sono nulle. Queste identità, usate dal BIANCHI nelle sue lezioni dal 1901, furono da lui pubblicate (24) nel 1902, non avendo preso visione di una breve postilla ad una Nota lincea del Prof. PADOVA (25), dove è ricordata l'osservazione del RICCI. Insomma, le *identità del* BIANCHI, erano state scoperte dodici anni prima dal RICCI, come è stato esplicitamente osservato dallo stesso RICCI (26) e ricordato anche dallo SCHOUTEN (27). Quindi sarebbe giusto almeno chiamarle: *identità di* RICCI-BIANCHI.

Segnaliamo ancora il metodo generale, esposto nella Memoria del 1892, per la costruzione di tutti i parametri differenziali di ordine qualesivoglia, comuni ad una forma quadratica differenziale e a quanti si vogliono sistemi di funzioni covarianti o contravarianti.

Successivamente il RICCI cercò di mostrare la fecondità dei Suoi metodi, trattando problemi attinenti alle varietà a due dimensioni (28). Le ricerche s'iniziano con lo studio delle congruenze di linee tracciate nella varietà; esso è condotto ponendo a base, nell'indirizzo del BELTRAMI, le loro equazioni differenziali, anzichè quelle in termini finiti. Vengono introdotti i relativi sistemi coordinati covarianti e contravarianti. I fasci di congruenze di linee, che già erano apparsi, senza darne rilievo, in ricerche di qualche geometra, figurano qui in modo sistematico con i loro sistemi covarianti e contravarianti. Concetti geometrici attinenti alle congruenze, o al fascio di congruenze, si presentano spontaneamente sotto aspetto analitico quali invarianti differenziali assoluti comuni alla forma che dà il ds^2 della varietà e alle forme covarianti della congruenza, o del fascio. Limitiamoci a segnalare: l'invariante, da Lui chiamato anisotermia del fascio, il cui annullarsi caratterizza i fasci formati da congruenze isoterme, la trattazione dei due problemi relativi alla applicabilità delle superficie (29), la determinazione di tutti i ds^2 spettanti a quadriche (30), oppure riducibili alla forma di LIOUVILLE (31). Con riferimento a questa poderosa Memoria, i ds^2 vengono classificati secondo il numero degli integrali quadratici distinti delle equazioni delle geodetiche della varietà. Tutti questi studi, ed altri ancora, sono contenuti nelle «Lezioni sulla teoria delle superficie» (32). In questo Volume, l'intera dottrina delle superficie dello spazio ordinario, fondata sulle forme quadratiche binarie classiche, è riattaccata ai metodi del Calcolo assoluto, che la distaccano notevolmente dalle trattazioni del BIANCHI e del DARBOUX. Malgrado la novità dei penetranti espedienti ed il loro abile maneggio per trattare le questioni ivi esaminate, le «Lezioni» del RICCI non ebbero il successo che ottennero le «Lezioni» degli altri due eminenti geometri. Varie cause hanno contribuito al mancato riconoscimento scientifico di queste «Lezioni»; fra queste, indubbiamente, i pochi esemplari e per di più soltanto litografati in una non nitida veste; ma la causa più decisiva fu che il RICCI saggiò il Suo algoritmo in un campo non addatto per farne apprezzare l'utilità, in quantochè, nella ordinaria teoria delle superficie, il Calcolo assoluto appare una complicazione di cose di per sè semplici. Esso manifesta invece tutta la sua agilità e potenza, quando il numero delle variabili indipendenti è lasciato arbitrario e quando intervengono circostanze, ove il carattere dell'indipendenza da ogni possibile riferimento è sostanziale ed indispensabile.

Un algoritmo di capitale importanza, che il RICCI chiamò *Geometria intrinseca,* seguendo con ciò una locuzione adoperata prima dal CESARO (33) e poi usata anche dal LEVI-CIVITA (34), è sviluppata nella Memoria fondamentale lincea del 1896 (35), ove si trova uno studio sistematico, semplice ed uniforme dei sistemi di congruenze di linee in una varietà riemanniana qualunque. Tale Geometria, legata ad una n-upla ortogonale di congruenze, generalizza notevolmente la teoria del triedro mobile del DARBOUX e viene eretta a vero strumento di calcolo dal RICCI. L'applicazione dei metodi del Calcolo assoluto è resa possibile da una forma speciale data alle equazioni differenziali delle congruenze, le quali figurano con i loro sistemi covarianti e contravarianti (parametri e momenti). Si perviene per la prima volta a quelli invarianti — le γ a tre indici —

che Egli chiamò, per un loro significato cinematico, coefficienti di rotazione della n-upla di congruenze e che sono tanto utili e vantaggiosi per rilevare i caratteri geometrici più salienti delle linee della congruenza. Si trova l'importante nozione di sistema ortogonale canonico ad una congruenza data. Questi concetti permettono al RICCI di dare luminosa forma geometrica alla trattazione analitica sviluppata nella ricerca sui sistemi n-upli ortogonali in una varietà riemanniana. Quel riferimento ad una n-upla ortogonale, che con linguaggio moderno si chiamerebbe anolonomo, viene applicato dal RICCI, sia allo studio delle n-uple di congruenze tracciate nella varietà, sia alla determinazione delle varietà nelle quali è possibile l'esistenza di congruenze dotate di proprietà prestabilite. I coefficienti di rotazione prendono qui il posto dei simboli di CHRISTOFFEL nel Calcolo assoluto. Si può infatti istituire con essi una operazione di derivazione, perfettamente analoga a quella di CHRISTOFFEL e costruire con essi e loro derivate rispetto agli archi delle linee della congruenza nuovi invarianti — le γ a quattro indici — intimamente legati ai simboli di RIEMANN. E come da questi simboli si deduce quel tensore contratto, che ha tanta parte nella teoria della relatività generale, così da quelli invarianti ne scendono altri — le γ a due indici — che hanno un ruolo essenziale nella teoria della curvatura delle varietà e che, nel caso tridimensionale, sono connessi con quel tensore doppio di RICCI che sostituisce con vantaggio, per tali varietà, quello quadruplo di RIEMANN.

Ogni gruppo di equazioni ricavato con i canoni del Calcolo assoluto, può essere trasformato facendo intervenire i concetti e i metodi della Geometria intrinseca. Succede, talvolta, che il complicato sistema di equazioni primitivo, che lasciava poca speranza di essere abbordato con risultati conclusivi, si trasformi in un sistema equivalente, la cui inattesa semplicità porta alla risoluzione definitiva della questione.

Una delle prime applicazioni di questi principi, si trova nella Memoria (36) sui gruppi continui di movimenti rigidi in una varietà riemanniana. Le ricerche qui sviluppate sono connesse con quelle del LIE (37), sul problema di RIEMANN-HELMOLTZ, ed a quelle del BIANCHI (38), sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Le equazioni di KILLING, che caratterizzano la rigidità di un moto infinitesimo in una varietà riemanniana, trasformate mediante i canoni della Geometria intrinseca, vengono associate a quelle che esprimono le condizioni di integrabilità dei sistemi di equazioni con le quali il problema viene tradotto in forma geometrica. Da qui il RICCI ricava dei notevoli teoremi generali. Uno studio completo dei gruppi continui di moti rigidi è fatto per le varietà a tre dimensioni, e la determinazione di quelle che ammettono un gruppo di tali movimenti, transitivi o non transitivi, viene conseguita mediante proprietà che si riferiscono soltanto alle congruenze ed alle curvature principali delle varietà stesse. I risultati ottenuti risolvono completamente, almeno per le varietà in discorso, una quistione che era stata messa a concorso, ad insaputa dal RICCI, dalla Società Jablonowski di Lipsia.

In questa ricerca figurano sistematicamente le congruenze e le curvature principali della varietà, concetti questi che possono considerarsi contenuti in lavori precedenti di CHRISTOFFEL (39), di LIPSCHITZ (40), di SOUVOROFF (41), di BEEZ (42), di SCHUR (43). I metodi del RICCI inquadrano però la quistione in una teoria generale, che consente di dare a questi concetti una forma semplice ed armonica (44). Sia segnalato l'elegante procedimento con il quale sono ottenute le congruenze e le curvature principali di una varietà, riducendo a forma canonica, mediante sostituzioni ortogonali, una quadrica i cui coefficienti — sono le γ a due indici — si calcolano partendo da una n-upla ortogonale di congruenze comunque scelta (45).

Come poter estendere a qualsiasi varietà riemanniana qualcuno dei risultati ottenuti nella precedente Memoria per le varietà a tre dimensioni? A questa domanda il RICCI risponde in modo esauriente, prendendo in esame quella classe di varietà che Egli chiama regolari; a questa classe appartengono le ipersuperficie e, più generalmente, quelle varietà nelle quali i simboli di RIEMANN si possono mettere sotto forma di minori del second'ordine di un determinante simmetrico di ordine eguale alle dimensioni della varietà (46).

Al problema dell'immersione, il Ricci ha dedicato due studi. Uno è contenuto nella Memoria lincea (47) del 1896, ed in esso Egli ottiene le formule fondamentali che reggono quel problema limitatamente al caso delle varietà riemanniane immerse in uno spazio euclideo con una dimensione di più; l'altro è contenuto in una Memoria (48) del 1902, ove viene trattato il caso generale di una varietà riemanniana immersa in un'altra varietà riemanniana. Il problema era già stato risolto dal Cesaro (49), nell'ipotesi che la varietà fosse dotata di sistemi n-upli ortogonali ed immersa in uno spazio euclideo ad $n + 1$ dimensioni. Senza supporre l'esistenza di quei sistemi e ponendosi da un punto di vista più generale relativamente allo spazio ambiente, il Voss (50), il Berzolari (51), ed il Bianchi (52), si erano occupati della teoria dell'immersione. Il Ricci trova però opportuno ritornare sul problema generale per presentare le formule finali sotto quella forma alla quale si perviene con l'uso dei Suoi metodi e che si presta molto bene a deduzioni geometriche relative a concetti di curvatura delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni.

Il problema proposto e risolto da Hadamard, di determinare le varietà riemanniane che contengono varietà geodetiche (53), viene magistralmente risolto dal Ricci mediante le formule ottenute nella precedente ricerca. Con esse, la quistione viene ricondotta a quella di determinare tutti i ds^2 delle varietà geodetiche per i quali un certo sistema di equazioni ai differenziali totali risulta integrabile. Per ogni ds^2 così determinato, l'integrazione del sistema darà tutte le varietà geodetiche immerse nella data e che hanno come quadrato del loro elemento lineare il fissato ds^2. La teoria delle congruenze e delle curvature principali quadra perfettamente per risolvere la quistione in modo completo ed espressivo (54). Limitiamoci a segnalare, che se una V_3 contiene delle famiglie di ∞^1 superficie geodetiche, le traiettorie ortogonali di una qualunque di queste famiglie costituiscono per la V_3 una congruenza principale. Questo bel risultato sarà poi esteso dal Ricci alle V_n che contengono delle famiglie di ∞^1 ipersuperficie geodetiche (55), ed applicato, più tardi, per risolvere una quistione sulla riducibilità delle quadriche differenziali specializzate e, in particolare, per caratterizzare i ds^2 della statica einsteiniana (56).

L'algoritmo del Calcolo assoluto, quello della Geometria intrinseca e molteplici applicazioni alla Geometria riemanniana, alla Meccanica ed alla Fisica matematica, sono esposti nella memorabile Monografia (57) « Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications » elaborata, su invito del KLEIN, dal RICCI e dal LEVI-CIVITA, per i « Mathematische Annalen ». La lettura di essa avrebbe dovuto indurre i matematici di quell'epoca a meditare sulla potenza dei nuovi algoritmi di ricerca. Ma, purtroppo, per molti anni, questi metodi furono utilizzati, quasi esclusivamente, dal RICCI, dal LEVI-CIVITA e da pochi loro scolari. L'apparenza un po' macchinosa, il formalismo con il quale il RICCI aveva presentato i Suoi metodi, la circostanza che essi, per quanto utili, non erano indispensabili nel trattare varie quistioni di matematica, il fatto che essi « rappresentano un poderoso sforzo di elaborazione preparatoria, sforzo che in parte apparisce già conducente ad una meta onorevole, in parte aspetta la sua giustificazione finale da ulteriori cimenti » — sono parole del BELTRAMI (58) — distolsero i cultori di Geometria differenziale dal Calcolo di RICCI. Va osservato ancora, e la storia della Scienza ce l'insegna, come sia ben raro il caso che il « nuovo » subito trionfi. L'umanità pensante è fortemente ancorata alle proprie tradizioni, alle passate convinzioni che le impediscono celermente di superarsi. Indubbiamente, al tardivo ingresso nella matematica del Calcolo assoluto, ha contribuito il temperamento stesso del RICCI, temperamento riservato, raccolto ed alieno da tutte le forme intensive di comunicazione scientifica. Ma il Suo convincimento di avere dotato la nostra Scienza di un fecondo campo di dottrine, non vacillò mai, ed Egli continuò, quasi solitario, a mostrare la potenza dei Suoi metodi affrontando e risolvendo svariate quistioni, specialmente nel campo delle varietà riemanniane.

Il grande cimento desiderato dal BELTRAMI, ebbe luogo nel 1915, quando ALBERT EINSTEIN mostrò che il Calcolo assoluto forniva il mezzo tecnico indispensabile per tradurre in forma sintetica e suggestiva le nuove vedute della filosofia naturale imposte dalle concezioni relativistiche. Nella Nota (59) « Zur allgemeinen Relativitätstheorie » egli giunse infatti a scrivere le celebri equazioni gravitazionali con l'uso sistematico dei metodi elaborati dal RICCI. La loro scoperta fu enunciata dall'EINSTEIN con le parole: « Sie bedeutet einen vahren Triumph der durch GAUSS, RIEMANN, CHRISTOFFEL, RICCI begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls ».

Dal 1915 in Italia e fuori s'iniziò un'amplissima produzione di Calcolo assoluto, dedicata dapprima a complementi, riesposizioni, semplificazioni formali, poi, sopratutto per opera del LEVI-CIVITA, ad applicazioni ed estensioni di enorme portata. Da allora il nome di RICCI percorre il mondo scientifico assieme a quello di EINSTEIN e la Relatività fu anche per Lui « giusta di glorie dispensiera ».

Con il 1905 si chiude il secondo ed il più brillante periodo dell'attività matematica del RICCI. Di minore portata speculativa, ma sempre di cospicuo interesse, sono i lavori del Suo ultimo periodo di meditazione scientifica. Per quelli inerenti alla Geometria differenziale, Egli trova più conveniente definire la metrica delle varietà ad n dimensioni, non più col quadrato del loro elemento lineare, ma mediante n pfaffiani indipendenti. Limitiamoci a segnalare le Note sulle varietà a tre dimensioni che godono di proprietà intrinseche assegnate a priori. Una di queste ricerche contiene la determinazione delle varietà nelle quali è possibile tracciare una terna di congruenze a coefficienti di rotazione costanti (60); in un'altra si costruiscono i ds^2 per i quali la terna principale è costituita da congruenze geodetiche (61); in una terza si determinano le varietà ove esistono terne di congruenze normali e isotrope (62) — sono solo e soltanto quelle rappresentabili conformemente sullo spazio euclideo —. Sono problemi ben definiti, di enunciato semplice, ma la loro impostazione, con i mezzi ordinari, darebbe luogo ad equazioni di sconcertante complesssità.

Le ricerche relative alle quadriche differenziali si riferiscono alla loro riducibilità (63), problema intimamente connesso con quello della determinazione dei loro invarianti differenziali. Per le quadriche ternarie, l'ottenimento di un sistema completo di invarianti differenziali del second'ordine, è subito conseguito mediante le curvature principali della varietà il cui ds^2 si identifica con la forma data. Per le quadriche generali, la stessa quistione viene risolta ricorrendo ad una teoria generale esposta dal RICCI in una Memoria (64) sulla determinazione di un sistema completo di invarianti differenziali di ordine qualunque comuni a più forme. Nel caso degli invarianti del second'ordine, le forme sono: quella quadratica assegnata e la quadrilineare di RIEMANN.

Mediante applicazione di un criterio generale per riconoscere quando una quadrica differenziale è algebricamente o assolutamente riducibile *), viene risolta la quistione di caratterizzare intrinsecamente le forme quadratiche di n variabili che si possono trasformare nella somma di una quadrica nella quale figurano soltanto i differenziali di $n-1$ variabili e di un termine quadratico nel differenziale della n variabile y. Il caso che il coefficiente di tale termine quadratico non contenga la y, trova subito applicazione alla caratterizzazione intrinseca dei ds^2 della statica einsteiniana.

Nel 1917 l'estensione fatta dal LEVI-CIVITA della nozione di parallelismo dal piano euclideo alle varietà riemanniane (65), ha portato nella Geometria differenziale un soffio di aria nuova. Rilevato con essa il significato geometrico della derivata covariante, il Calcolo assoluto si trasformò da algoritmo formalistico in una teoria nitidamente geometrica. La portata di quella nozione, non si limitava però solo alla geometrizzazione del Calcolo di RICCI. La possibilità di analizzare le proprietà di curvatura di una qualsiasi varietà riemanniana, considerandola come formata da elementi spaziali

*) Secondo RICCI, una quadrica differenziale ad n variabili è *algebricamente riducibile* se, mediante una trasformazione puntuale, può ridursi a contenere soltanto i differenziali di $n-1$ variabili: è *assolutamente riducibile* se, inoltre, nei coefficienti della forma ridotta figurano soltanto queste variabili.

euclidei, raccordati per mezzo di una legge di trasporto per parallelismo e le esigenze imposte dalla relatività generale di geometrizzare ad un tempo fenomeni gravitazionali e fenomeni elettromagnetici, hanno dato origine a tutte quelle estensioni del concetto di varietà, rispetto alla concezione riemanniana, di grandiosa ampiezza e portata che hanno arricchito la nostra Scienza. Sorgono così: la Geometria dei cammini, la Geometria degli spazi a connessione affine, proiettiva e conforme, alle quali la veduta gruppale del KLEIN offre un quadro sintetico mirabilmente suggestivo. A loro volta questi spazi, avendo maggiore capacità di rappresentazione fisica, si sono prestati alla costruzione di quelle teorie unitarie del campo, di cui una, elaborata recentemente dall'EINSTEIN, costituisce il coronamento delle meditazioni di questo grande Scienziato sulla costruzione matematica dell'Universo (66). Geometri di tutti i paesi hanno dato all'Analisi tensoriale, cioè alla Geometria differenziale, contributi così vari e così vasti che ora una sintesi ne è ben ardua. RICCI stesso resterebbe certamente stupito, nel contemplare quest'opera maestosa, di cui Egli ha posto le basi, e alla quale Voi, eminenti geometri, avete portato contributi poderosi.

Permettete ora, Signori, che il devoto discepolo chiuda il suo discorso col lumeggiare l'attività didattica del Maestro e col rievocare « la cara e buona immagine paterna ».

L'anno 1880 segnò la data dell'arrivo del RICCI alla Cattedra universitaria, come titolare di Fisica matematica alla Università di Padova; col volgere degli anni insegnò anche l'Algebra complementare, l'Analisi infinitesimale e la Geometria superiore. I Corsi di Fisica matematica, ove venivano svolti argomenti della teoria del potenziale, dell'elasticità, della elettricità, del magnetismo, erano il frutto di un intenso lavoro di preparazione, spinto fino ai più minuti particolari. Liberati da ogni incertezza, erano contenuti in cartelle manoscritte che Egli passava agli allievi del Corso. Le quistioni erano sempre viste nella massima generalità, affrontate per la via logicamente più diretta, svolte col massimo rigore e lucida penetrazione. Di cospicuo interesse è quello sulla teoria dell'elasticità, esposto con i metodi del Calcolo assoluto e che era Sua intenzione dare alle stampe, se la morte non L'avesse colto ancora nel pieno vigore del Suo intelletto. Queste mirabili lezioni sono conosciute da poche persone. Nella Edizione che si sta preparando delle Opere di Lui, esse saranno integralmente riprodotte. La stessa cura Egli poneva nei Corsi di Geometria superiore, ove, dopo le necessarie premesse di Calcolo assoluto, venivano svolti argomenti di Geometria differenziale metrica delle superficie e delle varietà.

Nel 1890 il RICCI assunse la Cattedra di Algebra complementare. Per la tendenza fortemente logica del Suo ingegno, che trovò piena corrispondenza alla Scuola del rigore inaugurata a Pisa dal DINI, costruì il Suo Corso di Algebra ponendo a base una dettagliata esposizione della teoria dei numeri reali fondata sulle ripartizioni di DEDEKIND, teoria a cui Egli aveva già dedicato una estesa Monografia (67). Alle lezioni tradizionali di Algebra, hanno fatto seguito, per ragioni del Suo insegnamento, quelle sopra alcune nozioni fondamentali del Calcolo infinitesimale. Queste lezioni subirono, di anno in anno, profondi rimaneggiamenti i quali ben rivelano la passione del Maestro che, nel suo magistero, dedica una cura quotidiana per raggiungere quella perfezione didattica concettuale e formale che egli anela di raggiungere. Alla teoria generale dei limiti, viene premessa quella delle successioni intese in senso lato, equivalente a quello di catena nella moderna teoria dei reticoli, concetto che il RICCI andò mano a mano elaborando e col quale, non solo porrà le basi dell'Algebra complementare, ma anche quelle del Calcolo differenziale e integrale. Ne deriva che tutte le nozioni, alla base dell'Analisi, sono raccolte intorno ad un unico concetto, che è quello generalizzato di successione. Queste vedute originali sono sistematicamente esposte nel volume: Lezioni di Analisi algebrica e infinitesimale (68).

Le lezioni del RICCI non avevano una brillante esteriorità oratoria, conforme in ciò al Suo temperamento riservato e raccolto; erano però un modello di precisione, mai ripetizioni di parole, di concetti, mai esitazioni. Chi le seguiva, era stimolato alla meditazione per la vastità e profondità del pensiero. Raccogliendole, nulla si sarebbe trovato da aggiungere, nulla da togliere.

Alta e diritta era la Sua figura, signorile l'aspetto che ben rivelava la nobiltà della stirpe; la severità del volto, illuminato dagli occhi intelligenti e dolci, era mitigata talvolta da un affabile sorriso. La persona sempre composta in un pensoso raccoglimento, il gesto sobrio, la parola meditata e calma, Gli conferivano una personalità staccata e assente. Ma chi per consuetudine di amichevoli rapporti avesse scrutato oltre quel velo di fredda impassibilità, avrebbe trovato una viva, umana sensibilità, una finezza di sentimenti, un culto tenerissimo degli affetti familiari, un'affettuosa amicizia. Uomo di altissima rettitudine, di profonda dignità personale, ebbe una calma esistenza, rettilinea, senza inflessioni e senza compromessi, libera da ogni vanità, solo nutrita di quanto vi è nella vita di alto, di bello, di buono. Lo vediamo anche partecipare attivamente alla vita sociale e ricoprire cariche amministrative in qualità di Consigliere comunale e provinciale di Lugo e di Padova, non accettando mai la carica di Sindaco che parecchie volte Gli fu offerta a Padova, perchè non voleva essere troppo assorbito da un lavoro che Lo avrebbe allontanato dalla Scienza e dalla Scuola. Un vigile senso di misura aveva Egli nel giudicare uomini e cose, la rigidezza della Sua dirittura morale essendo temperata da una larga tolleranza per chi, con la stessa saldezza delle proprie convinzioni e nobiltà di cuore, battesse una strada diversa dalla Sua. Anche negli accesi dibattiti politici con i più accanniti avversari, conservava calma e serena la parola, la quale, ispirata sempre ad adamantina lealtà, correggeva, consigliava, ammoniva. Non ebbe quindi nemici, ne mai suscitò intorno a sè risentimento o rancore.

Aveva un senso realistico delle cose che Gli permetteva di vedere lucidamente anche nel più pratico dei problemi. Siano menzionate le relazioni, una: « Sulle condizioni idrauliche della campagna a destra di Reno-Primaro e sui procedimenti atti a migliorarle », che Egli fece al Consiglio provinciale di Lugo, l'altra: « Sulla proposta di condurre a Lugo le acque delle Vallette », fatta al Consiglio Comunale della stessa città, per la costruzione dell'acquedotto. La prima di queste relazioni servì poi di base fondamentale ai lavori di bonifica effettuati nella Bassa pianura ravennate.

In armonia perfetta vivevano in Lui la Scienza e la Fede; nell'uomo di pensiero che percorse per mezzo secolo le vie del Sapere, i principi cristiani erano assunti come guida e come conforto nella vita ed apertamente praticati in grande umiltà e profondo raccoglimento. Da ogni Suo atto, limpidamente traspariva come unica norma l'ossequio incondizionato al dovere, che Egli sentiva sacro, e che fu sempre adempiuto, finchè il male non Lo collocò in un letto e la morte non accorse a liberarne lo spirito per innalzarlo verso Colui nel quale tanto ferventemente credeva.

Egli amava la Sua terra — la Romagna — ove passò la fanciullezza fra gli agi della casa signorile e dove Lo attendeva il sepolcro fra i ricordi e gli affetti familiari. Ma Egli amava anche l'Università di Padova e volle che nella Sua tomba fosse inciso il numero degli anni del Suo insegnamento. Ad essa donò il Suo studio, perchè fosse ricordato l'ambiente dove Egli meditò e sviluppò il Suo pensiero.

Nelle Scienze matematiche, come in tutte le Scienze, l'attività è sempre incessante e non c'è mai un momento di arresto. Molti sono i pensatori che si dedicano al loro sviluppo, ma soltanto a pochi esse sono debitrici dei loro progressi più salienti e più rapidi. L'influenza di questi pochi non è limitata solo al loro periodo di soggiorno sulla terra, ma continua anche dopo, perchè nuovi ricercatori, penetrando più a fondo nei loro profondi pensieri, trovano in essi la sorgente per gli altri studi, o la guida per nuove teorie. Uno di questi pochi fu GREGORIO RICCI-CURBASTRO.

BIBLIOGRAFIA

(1) G. RICCI-CURBASTRO - *Sopra un sistema di due equazioni differenziali lineari di cui l'una è quella dei fattori integranti dell'altra,* « Gior. di Mat. », Vol. XV, [1877].

(2) E. JÜRGENS - *Die Form der Integrale der linearen Differential gleichungen,* « Jour. für die reine und angew. Math. », B. 80, [1875].

(3) G. FROBENIUS - *Ueber Irreducibilität linearen Differentialgleichungen,* « Ibidem », B. 76, [1873].

(4) G. RICCI-CURBASTRO - *Sopra la deduzione di una nuova legge fondamentale di elettrodinamica,* « Nuovo Cimento », T. 1, [1877]. *Sopra il modo di agire delle forze pondero- ed elettromotrici fra due conduttori filiformi secondo Clausius,* « Ibidem », T. II, [1877]. *Sulla teoria elettrodinamica di Maxwell,* « Ibidem ».

(5) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti,* « Atti Ist. Veneto », T. VIII, [1882].

(6) G. RICCI-CURBASTRO - *Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche,* « Ann. di Mat. », T. XII, [1884].

(7) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulla classificazione delle forme differenziali quadratiche,* « Rend. Acc. Lincei », Vol. IV, [1888].

(8) B. RIEMANN - *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* « Ges. Werke », 2. Aufl., [1892].

(9) E. BELTRAMI - *Sulla teorica generale dei parametri differenziali,* « Op. Mat. », T. II, [1904].

(10) F. CASORATI - *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve,* « Op. Mat. », Vol. II, [1952].

(11) E. B. CHRISTOFFEL - *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades,* « Jour. für die reine und angew. Math. », B. 70, [1869].

(12) G. RICCI-CURBASTRO - *Sui parametri e gli invarianti differenziali,* « Ann. di Mat. », T. XIV, [1886].

(13) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale,* « Rend. Acc. Lincei », Vol. III, (1887).

(14) G. RICCI-CURBASTRO - *Sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine,* « Ann. di Mat. », T. 15, [1887].

(15) G. RICCI-CUBASTRO - *Della equazione di condizione pei parametri dei sistemi di superfici che appartengono ad un sistema triplo ortogonale,* « Rend. Acc. Lincei », Vol. III, (1894).

(16) G. DARBOUX - *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux,* « Ann. Ec. Normale », T. VII, [1878].

(17) Loc. cit. (12). Prefazione.

(18) G. RICCI-CURBASTRO et T. LEVI-CIVITA - *Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications,* « Math. Ann. », B. 54, [1901], Préface.

(19) G. RICCI-CURBASTRO - *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella Analisi applicata*, « Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario della origine della Università di Bologna », Vol. III, [1888]. *Sopra certi sistemi di funzioni*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. V, [1889]. *Di un punto della teoria delle forme quadratiche ternarie*, « Ibidem ». *Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions*, « Bull. Sc. Math. », T. XVI, [1892].

(20) G. RICCI-CURBASTRO - *Di alcune applicazioni del Calcolo differenziale assoluto alla teoria delle forme differenziali quadratiche binarie e dei sistemi a due variabili*, « Atti Ist. Veneto », T. IV, [1893].

(21) G. RICCI-CURBASTRO - *Lezioni sulla teoria delle superficie*, [1898]. Prefazione.

(22) Loc. cit. (19).

(23) E. BELTRAMI - *Sulle equazioni generali dell'elasticità*, « Op. Mat. », T. III, [1911].

(24) L. BIANCHI - *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. XI, [1902].

(25) E. PADOVA - *Sulle deformazioni infinitesime*, « Ibidem », Vol. V, [1889].

(26) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulle varietà a invarianti eguali*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. XXXIII, [1924]; pag. 4.

(27) J. SCHOUTEN - *Der Ricci Kalkül*, [1924]; pag. 91.

(28) Loco cit. (20).

(29) G. RICCI-CURBASTRO - *Della equazione fondamentale di Weingarten sulla teoria delle superficie applicabili*, « Atti Ist. Veneto », T. VIII, [1897].

(30) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di secondo grado*, « Ibidem », T. VI, [1895].

(31) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville*, « Ibidem », [1894].

(32) Loc. cit. (21).

(33) E. CESARO - *Lezioni di Geometria intrinseca*, [1896].

(34) T. LEVI-CIVITA - *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, [1925], Cap. X.

(35) G. RICCI-CURBASTRO - *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, « Mem. Acc. Lincei », Vol. II, [1896].

(36) G. RICCI-CURBASTRO - *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni*, « Mem. Soc. ital. delle Scienze (detta dei XL) », T. XII, [1899].

(37) LIE-ENGEL - *Theorie der Transformationsgruppen*, B. III, [1893].

(38) L. BIANCHI - *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, « Mem. Soc. ital. delle Scienze (detta dei XL) », T. XI, [1898].

(39) Loc. cit. (11).

(40) R. LIPSCHITZ - *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen*, « Jour. für die reine und angew. Math. », B. 70, [1869].

(41) T. SOUVOROFF - *Sur les caractérisques des systèmes de trois dimensions*, « Bull. Sc. Math. », T. IV, [1873].
(42) R. BEEZ - *Zur theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung*, « Zeitschr. für Math. und Physik », B. 20, [1876].
(43) F. SCHUR - *Ueber den Zusammenhang der Räume konstanten Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen*, « Math. Ann. », B. 27, [1886].
(44) G. RICCI-CURBASTRO - *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, « Atti Ist. Veneto », T. LXIII, [1904].
(45) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. XIX, [1910].
(46) G. RICCI-CURBASTRO - *Sui gruppi continui di movimenti rigidi negli iperspazi*, « Ibidem », Vol. XIV, [1905].
(47) Loc. cit. (35).
(48) G. RICCI-CURBASTRO - *Formule fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. XI, [1902].
(49) E. CESARO - Loc. cit. (33), Cap. XVII.
(50) A. VOSS - *Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten*, « Math. Ann. », B. XVI, [1880].
(51) L. BERZOLARI - *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque*, « Atti Acc. Torino », Vol. XXXIII, [1898].
(52) L. BIANCHI - *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. II, Parte II, [1924].
(53) J. HADAMARD - *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions*, « Bull. Sc. Math. », T. XXV, [1901].
(54) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque ed in particolare nelle varietà a tre dimensioni*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. XII, [1922].
(55) Loc. cit. (44).
(56) G. RICCI-CURBASTRO - *Riducibilità delle quadriche differenziali e ds^2 della statica einsteiniana*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. LXXXI, [1922].
(57) Loc. cit. (18).
(58) *Relazioni sui concorsi ai premi reali di Matematica*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. V, [1889].
(59) A. EINSTEIN - *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, « Sitzungsberichte der Preuss. Akad. der Wissensch. », [1915].
(60) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulle varietà a tre dimensioni con terne ortogonali di congruenze a rotazioni costanti*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. XXVII, [1918].
(61) G. RICCI-CURBASTRO - *Sulle varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche*, « Ibidem ».
(62) Loc. cit. (45).
(63) G. RICCI-CURBASTRO - *Della trasformazione delle forme differenziali quadratiche*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. XXI, [1912]. Loc. cit. (56).

(64) G. RICCI-CURBASTRO - *Di un metodo per la determinazione di un sistema completo di invarianti per un dato sistema di forme*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », T. XXXIII, [1912].

(65) T. LEVI-CIVITA - *Nozioni di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, « Ibidem », T. XLII, [1917].

(66) A. EINSTEIN - *The Meaning of Relativity*, [1953].

(67) G. RICCI-CURBASTRO - *Della teoria dei numeri reali secondo il concetto di Dedekind*, « Gior. di Matem. », Vol. 34, [1897].

(68) G. RICCI-CURBASTRO - *Lezioni di Analisi algebrica e infinitesimale*, [1926].