RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FABIO MANARESI

Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 163-213

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__163_0>

APPLICAZIONE DI UN PROCEDIMENTO VARIAZIONALE ALLO STUDIO DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE ALLE DERIVATE PARZIALI CON CARATTERISTICHE REALI DOPPIE

Memoria (*) *di* FABIO MANARESI (*a Bologna*)

INTRODUZIONE

Nella prima parte del presente lavoro [1]) si è dimostrato che esiste un'unica soluzione continua insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y in un dominio rettangolare $R \equiv (a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2)$ del problema al contorno costituito dall'equazione differenziale

(I) $$(\theta u_{xy})_{xy} + pu = 0$$

congiunta con la condizione

(II) $$u = g \quad \text{su} \quad FR$$

ove:

$\theta(x, y)$ è una funzione continua insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e positiva in ogni punto di R,

$p(x, y)$ è una funzione continua e non negativa in tutto R,

(*) Pervenuta in Redazione il 23 dicembre 1953.

1) Presentato come tesi di Laurea alla Facoltà di Scienze della Università di Bologna nel luglio 1953.

$g(x, y)$ è una funzione definita in FR, ivi continua e avente continue le derivate dei primi due ordini rispetto ad x nei segmenti $a_1 \leq x \leq a_2$, $y = b_1$, $a_1 \leq x \leq a_2$ $y = b_2$ e rispetto ad y nei segmenti $x = a_1$ $b_1 \leq y \leq b_2$, $x = a_2$ $b_1 \leq y \leq b_2$.

A tale risultato si è pervenuti mediante il procedimento variazionale fondato sull'idea di ottenere la soluzione di taluni tipi di equazioni differenziali con assegnate condizioni al contorno come estremante di un opportuno funzionale, ma la trattazione presenta un aspetto nuovo in quanto che sfrutta la possibilità di tradurre problemi ai limiti, lineari, di tipo differenziale, in equazioni integrali, prescindendo dalla cosiddetta funzione di GREEN [2]).

Dopo aver ricondotto (§ 1) il proposto problema al contorno ad una equazione integrale, si dimostrano (§ 3) alcune proprietà delle successioni minimizzanti per il funzionale $\iint_R [\theta(u_{xy})^2 + pu^2]dxdy$ — di cui la (I) è l'equazione di Lagrange (§ 2) — nella classe Γ delle funzioni $u(x, y)$ continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e verificanti la (II): tali proprietà consentono di provare (§ 4) l'esistenza in R di una funzione del tipo voluto che soddisfa all'equazione integrale suddetta e al dato problema.

Al § 5 sono dimostrate l'unicità di tale soluzione e l'esistenza del minimo assoluto in Γ per il citato funzionale.

Inoltre (§ 6) vengono indicate alcune generalizzazioni di cui sono suscettibili i risultati suesposti, considerando lo stesso problema al contorno per l'equazione

$$\text{(III)} \qquad (\theta u_{xy})_{xy}(ru_x + su_y)_x - (tu_y + su_x)_y + pu = 0$$

[laddove $r(x, y)$, $s(x, y)$, $t(x, y)$ sono funzioni continue in R insieme con la derivata parziale rispetto ad x la prima e rispetto ad y la terza, con ambedue le derivate parziali prime la seconda, e tali che, in ogni punto di R, risulti $r \geq 0$, $t \geq 0$, $\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} \geq 0$] e analoghi problemi al contorno per equazioni dif-

[2]) Cfr. G. CIMMINO, *Sui problemi ai limiti per le equazioni differenziali lineari*, « Mem. dell'Acc. delle Scienze » dell'Ist. di Bologna, serie X, tomo VI (1948-49).

ferenziali di forma simile con più di due variabili indipendenti.

Nella seconda parte si è trattato un problema di autovalori per l'equazione

$$(\mathrm{IV}) \qquad (\theta u_{xy})_{xy} + (p - \lambda q)u = 0$$

[con $q(x, y)$ funzione continua e non identicamente nulla in R e λ parametro complesso] applicando, con lievi modificazioni, il procedimento variazionale acquisito e si sono estese alcune fra le più notevoli proprietà degli autovalori e delle autofunzioni che valgono per le equazioni differenziali ordinarie.

Si è accennato inoltre alla possibilità di estendere questi ultimi risultati al caso della (III) con $p - \lambda q$ in luogo di p.

La trattazione è stata svolta per la (II) e non per la (III), oltre che per brevità algoritmica, per mettere in evidenza taluni risultati degni di nota (cfr. 1 III) che non vi sarebbe luogo a provare nel caso della equazione (III).

Lo stesso problema di autovalori per l'equazione (IV). con p identicamente nulla in R, è stato trattato da D. MANGERON [3]) con procedimenti che presuppongono la conoscenza della funzione di GREEN, mentre in quello adottato nel presente lavoro si prescinde, come si è detto, completamente da essa e non si fa nemmeno ricorso alla teoria delle equazioni integrali secondo FREDHOLM, la quale peraltro non si potrebbe applicare come nel lavoro di MANGERON al caso in cui p non sia identicamente nulla e tanto meno in quello della equazione (III).

Da ultimo si osservi che qui si sono sempre ridotte al minimo le ipotesi di derivabilità occorrenti, sicchè potrà talvolta anche non sussistere la completa invertibilità delle derivazioni parziali: spesso, ad esempio, si useranno le scritture f_{xyx}, f_{xyy}, f_{xyxy} per indicare le derivate parziali prime rispetto a x e a y e la derivata parziale seconda mista della f_{xy}.

---

[3]) D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quart'ordine con le caratteristiche reali doppie*, « Rend. dell'Acc. delle Scienze Fis. e Mat. », di Napoli, serie IV, vol. II, pp. 29-40 (1932).

PARTE PRIMA

§ 1. - Traduzione del problema ai limiti in equazione integrale.

1. — Si mostrerà dapprima come, con mezzi del tutto elementari, si possa tradurre un problema ai limiti, lineare, di tipo differenziale e comprendente in particolare quello proposto, in una equazione, pure lineare, di tipo integrale, che dipende in maniera esplicita soltanto dai dati del problema stesso.

Siano $\omega(x, y)$ una funzione continua insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e diversa da zero in ogni punto di un dominio rettangolare $R \equiv (a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2)$ del piano x, y e $\rho(x, y)$ una funzione continua in R.

Per ogni funzione $\varphi(x, y)$ continua in R insieme con le derivate parziali prime, seconda mista, terze φ_{xyx}, φ_{xyy} e quarta φ_{xyxy}, si ponga:

$$L\varphi = (\omega\varphi_{xy})_{xy} + \rho\varphi\,.$$

Se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono due funzioni aventi le proprietà della φ, vale, in R, la seguente identità di immediata verifica:

$$\begin{aligned}(1) \qquad uLv - vLu = [u\omega v_{xy} - v\omega u_{xy}]_{xy} - [u_x(\omega v_{xy}) - v_x(\omega u_{xy})]_y - \\ - [u_y(\omega v_{xy}) - v_y(\omega u_{xy})]_x\,.\end{aligned}$$

Scelto ad arbitrio in R un punto $P \equiv (x, y)$ si integrino da x ad a_h e da y a b_k, $h, k = 1, 2$, primo e secondo membro della (1).

Ove si ponga $v = (x - a_h)(y - b_k)$ e quindi $Lv = \omega_{xy} + \rho(x - a_h)(y - b_k)$, si trae, denotando con ξ, η le variabili di integrazione:

$$\int_x^{a_h}\int_y^{b_k} \{ u[\omega_{\xi\eta} + \rho(\xi - a_h)(\eta - b_k)] - (\xi - a_h)(\eta - b_k)Lu \}\, d\xi d\eta =$$

$$= \omega(a_h, y)u(a_h, y) + \omega(x, b_k)u(x, b_k) - \omega(x, y)u(x, y) -$$

$$- \omega(a_h, b_k)u(a_h, b_k) - (x - a_h)(y - b_k)\omega(x, y)u_{xy}(x, y) +$$

$$+\int_x^{a_h} [\omega_\xi(\xi, b_k)u(\xi, b_k) - \omega_\xi(\xi, y)u(\xi, y)]d\xi + \int_y^{b_k} [\omega_\eta(a_h, \eta)u(a_h, \eta) -$$

$$- \omega_\eta(x, \eta)u(x, \eta)]d\eta - (y - b_k)\int_x^{a_h} \omega(\xi, y)u_{\xi y}(\xi, y)d\xi -$$

$$-(x - a_h)\int_y^{b_k} \omega(x, \eta)u_{x\eta}(x, \eta)d\eta\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per

$$\gamma_{hk}(x, y) = (-1)^{h+k}\frac{(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$$

indi sommando per $h, k = 1, 2$, ove si tenga conto delle identità:

$$\sum_{h,k=1}^{2} \gamma_{hk}(x, y) = 1 \quad , \quad \sum_{h,k=1}^{2} \gamma_{hk}(x, y)(x - a_h)(y - b_k) = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{2} \gamma_{hk}(x, y)(x - a_h) = 0[k = 1, 2]\,, \quad \sum_{k=1}^{2} \gamma_{hk}(x, y)(y - b_k)[h = 1, 2]$$

si ricava infine:

$$\sum_{h,k=1}^{2} \gamma_{hk}(x, y)\int_x^{a_h}\int_y^{b_k} \{ u[\omega_{\xi\eta} + \rho(\xi - a_h)(\eta - b_k)] -$$

$$- (\xi - a_h)(\eta - b_k)Lu \} d\xi d\eta = -\omega(x, y)u(x, y) +$$

$$+ \sum_{k,h=1}^{2} \gamma_{hk}(x, y)\Big\{ \omega(a_h, y)u(a_h, y) + \omega(x, b_k)u(x, b_k) -$$

$$- \omega(a_h, b_k)u(a_h, b_k) + \int_x^{a_h} [\omega_\xi(\xi, b_k)u(\xi, b_k) - \omega_\xi(\xi, y)u(\xi, y)]d\xi +$$

$$+ \int_y^{b_k} [\omega_\eta(a_h, \eta)u(a_h, \eta) - \omega_\eta(x, \eta)u(x, \eta)]d\eta \Big\}.$$

Da quanto precede risulta immediatamente che:

I. - *Se $f(x,y)$ è una funzione continua in R e $g(x,y)$ è* *una funzione definita in FR, ivi continua e avente continue le derivate dei primi due ordini rispetto ad x nei segmenti* $a_1 \leq x \leq a_2$ $y = b_1$, $a_1 \leq x \leq a_2$ $y = b_2$, *e rispetto ad y nei seguenti* $x = a_1$ $b_1 \leq y \leq b_2$, $x = a_2$ $b_1 \leq y \leq b_2$, *ogni funzione* $u(x, y)$ *continua in R insieme con le derivate parziali prime, seconda mista, terze* u_{xyx}, u_{xyy} *e quarta* u_{xyxy} *che sia soluzione in R dell'equazione differenziale*

$$Lu = f \tag{2}$$

congiunta con la condizione $u = g$ *in FR, soddisfa pure, in R medesimo, alla equazione integrale*

$$u(x, y) = \frac{1}{\omega(x, y)} \sum_{h, k=1}^{2} \gamma_{hk}(x, y) \Big\{ \omega(a_h, y)g(a_h, y) + \omega(x, b_k)g(x, b_k) - \omega(a_h, b_k)g(a_h, b_k) + \int_x^{a_h} [\omega_\xi(\xi, b_k)g(\xi, b_k) - \omega_\xi(\xi, y)u(\xi, y)]d\xi + \int_y^{b_k} [\omega_\eta(a_h, \eta)g(a_h, \eta) - \omega_\eta(x, \eta)u(x, \eta)]d\eta - \int_x^{a_h}\int_y^{b_k} \{ u[\omega_{\xi\eta} + \rho(\xi - a_h)(\eta - b_k)] - (\xi - a_h)(\eta - b_k)f \} d\xi d\eta \Big\}. \tag{3}$$

Si proverà ora che, inversamente,

II. - *Ogni soluzione* $u(x, y)$ *continua in R dell'equazione integrale* (3) *è dotata di derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad* x, x, y, y *continue in R ed ivi soddisfa alla* (2) *congiunta con la condizione* $u = g$ *in FR.*

Se ω è costante in R la validità dell'enunciato si trae senz'altro dalla (3) eseguendo le derivate suddette.

In ogni caso si noti che la (3) può scriversi:

$$u(x, y) = \frac{1}{\omega(x, y)} \frac{b_2 - y}{b_2 - b_1} \int_{b_1}^{y} \omega_\eta(x, \eta)u(x, \eta)d\eta + \frac{1}{\omega(x, y)} \frac{y - b_1}{b_2 - b_1} \int_{b_2}^{y} \omega_\eta(x, \eta)u(x, \eta)d\eta + f_0(x, y) \tag{4}$$

ove i termini rappresentati da $f_0(x, y)$ costituiscono evidentemente una funzione che, nelle ipotesi ammesse, è continua in R insieme con la derivata parziale prima rispetto ad x.

In ciascuno dei due insiemi $a_1 \leq x \leq a_2$ $b_1 \leq y < b_1 + \dfrac{\min|\omega|}{2\max|\omega_y|}$ [4]), $a_1 \leq x \leq a_2$ $b_2 - \dfrac{\min|\omega|}{2\max|\omega_y|} < y \leq b_2$ vale per la u il seguente sviluppo

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \qquad f_n = \frac{1}{\omega}\frac{b_2 - y}{b_2 - b_1}\int_{b_1}^{y} \omega_\eta f_{n-1} d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\omega}\frac{y - b_1}{b_2 - b_1}\int_{b_2}^{y} \omega_\eta f_{n-1} d\eta \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

ottenuto dalla (4) con approssimazioni successive, giacchè risulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \max|f_0| \left\{ \frac{2\max|\omega_y|}{\min|\omega|}(y - b_1) \right\}^n \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \max|f_0| \left\{ \frac{2\max|\omega_y|}{\min|\omega|}(b_2 - y) \right\}^n \end{cases}$$

Essendo poi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} f_n \right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ n \max|f_0| \min|\omega| \max\left|\left(\frac{1}{\omega}\right)_x\right| + \\ \displaystyle\quad + n\max|f_0|\frac{\max|\omega_{xy}|}{\max|\omega_y|} + \max\left|\frac{\partial f_0}{\partial x}\right| \Bigg\} \left\{ \frac{2\max|\omega_y|}{\min|\omega|}(y - b_1) \right\}^n \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ n \max|f_0| \min|\omega| \max\left|\left(\frac{1}{\omega}\right)_x\right| + \\ \displaystyle\quad + n\max|f_0|\frac{\max|\omega_{xy}|}{\max|\omega_y|} + \max\left|\frac{\partial f_0}{\partial x}\right| \Bigg\} \left\{ \frac{2\max|\omega_y|}{\min|\omega|}(b_2 - y) \right\}^n \end{cases}$$

---

4) Con la scrittura *min* o *max*, senz'altra specificazione, anteposta al simbolo di una funzione, si indica il minimo assoluto, o corrispondentemente il massimo assoluto, in R della funzione stessa.

si riconosce intanto che, nei suddetti insiemi, la u e quindi i due integrali al secondo membro della (4) sono dotati di derivata parziale prima rispetto ad x continua.

Se non è $b_1 + \dfrac{\min|\omega|}{2\max|\omega_y|} > b_2 - \dfrac{\min|\omega|}{2\max|\omega_y|}$, ove si denoti con ε un numero positivo arbitrariamente piccolo, scelto un valore y_0 di y tale che $b_1 + \dfrac{\min|\omega|}{2\max|\omega_y|} - \varepsilon < y_0 < b_1 + \dfrac{\min|\omega|}{2\max|\omega_y|}$, dalla (4) si ricava:

$$u(x, y) = \frac{1}{\omega(x, y)} \int_{y_0}^{y} \omega_\eta(x, \eta) u(x, \eta) d\eta +$$

$$+ \left[\frac{1}{\omega(x, y)} \frac{b_2 - y}{b_2 - b_1} \int_{b_1}^{y_0} \omega_\eta(x, \eta) u(x, \eta) d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega(x, y)} \frac{y - b_1}{b_2 - b_1} \int_{b_2}^{y_0} \omega_\eta(x, \eta) u(x, \eta) d\eta + f_0(x, y) \right]$$

laddove i termini entro parentesi quadra costituiscono una funzione continua in R insieme con la derivata parziale prima rispetto ad x, sicchè, ragionando come sopra, si deduce che la u è dotata di derivata parziale prima rispetto ad x continua in $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y < y_0 + \dfrac{\min|\omega|}{\max|\omega_y|}$.

Se non è $y_0 + \dfrac{\min|\omega|}{\max|\omega_y|} > b_2 - \dfrac{\min|\omega|}{2\max|\omega_y|}$, ripetendo ancora lo stesso ragionamento un numero finito $k \geq 1$ di volte, si trae che la u è dotata di derivata parziale prima rispetto ad x continua in $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y < y_k + \dfrac{\min|\omega|}{\max|\omega_y|} > b_2 - \dfrac{\min|\omega|}{2\max|\omega_y|}$, e quindi, per quanto si è provato in principio, addirittura in tutto R.

In secondo luogo, osservando che la (3) può anche scriversi:

$$(5)\qquad u(x, y) = \frac{1}{\omega(x, y)} \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{x} \omega_\xi(\xi, y) u(\xi, y) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\omega(x, y)} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \int_{a_2}^{x} \omega_\xi(\xi, y) u(\xi, y) d\xi + g_0(x, y)$$

ove i termini rappresentati da $g_0(x, y)$ costituiscono, nelle ipotesi dell'enunciato, una funzione continua in R insieme con la derivata parziale prima rispetto ad y e ragionando in modo perfettamente analogo, si riconosce che la u è dotata anche di derivata parziale prima rispetto ad y continua in R.

Inoltre per le u_x e u_y si deducono dalla (3) espressioni analoghe alle (4) e (5), onde la u sarà dotata altresì di derivate parziali seconde rispetto a x e a y continue in R.

Esaminando infine le espressioni delle altre derivate della (3) contemplate nell'enunciato, si trae completamente l'asserto.

Ne consegue, per I, che:

III. - *Ogni soluzione $u(x, y)$ continua in R insieme con le derivate praziali prime, seconda mista, terze u_{xyx}, u_{xyy} e quarta u_{xyxy} dell'equazione differenziale* (2) *congiunta con la condizione $u = g$ in FR, è necessariamente dotata anche di derivate parziali seconde u_{xx}, u_{yy} continue in R, sicchè in tutte le suindicate derivate è permutabile l'ordine di derivazione.*

IV. - *Le soluzioni continue in R insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y dell'equazione differenziale* (2) *congiunta con la condizione $u = g$ in FR sono tutte e sole le soluzioni continue in R dell'equazione integrale* (3).

§ 2. - Equazione di Lagrange per il funzionale $I[u] = \iint_R [\theta(u_{xy})^2 + pu^2] dxdy$.

2. — Si premette una estensione di un noto lemma di calcolo delle variazioni:

I. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione* $z(x, y)$ *continua nel dominio rettangolare* $R \equiv (a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2)$ *del piano* x, y *sia del tipo:*

$$z(x, y) = \alpha(x) + \beta(y) \tag{6}$$

è che risulti:

$$\iint_R z\psi_{xy}dxdy = 0 \tag{7}$$

per qualunque funzione $\psi(x, y)$ *continua in* R *insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e nulla su* FR.

Infatti, se $z(x, y)$ è una funzione continua in R del tipo (6), si ha:

$$\iint_R \alpha(x)\psi_{xy}dxdy + \iint_R \beta(y)\psi_{xy}dxdy = \int_{a_1}^{a_2} [\alpha(x)\psi_x(x, b_2) -$$

$$- \alpha(x)\psi_x(x, b_1)]dx + \int_{b_1}^{b_2} [\beta(y)\psi_y(a_2, y) - \beta(y)\psi_y(a_1, y)]dy = 0$$

poichè $\psi = 0$ su FR e quindi anche $\psi_x(x, b_1) = \psi_x(x, b_2) = 0$ per $a_1 \leq x \leq a_2$ e $\psi_y(a_1, y) = \psi_y(a_2, y) = 0$ per $b_1 \leq y \leq b_2$. Resta così provata la necessità della condizione.

In secondo luogo, se $z(x, y)$ è una funzione continua in R per cui vale la (7), osservando che tra le funzioni $\psi(x, y)$ verificanti le condizioni dell'enunciato vi è la

$$\psi(x, y) = \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} zdxdy - \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{y} zdxdy - \frac{y - b_1}{b_2 - b_1}\int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{b_2} zdxdy +$$

$$+ \frac{(x - a_1)(y - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} zdxdy$$

e che, per la prima parte del teorema dianzi dimostrata, la (7), valida ora per ipotesi, tale si mantiene aggiungendo alla $z(x, y)$ una qualsivoglia funzione continua in R del tipo (6), in particolare la

$$-\frac{1}{a_2-a_1}\int_{a_1}^{a_2} z(x,y)dx-\frac{1}{b_2-b_1}\int_{b_1}^{b_2} z(x,y)dy+$$
$$+\frac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} z(x,y)dxdy,$$

dalla (7) medesima, si trae

$$\iint_R\left[z-\frac{1}{a_2-a_1}\int_{a_1}^{a_2} zdx-\frac{1}{b_2-b_1}\int_{b_1}^{b_2} zdy+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} zdxdy\right]^2 dxdy=0.$$

Ne consegue che la funzione integranda deve essere identicamente nulla in R e ciò prova la sufficienza della condizione.

3. - Se $\theta(x, y)$ è una funzione continua, dotata di derivate parziali prime e seconda mista continue e positiva in ogni punto del dominio rettangolare R e $p(x, y)$ è una funzione continua e non negativa in tutto R, si consideri il funzionale

$$I[u]=\iint_R[\theta(u_{xy})^2+pu^2]dxdy \tag{8}$$

nella classe Γ delle funzioni $u(x, y)$ continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e verificanti la condizione $u=g$ su FR, essendo $g(x, y)$ una assegnata funzione, definita in FR, per cui valgono le ipotesi ammesse in 1 I. Utilizzando il lemma dimostrato nel n. 2 si proverà che:

I. - *Condizione necessaria affinchè una funzione, appartenente alla classe Γ e avente la derivata parziale seconda mista dotata di derivate parziali prime e seconda mista continue in R, sia estremante relativa* [*o, in particolare, assoluta*] *in* Γ *per il funzionale* (8) *è che essa soddisfi in R all'equazione dif-*

ferenziale (*di Lagrange*)

$$(\theta u_{xy})_{xy} + pu = 0 . \tag{9}$$

Infatti, se la funzione $u_0(x, y)$ di Γ è una estremante relativa in Γ per il funzionale (8), qualunque sia la funzione $\delta u(x, y)$ continua insieme con le derivate parziali prime e seconda mista in R e nulla su FR, dovrà essere, com'è ben noto,

$$\delta I = 2 \iint_R \theta\,(u_0)_{xy}\,(\delta u)_{xy} dxdy + 2 \iint_R pu_0 \delta u dxdy = 0 . \tag{10}$$

Si osservi ora che, prefissato ad arbitrio un punto in R, per es. a_1, b_1, integrando due volte per parti, si ottiene

$$\iint_R pu_0 \delta u dxdy = \iint_R \left[(\delta u)_{xy} \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} pu_0 dxdy \right] dxdy .$$

La (10) diviene allora

$$\iint_R \left[\theta(u_0)_{xy} + \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} p_0 u dxdy \right] (\delta u)_{xy} dxdy = 0$$

da cui, per 2 I,

$$\theta\,(u_0)_{xy} + \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} pu_0 dxdy = \alpha(x) + \beta(y)$$

ovvero, se la $(u_0)_{xy}$ è dotata di derivate parziali prime a seconda mista continue in R,

$$[\theta(u_0)_{xy}]_{xy} + pu_0 = 0$$

in ogni punto di R.

§ 3. - Proprietà delle successioni minimizzanti in Γ per $I[u]$.

4. - E' chiaro che il funzionale (8) è dotato in Γ di estremo inferiore e' non negativo.

Si consideri allora una successione

$$(11) \qquad u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots,\ u_n\,,\ \ldots$$

minimizzante in Γ per il funzionale (8), cioè tale che risulti

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} I[u_n] = e'\,.$$

Si proverà che:

I. - *Le funzioni* u_n *di ogni successione minimizzante in* Γ *per il funzionale* (8) *sono ugualmente continue e ugualmente limitate in* R.

Indicato infatti con M un numero positivo tale che, per tutti i numeri naturali n, risulti $I[u_n] \leq M$, si avrà manifestamente

$$(13) \qquad \iint_R \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy \leq \iint_R \frac{\theta\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}\right)^2 + pu_n^2}{\min\theta}\,dxdy \leq \frac{M}{\min\theta}$$

Se $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ sono due punti scelti a piacere in R, si ha poi:

$$u_n(x_2, y_2) - u_n(x_1, y_1) = u_n(a_1, y_2) - u_n(a_1, y_1) + u_n(x_2, b_1) -$$
$$- u_n(x_1, b_1) + \int_{a_1}^{x_2}\int_{b_1}^{y_2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}\,dxdy - \int_{a_1}^{x_1}\int_{b_1}^{y_1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}\,dxdy\,.$$

Ma è:

$$\int_{a_1}^{x_2}\int_{b_1}^{y_2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}dxdy - \int_{a_1}^{x_1}\int_{b_1}^{y_1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}dxdy = \int_{a_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}dxdy + \int_{x_1}^{x_2}\int_{b_1}^{y_1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}dxdy$$

e pertanto, applicando la disuguaglianza integrale di SCHWARZ, tenendo conto della (13) e ricordando che $u = g$ su FR, si ricava:

$$|u_n(x_2, y_2) - u_n(x_1, y_1)| \leq |g(a_1, y_2) - g(a_1, y_1)| + |g(x_2, b_1) -$$
$$-g(x_1, b_1)| + \sqrt{\frac{M(a_2 - a_1)}{\min\theta}}\sqrt{|y_2 - y_1|} + \sqrt{\frac{M(b_2 - b_1)}{\min\theta}}\sqrt{|x_2 - x_1|}$$

da cui si deduce la uguale continuità delle u_n in R.

In secondo luogo si osservi che, qualunque sia il punto $P \equiv (x, y)$ di R, si ha:

$$u_n(x, y) = g(a_1, y) + g(x, b_1) - g(a_1, b_1) + \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\, dxdy$$

da cui, per la disuguaglianza integrale di SCHWARZ e la (13), si trae

$$|u_n(x, y)| \leq 2 \max_{(\text{su } FR)} |g| + |g(a_1, b_1)| + \sqrt{\frac{M(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{\min \theta}}$$

laddove il secondo membro è un numero positivo indipendente da n, onde si conclude che le u_n sono anche ugualmente limitate in R.

Per il teorema di scelta si potrà allora estrarre da ogni successione (11) minimizzante in Γ per il funzionale (8) una sottosuccessione uniformemente convergente in R:

$$(14) \qquad v_1, \quad v_2, \quad \dots, \quad v_n, \dots$$

sicchè la funzione limite di questa, $v(x, y)$, sarà continua in R e soddisferà alla condizione $v = g$ su FR.

5. - Si dimostrerà ora il seguente teorema:

I. - *Data una successione* (11) *minimizzante in* Γ *per il funzionale* (8), *qualunque sia la funzione* $\varphi(x, y)$ *continua insieme con le derivate parziali prime e seconda mista in* R *e nulla su* FR, *riuscirà*:

$$(15) \qquad \lim_{n \to \infty} \iint_R \left[\theta \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + p u_n \varphi\right] dxdy = 0\,.$$

Se, infatti, τ indica un qualsivoglia numero positivo, la funzione $u_n \pm \tau\varphi$, per $n = 1, 2, \dots$, appartiene evidentemente alla classe Γ, onde sarà, per ogni numero naturale n,

$$0 \leq e' \leq I[u_n \pm \tau\varphi] = I[u_n] + \tau^2 I[\varphi] \pm 2\tau I_n$$

ove si è posto

$$\iint_R \left[\theta \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + p u_n \varphi\right] dxdy = I_n\,.$$

D'altra parte, giusta la (12), vi sarà, in corrispondenza ad ogni valore di τ, un indice n_τ tale che, per ogni $n > n_\tau$, risulti

$$I[u_n] < e' + \tau^2 I[\varphi],$$

e quindi anche

$$0 \leq e' \leq I[u_n] + \tau^2 I[\varphi] \pm 2\tau I_n < e' + 2\tau^2 I[\varphi] \pm 2\tau I_n$$

da cui si trae

$$0 < \tau I[\varphi] \pm I_n . \tag{16}$$

Se I_n non tendesse a zero al divergere di n, assegnato ad arbitrio un numero positivo ε abbastanza piccolo, risulterebbe $|I_n| > \varepsilon$ per degli $n > n_\tau$, sicchè, preso $\tau < \dfrac{\varepsilon}{I[\varphi]}$, il secondo membro della (16), scegliendo opportunamente uno dei due segni, riuscirebbe negativo per degli $n > n$

Questa contraddizione prova la validità della (15).

Dal teorema dimostrato si trae facilmente che:

II. - *Qualunque sia la funzione $\varphi(x, y)$ continua in R insieme con le derivate parziali φ_x, φ_y, φ_{xy}, φ_{xyx}, φ_{xyy}, φ_{xyxy} e verificante le condizioni $\varphi = \varphi_{xy} = 0$ su FR, la funzione $v(x, y)$, limite di una successione* (14) *minimizzante in* F *per il funzionale* (8) *e uniformemente convergente in R, sarà ortogonale in R alla funzione $(\theta\varphi_{xy})_{xy} + p\varphi$, cioè riuscirà:*

$$\iint_R [(\theta\varphi_{xy})_{xy} + p\varphi] v\,dx dy = 0 . \tag{17}$$

Invero si ha, integrando due volte per parti e tenendo presente che $\varphi_{xy} = 0$ su FR e quindi anche $\varphi_{xyx}(x, b_1) = \varphi_{xyx}(x, b_2) = 0$ per $a_1 \leq x \leq a_2$,

$$\iint_R \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\, dx dy = \iint_R (\theta\varphi_{xy})_{xy} v_n dx dy .$$

Pertanto:

$$\iint_R \left[\theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + p v_n \varphi\right] dx dy = \iint_R [(\theta\varphi_{xy})_{xy} + p\varphi] v_n dx dy$$

sicchè, per il teorema I ed essendo lecito il passaggio al limite sotto al segno di integrale, resta provato l'asserto.

Ma si può dimostrare che:

III. - *Scomposto il dominio rettangolare* R *in* $m_1 \cdot m_2$ *domini rettangolari parziali* $R_{hk} \equiv (x_{h-1} \leq x \leq x_h,\ y_{k-1} \leq y \leq y_k)$, $h = 1, 2, \ldots, m_1$, $k = 1, 2, \ldots, m_2$, *con* $a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m_1} = a_2$, $b_1 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m_2} = b_2$, *e posto* $R_h = \sum_{k=1}^{m_2} R_{hk} \equiv (x_{h-1} \leq x \leq x_h,\ b_1 \leq y \leq b_2)$, $S_k = \sum_{h=1}^{m_1} R_{hk} \equiv (a_1 \leq x \leq a_2,\ y_{k-1} \leq y \leq y_k)$, *la* (17) *sussiste anche se la* $\varphi(x, y)$, *ferme restando le condizioni enunciate in* I *e la* $\varphi_{xy} = 0$ *su* FR, *è dotata di derivata parziale* φ_{xyx} [*o* φ_{xyy}] *limitata in* R *e continua in tutti i punti di ogni* R_h [*o* S_k] *esclusi, al più, quelli dei segmenti aperti* $x = x_{h-1}$, $b_1 < y < b_2$, $x = x_h$, $b_1 < y < b_2$, $h = 1, 2, \ldots, m_1$ [*o* $a_1 < x < a_2$ $y = y_{k-1}$, $a_1 < x < a_2$, $y = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, m_2$] *e di derivate parziali* φ_{xyy} [*o* φ_{xyx}] *e* φ_{xyxy} *limitate in* R *e continue in tutti i punti interni ad ogni* R_{hk}.

Infatti si ha intanto

$$\iint_{R_h} \theta\varphi_{xy} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y}\, dxdy = \int_{FR_h} \theta\varphi_{xy} \frac{\partial v_n}{\partial y}\, dy - \iint_{R_h} (\theta\varphi_{xy})_x \frac{\partial v_n}{\partial y}\, dxdy$$

e, poichè $\varphi_{xy} = 0$ su FR,

$$\iint_R \theta\varphi_{xy} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y}\, dxdy = -\iint_R (\theta\varphi_{xy})_x \frac{\partial v_n}{\partial y}\, dxdy.$$

D'altra parte risulta:

$$\iint_{R_{hk}} [(\theta\varphi_{xy})_x v_n]_y dxdy = \int_{x_{h-1}}^{x_h} [(\theta\varphi_{xy})_x(x, y_k) v_n(x, y_k) -$$

$$- (\theta\varphi_{xy})_x(x, y_{k-1}) v_n(x, x_{k-1})] dx$$

e quindi

$$\iint_{R_h} [(\theta\varphi_{xy})_x v_n]_y dxdy = \int_{x_{h-1}}^{x_h} [(\theta\varphi_{xy})_x(x, b_2) v_n(x, b_2) -$$

$$- (\theta\varphi_{xy})_x(x, b_1) v_n(x, b_1)] dx = 0$$

essendo $\varphi_{xy} = 0$ su FR e conseguentemente $\varphi_{xyx}(x, b_1) = \varphi_{xyx}(x, b_2) = 0$ per $a_1 \leq x \leq a_2$.

Ne consegue

$$\iint_R [(\theta\varphi_{xy})_x v_n]_y dxdy = 0$$

ovvero:

$$\iint_R (\theta\varphi_{xy})_x \frac{\partial v_n}{\partial y} dxdy = -\iint_R (\theta\varphi_{xy})_{xy} v_n dxdy$$

e pertanto si ottiene ancora

$$\iint_R \left[\theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + p v_n \varphi\right] dxdy = \iint_R [(\theta\varphi_{xy})_{xy} + p\varphi] v_n dxdy$$

da cui, per la (15) ed essendo lecito il passaggio al limite sotto al segno di integrale, si trae, come volevasi, la (17).

In maniera perfettamente analoga si procede nell'altra ipotesi contemplata nell'enunciato entro parentesi quadra.

§ 4. - Esistenza in R di una soluzione del proposto problema al contorno.

6. - Si proverà che:

I. - *La funzione $v(x, y)$, limite di una successione* (14) *minimizzante in Γ per il funzionale* (8) *ed equiconvergente in R, ivi soddisfa ad una equazione integrale del tipo* (3).

Se, infatti, $P \equiv (x, y)$ è un arbitrario punto interno ad R, si denotino con ξ, η le coordinate del punto corrente in R medesimo e, posto $R_{hk} \equiv [(-1)^{h+1} a_h \leq (-1)^{h+1}\xi \leq (-1)^{h+1}x, (-1)^{k+1} b_k \leq (-1)^{k+1}\eta \leq (-1)^{k+1} y]$ $(h, k = 1, 2)$, si consideri, per ogni numero naturale m, la funzione $\varphi_m(\xi, \eta)$ definita in R nella maniera seguente:

$$\varphi_m(\xi, \eta) = (x - a_{3-h})(y - b_{3-k}) \int_{a_k}^{\xi}\int_{b_k}^{\eta} \left[1 - \left(\frac{2t - a_h - x}{x - a_h}\right)^{2m}\right]\left[1 - \left(\frac{2\tau - b_k - y}{y - b_k}\right)^{2m}\right] dtd\tau \text{ in } R_{hk} \quad (h, k = 1, 2).$$

Si ha successivamente:

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\xi} = (x - a_{3-h})(y - b_{3-k})\left[1 - \left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h}\right)^{2m}\right]\int_{b_k}^{\eta}\left[1 - \left(\frac{2\tau - b_k - y}{y - b_k}\right)^{2m}\right]d\tau \text{ in } R_{hk} \qquad (h,\ h = 1,\ 2)$$

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\eta} = (x - a_{3-h})(y - b_{3-k})\left[1 - \left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k}\right)^{2m}\right]\int_{a_h}^{\xi}\left[1 - \left(\frac{2t - a_h - x}{x - a_h}\right)^{2m}\right]dt \text{ in } R_{hk} \qquad (h,\ k = 1,\ 2)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta} = (x - a_{3-h})(y - b_{3-k})\left[1 - \left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h}\right)^{2m}\right]\left[1 - \left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k}\right)^{2m}\right] \text{ in } R_{hk} \qquad (h,\ k = 1,\ 2)$$

$$\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta} = -4m\,\frac{(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})}{x - a_h}\left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h}\right)^{2m-1}\left[1 - \left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k}\right)^{2m}\right] \text{ in } R_{hk} - [\xi = x,\ (-1)^{k+1}b_k < (-1)^{k+1}\eta < (-1)^{k+1}y] \qquad (h,\ k = 1,\ 2)$$

$$\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta^2} = -4m\,\frac{(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})}{y - b_k}\left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k}\right)^{2m-1}\left[1 - \left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h}\right)^{2m}\right] \text{ in } R_{hk} - [(-1)^{h+1}a_h < (-1)^{h+1}\xi < (-1)^{h+1}x,\ \eta = y] \qquad (h,\ k = 1,\ 2)$$

$$\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} =$$

$$= 16m^2\,\frac{(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})}{(x - a_h)(y - b_k)}\left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h}\right)^{2m-1}\left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k}\right)^{2m-1} \text{ in } R_{hk} - \left\{[(-1)^{h+1}a_h \leq (-1)^{h+1}\xi \leq (-1)^{h+1}x,\ \eta = y] + [\xi = x,\ (-1)^{k+1}b_k \leq (-1)^{k+1}\eta \leq (-1)^{k+1}y]\right\}.$$

Si vede dunque che la funzione $\varphi_m(\xi, \eta)$, qualunque sia l'intero $m \geq 1$, verifica le ipotesi ammesse in 5 III per la $\varphi(x, y)$.

Si avrà pertanto

$$\iint_R \left[\left(\theta \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\xi\eta} + p\varphi_m\right] v\,d\xi\,d\eta = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

e anche

$$\lim_{m\to\infty} \iint_R \left[\left(\theta \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\xi\eta} + p\varphi_m\right] v\,d\xi\,d\eta = 0\,. \tag{18}$$

Per calcolare l'espressione esplicita del primo membro della (18) si osservi anzitutto che, con facili calcoli, si deduce:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(\xi, \eta) = (x - a_{3-h})(y - b_{3-k})(\xi - a_h)(\eta - b_k)$$
$$\text{uniformemente in } R_{hk} \qquad (h, k = 1, 2)$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta} \begin{cases} = (x - a_{3-h})(y - b_{3-k}) \text{ in ogni punto interno a } R_{hk} \\ \quad \text{e uniformemente in ogni dominio rettangolare interno a } R_{hk}. \\ = 0 \quad \text{su } FR_{hk} \qquad (h, k = 1, 2) \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta} \begin{cases} = 0 \begin{cases} \text{per } (-1)^{h+1}a_h < (-1)^{h+1}\xi < (-1)^{h+1}x, \\ \quad (-1)^{k+1}b_k \leq (-1)^{k+1}\eta \leq (-1)^{k+1}y \text{ e} \\ \quad \text{uniformemente in ogni dominio rettangolare interno a } R_{hk}. \\ \text{nei vertici di } R_{hk}. \end{cases} \\ = (-1)^{h+1}\infty \text{ per } \xi = a_h,\ (-1)^{k+1}b_k < (-1)^{k+1}\eta < \\ \quad < (-1)^{k+1}y \qquad (h, k = 1, 2) \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{\xi\to x^-} \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta} = \lim_{m\to\infty} \lim_{\xi\to x^+} \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta} =$$

$$= (-1)^k\infty \text{ per } (-1)^{k+1}b_k < (-1)^{k+1}\eta < (-1)^{k+1}y \quad (k = 1, 2)$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta^2}\begin{cases} = 0 \begin{cases}\text{per } (-1)^{h+1}a_h \leq (-1)^{h+1}\xi \leq (-1)^{h+1}x, \\ (-1)^{k+1}b_k < (-1)^{k+1}\eta < (-1)^{k+1}y \text{ e} \\ \text{uniformemente in ogni dominio ret-} \\ \text{tangolare interno a } P_{hk}\,. \\ \text{nei vertici di } P_{hk}. \end{cases} \\ = (-1)^{h+1}\infty \text{ per } \eta = b_k,\ (-1)^{h+1}a_h < (-1)^{h+1}\xi < \\ < (-1)^{h+1}x \qquad (h, k = 1, 2) \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\eta\to y^-}\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta^2} = \lim_{m\to\infty}\lim_{\eta\to y^+}\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta^2} =$$

$$= (-1)^h\infty \text{ per } (-1)^{h+1}a_h < (-1)^{h+1}\xi < (-1)^{h+1}x \quad (h = 1, 2)$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\begin{cases} = 0 \text{ per } (-1)^{h+1}a_h < (-1)^{h+1}\xi < (-1)^{h+1}x, \\ (-1)^{k+1}b_k < (-1)^{k+1}\eta < (-1)^{k+1}y;\ \xi = a_h, \\ (-1)^{k+1}b_k < (-1)^{k+1}\eta < (-1)^{k+1}y; \\ (-1)^{h+1}a_h < (-1)^{h+1}\xi < (-1)^{h+1}x,\ \eta = b_k \\ \text{e uniformemente in ogni dominio rettango-} \\ \text{lare interno a } P_{hk}. \\ = +\infty \text{ per } \xi = a_h,\ \eta = b_k \qquad (h, k = 1, 2) \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\xi,\eta\to x^-,y^-}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = \lim_{m\to\infty}\lim_{\xi,\eta\to x^-,y^+}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\lim_{\xi,\eta\to x^+,y^-}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = \lim_{m\to\infty}\lim_{\xi,\eta\to x^+,y^+}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = +\infty$$

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\xi,\eta\to a_h,y^-}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = \lim_{m\to\infty}\lim_{\xi,\eta\to a_h,y^+}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = -\infty$$

$$(h = 1, 2)$$

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\xi,\eta\to x^-,b_k}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = \lim_{m\to\infty}\lim_{\xi,\eta\to x^+,b_k}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = -\infty$$

$$(k = 1, 2)$$

In secondo luogo, scritta la (18) nella forma:

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\iint_R \theta v \frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta + \iint_R \theta_\eta v \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\,d\xi d\eta + \right.$$

$$\left. + \iint_R \theta_\xi v \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta^2}\,d\xi d\eta + \iint_R \theta_{\xi\eta} v \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\,d\xi d\eta + \iint_R p v \varphi_m d\xi d\eta \right\} = 0,$$

si mostrerà che esiste finito il limite, per m tendente all'infinito, di ognuno dei cinque integrali al primo membro.

A) *Calcolo del* $\lim\limits_{m\to\infty}\iint_R \theta v \dfrac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta$.

Evidentemente si ha:

$$\iint_R \theta v \frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta = \sum_{h,k=1}^{2}(-1)^{h+k}\int_{a_h}^{x}\int_{b_k}^{y} \theta v \frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta$$

$$\int_{a_h}^{x}\int_{b_k}^{y} \theta v \frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta = \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}} (\ldots) d\xi d\eta - \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{y}^{\frac{b_k+y}{2}} (\ldots) d\xi d\eta -$$

$$- \int_{x}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}} (\ldots) d\xi d\eta + \int_{x}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{y}^{\frac{b_k+y}{2}} (\ldots) d\xi d\eta$$

$$\int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}} \theta v \frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta = \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}} [\theta(\xi,\eta)v(\xi,\eta) -$$

$$- \theta(a_h, b_k)v(a_h, b_k)] \frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta + \theta(a_h, b_k)v(a_h, b_k)\int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}} \frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta$$

Indicato con δ un numero positivo minore di $\dfrac{|x - a_h|}{2}$

e di $\dfrac{|y-b_k|}{2}$ risulta poi:

$$\int_{a_k}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}}[\theta(\xi,\eta)v(\xi,\eta)-\theta(a_h,b_k)v(a_h,b_k)]\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}d\xi d\eta=$$

$$=\int_{a_k+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}}(\ldots)d\xi d\eta+\int_{a_k}^{a_k+(-1)^{h+1}\delta}\int_{b_k}^{b_k+(-1)^{k+1}\delta}(\ldots)d\xi d\eta+$$

$$+\int_{a_k}^{a_k+(-1)^{h+1}\delta}\int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}}(\ldots)d\xi d\eta+\int_{a_k+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{b_k+(-1)^{k+1}\delta}(\ldots)d\xi d\eta$$

Ma è:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{a_k+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}}[\theta(\xi,\eta)v(\xi,\eta)-$$

$$-\theta(a_h,b_k)v(a_h,b_k)]\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}d\xi d\eta=\int_{a_k+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}}\Big\{[\theta(\xi,\eta)v(\xi,\eta)-$$

$$-\theta(a_h,b_k)v(a_h,b_k)]\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\Big\}d\xi d\eta=0$$

Inoltre, per la continuità della θv in R, assegnato ad arbitrio un numero positivo ε, prendendo δ abbastanza prossimo a zero, riuscirà, per tutti i punti del rettangolo $(-1)^{h+1}a_h\leq$ $\leq(-1)^{h+1}\xi\leq(-1)^{h+1}[a_h+(-1)^{h+1}\delta]$, $(-1)^{k+1}b_k\leq(-1)^{k+1}\eta\leq$ $\leq(-1)^{k+1}[b_k+(-1)^{k+1}\delta]$,

$$|\theta(\xi,\eta)v(\xi,\eta)-\theta(a_h,b_k)v(a_h,b_k)|<\varepsilon$$

sicchè, essendo la $\dfrac{\partial^4 \varphi_m}{\partial\xi^2 \partial\eta^2}$ sempre del medesimo segno in $(-1)^{h+1} a_h \leq (-1)^{h+1}\xi < (-1)^{h+1} \dfrac{a_h + x}{2}$, $(-1)^{k+1} b_k \leq (-1)^{k+1}\eta < < (-1)^{k+1} \dfrac{b_k + y}{2}$, risulterà:

$$\left| \int_{a_h}^{a_h+(-1)^{h+1}\delta} \int_{b_k}^{b_k+(-1)^{k+1}\delta} [\theta(\xi, \eta)v(\xi, \eta) - \theta(a_h, b_k)v(a_h, b_k)] \frac{\partial^4 \varphi_m}{\partial\xi^2 \partial\eta^2} d\xi d\eta \right| <$$

$$< \varepsilon \left| \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}} \frac{d^4 \varphi_m}{\partial\xi \partial\eta} d\xi d\eta \right| = \varepsilon \,|x - a_{3-h}|\,|y - b_{3-k}|$$

$$\left| \int_{a_h}^{a_h+(-1)^{h+1}\delta} \int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}} [\theta(\xi, \eta)v(\xi, \eta) - \theta(a_h, b_k)v(a_h, b_k)] \frac{\partial^4 \varphi_m}{\partial\xi^2 \partial\eta^2} d\xi d\eta \right| <$$

$$< \{ \max_{(\text{in } R_{hk})} |\theta v| + |\theta(a_h, b_k)v(a_h, b_k)| \} \left| \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}} \frac{\partial^4 \varphi_m}{\partial\xi^2 \partial\eta^2} d\xi d\eta \right| =$$

$$= \{ \max_{(\text{in } R_{hk})} |\theta v| + |\theta(a_h, b_k)v(a_h, b_k)| \} \Big| (x -$$

$$- a_{3-h}) \int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}} \left\{ - 4m \frac{y - b_{3-k}}{y - b_k} \left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k} \right)^{2m-1} \right\} d\eta \Big|$$

e analogamente

$$\left| \int_{a_h+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k}^{b_k+(-1)^{k+1}\delta} [\theta(\xi, \eta)v(\xi, \eta) - \theta(a_h, b_k)v(a_h, b_k)] \frac{\partial^4 \varphi_m}{\partial\xi^2 \partial\eta^2} d\xi d\eta \right| <$$

$$< \left\{ \max_{(\text{in } R_{hk})} |\theta v| + |\theta(a_h, b_k) v(a_h, b_k)| \right\} \Bigg| (y -$$

$$- b_{3-k}) \int_{a_h+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_h+x}{2}} \left\{ - 4m \frac{x - a_{3-h}}{x - a_h} \left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h} \right)^{2m-1} \right\} d\xi \Bigg|$$

Ma:

$$\lim_{m \to \infty} \int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}} \left\{ - 4m \frac{y - b_{3-k}}{y - b_k} \left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k} \right)^{2m-1} \right\} d\eta =$$

$$= \int_{b_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{b_k+y}{2}} \left\{ \lim_{m \to \infty} \left[- 4m \frac{y - b_{3-k}}{y - b_k} \left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k} \right)^{2m-1} \right] \right\} d\eta = 0$$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{a_h+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_h+x}{2}} \left\{ - 4m \frac{x - a_{3-h}}{x - a_h} \left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h} \right)^{2m-1} \right\} d\xi =$$

$$= \int_{a_h+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_h+x}{2}} \left\{ \lim_{m \to \infty} \left[- 4m \frac{x - a_{3-h}}{x - a_h} \left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h} \right)^{2m-1} \right] \right\} d\xi = 0$$

Si ha poi:

$$\theta(a_h, b_k) v(a_h, b_k) \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}} \frac{\partial^4 \varphi_m}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta =$$

$$= \theta(a_h, b_k) v(a_h, b_k)(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})$$

laddove il secondo membro è indipendente da m.
Pertanto:

$$\lim_{m \to \infty} \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}} \theta v \frac{\partial^4 \varphi_m}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta = (x - a_{3-h})(y - b_{3-k}) \theta(a_h, b_k) v(a_h, b_k)$$

In maniera perfettamente analoga si trae:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{a_k}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{y}^{\frac{b_k+y}{2}}\theta v\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta=(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\theta(a_h,y)v(a_h,y)$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_{x}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{\frac{b_k+y}{2}}\theta v\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta=(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\theta(x,b_k)v(x,b_k)$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_{x}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{y}^{\frac{b_k+y}{2}}\theta v\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta=(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\theta(x,y)v(x,y)\,.$$

Dunque:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{a_k}^{x}\int_{b_k}^{y}\theta v\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta=(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\left\{\theta(a_h,b_k)v(a_h,b_k)-\right.$$
$$\left.-\theta(a_h,y)v(a_h,y)-\theta(x,b_k)v(x,b_k)+\theta(x,y)v(x,y)\right\}$$

e

$$\lim_{m\to\infty}\iint_R\theta v\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\,d\xi d\eta=(a_2-a_1)(b_2-b_1)\theta(x,y)v(x,y)-$$
$$-\sum_{h,k=1}^{2}(-1)^{h+k}(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\left\{\theta(a_h,y)v(a_h,y)+\right.$$
$$\left.+\theta(x,b_k)v(x,b_k)-\theta(a_h,b_k)v(a_h,b_k)\right\}$$

B) *Calcolo del* $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\iint_R\theta_\eta v\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\,d\xi d\eta$.

È ovviamente:

$$\iint_R\theta_\eta v\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\,d\xi d\eta=\sum_{h,k=1}^{2}(-1)^{h+k}\int_{a_h}^{x}\int_{b_k}^{y}\theta_\eta v\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\,d\xi d\eta$$

$$\int_{a_k}^{x}\int_{b_k}^{y} \theta_\eta v \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\, d\xi d\eta = \int_{a_k}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{y}(\ldots)d\xi d\eta + \int_{x}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{y}^{b_k}(\ldots)d\xi d\eta$$

$$\int_{a_k}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{y} \theta_\eta v \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\, d\xi d\eta =$$

$$= \int_{a_k}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{y} [\theta_\eta(x, \eta)v(x, \eta) - \theta_\eta(a_k, \eta)v(a_k, \eta)] \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\, d\xi d\eta +$$

$$+ \int_{a_k}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{y} \theta_\eta(a_k, \eta)v(a_k, \eta) \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\, d\xi d\eta .$$

Indicato con δ un numero positivo minore di $\frac{|x - a_h|}{2}$, si ha poi:

$$\int_{a_k}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{y} [\theta_\eta(\xi, \eta)v(\xi, \eta) - \theta_\eta(a_k, \eta)v(a_k, \eta)] \frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\, d\xi d\eta =$$

$$= \int_{a_k}^{a_k+(-1)^{k+1}\delta}\int_{b_k}^{y}(\ldots)d\xi d\eta + \int_{a_k+(-1)^{k+1}\delta}^{\frac{a_k+x}{2}}\int_{b_k}^{y}(\ldots)d\xi d\eta .$$

Per il teorema di HEINE-CANTOR, la funzione $\theta_\eta x$, continua in R, è ivi anche uniformemente continua, sicchè, assegnato ad arbitrio un numero positivo ε, prendendo δ abbastanza prossimo a zero, risulterà $|\theta_\eta(\xi, \eta)v(\xi, \eta) - \theta_\eta(a_k, \eta)v(a_k, \eta)| < \varepsilon$ per tutti i punti del rettangolo $(-1)^{k+1}a_k \leq (-1)^{k+1}\xi \leq \leq (-1)^{k+1}[a_k + (-1)^{k+1}\delta]$, $(-1)^{k+1}b_k \leq (-1)^{k+1}\eta \leq (-1)^{k+1}y$, e quindi, essendo la $\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}$ sempre del medesimo segno in

$(-1)^{h+1} a_h < (-1)^{h+1} \xi < (-1)^{h+1} \dfrac{a_h + x}{2}$, $(-1)^{k+1} b_k <$
$< (-1)^{k+1} \eta < (-1)^{k+1} y$, sarà:

$$\left| \int_{a_h}^{a_h+(-1)^{h+1}\delta} \int_{b_k}^{y} [\theta_\eta(\xi, \eta) v(\xi, \eta) - \theta_\eta(a_h, \eta) v(a_h, \eta)] \frac{\partial^3 \varphi_m}{\partial \xi^2 \partial \eta} \, d\xi d\eta \right| <$$

$$< \varepsilon \left| \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k}^{y} \frac{\partial^3 \varphi_m}{\partial \xi^2 \partial \eta} \, d\xi d\eta \right| = \varepsilon (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \left| (y - b_k) - \frac{y - b_k}{2m+1} \right| <$$

$$< \varepsilon (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \, | \, y - b_k \, | \, .$$

Inoltre si ha:

$$\lim_{m \to \infty} \int_{a_h+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k}^{y} [\theta_\eta(\xi, \eta) v(\xi, \eta) - \theta_\eta(a_h, \eta) v(a_h, \eta)] \frac{\partial^3 \varphi_m}{\partial \xi^2 \partial \eta} \, d\xi d\eta =$$

$$= \int_{a_h+(-1)^{h+1}\delta}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k}^{y} \left\{ [\theta_\eta(\xi, \eta) v(\xi, \eta) - \theta_\eta(a_h, \eta) v(a_h, \eta)] \lim_{m \to \infty} \frac{\partial^3 \varphi_m}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right\} d\xi d\eta = 0$$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}} \int_{b_k}^{y} \theta_\eta(a_h, \eta) v(a_h, \eta) \frac{\partial^3 \varphi_m}{\partial \xi^2 \partial \eta} \, d\xi d\eta =$$

$$= \int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}} \left[-4m \, \frac{x - a_{3-h}}{x - a_h} \left(\frac{2\xi - a_h - x}{x - a_h} \right)^{2m-1} \right] d\xi \int_{b_k}^{y} \left\{ (y - \right.$$

$$\left. - b_{3-k}) \theta_\eta(a_h, \eta) v(a_h, \eta) \lim_{m \to \infty} \left[1 - \left(\frac{2\eta - b_k - y}{y - b_k} \right)^{2m} \right] \right\} d\eta =$$

$$= (x - a_{3-h})(y - b_{3-k}) \int_{b_k}^{y} \theta_\eta(a_h, \eta) v(a_h, \eta) d\eta \, .$$

Pertanto:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{a_h}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{b_k}^{y}\theta_\eta v\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\,d\xi d\eta=(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\int_{b_k}^{y}\theta_\eta(a_h,\eta)v(a_h,\eta)d\eta$$

e analogamente

$$\lim_{m\to\infty}\int_{x}^{\frac{a_h+x}{2}}\int_{y}^{b_k}\theta_\eta v\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\,d\xi d\eta=-(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\int_{b_k}^{y}\theta_\eta(x,\eta)v(x,\eta)d\eta$$

Dunque:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{a_h}^{x}\int_{b_k}^{y}\theta_\eta v\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\,d\xi d\eta=$$

$$=(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\int_{b_k}^{y}[\theta_\eta(a_h,\eta)v(a_h,\eta)-\theta_\eta(x,\eta)v(x,\eta)]d\eta$$

e infine

$$\lim_{m\to\infty}\iint_R\theta_\eta v\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi^2\partial\eta}\,d\xi d\eta=$$

$$=-\sum_{h,k=1}^{2}(-1)^{h+k}(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\int_{y}^{b_k}[\theta_\eta(a_h,\eta)v(a_h,\eta)-$$

$$-\theta_\eta(x,\eta)v(x,\eta)]d\eta\,.$$

C) *Calcolo del* $\lim\limits_{m\to\infty}\iint\limits_R\theta_\xi v\dfrac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta^2}\,d\xi d\eta$.

Con procedimento analogo a quello adottato in B) si ricava:

$$\lim_{m\to\infty}\iint_R\theta_\xi v\frac{\partial^3\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta^2}\,d\xi d\eta=$$

$$=-\sum_{h,k=1}^{2}(-1)^{h+k}(x-a_{3-h})(y-b_{3-k})\int_{x}^{a_h}[\theta_\xi(\xi,b_k)v(\xi,b_k)-\theta_\xi(\xi,y)v(\xi,y)]d\xi$$

D) *Calcolo del* $\lim_{m\to\infty}\iint_R \theta_{\xi\eta} v \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\, d\xi d\eta$.

Si ha:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{a_k}^{x}\int_{b_k}^{y} \theta_{\xi\eta} v \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\, d\xi d\eta = \int_{a_k}^{x}\int_{b_k}^{y}\left[\theta_{\xi\eta} v \lim_{m\to\infty}\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\right] d\xi d\eta =$$

$$= (x - a_{3-h})(y - b_{3-k})\int_{a_k}^{x}\int_{b_k}^{y}\theta_{\xi\eta} v d\xi d\eta$$

e quindi:

$$\lim_{m\to\infty}\iint_R \theta_{\xi\eta} v \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\, d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{2}(-1)^{h+k}(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})\int_{x}^{a_h}\int_{y}^{b_k}\theta_{\xi\eta} v d\xi d\eta \,.$$

E) *Calcolo del* $\lim_{m\to\infty}\iint_R \varphi_m p v d\xi d\eta$.

Ragionando come in D) si trae:

$$\lim_{m\to\infty}\iint_R \varphi_m p v d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{2}(-1)^{h+k}(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})\int_{x}^{a_h}\int_{y}^{b_k}(\xi - a_h)(\eta - b_k) p v d\xi d\eta \,.$$

Ricordando la (18) e che $v = g$ su FR risulta pertanto, qualunque sia il punto x, y interno ad R e, per continuità, addirittura in tutto R medesimo:

$$\lim_{m\to\infty}\iint_R\left[\left(\theta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\xi\eta} + p\varphi_m\right] v d\xi d\eta = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)\theta(x, y) v(x, y) -$$

$$- \sum_{h,k=1}^{2}(-1)^{h+k}(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})\Big\{\theta(a_h, y) g(a_h, y) +$$

$$+ \theta(x, b_k) g(x, b_k) -$$

$$- \theta(a_h, b_k)g(a_h, b_k) + \int_x^{a_h} [\theta_\xi(\xi, b_k)g(\xi, b_k) - \theta_\xi(\xi, y)v(\xi, y)]d\xi +$$

$$+ \int_y^{b_k} [\theta_\eta(a_h, \eta)g(a_h, \eta) - \theta_\eta(x, \eta)v(x, \eta)]d\eta -$$

$$- \Big\{ \int_x^{a_h}\int_y^{b_k} [\theta_{\xi\eta} + (\xi - a_h)(\eta - b_k)p]v d\xi d\eta \Big\} = 0$$

a cui si riduce la (3) per $u = v$, $\omega = \theta$, $\rho = p$, $f = 0$.

Dal teorema ora dimostrato e da 1 II segue immediatamente che:

II. - *La funzione* $v(x, y)$, *limite di una successione* (14) *minimizzante in* Γ *per il funzionale* (8) *ed equiconvergente in* R, *è dotata di derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad* x, y, x, y *continue in* R *e ivi soddisfa all'equazione differenziale* (9) *congiunta con la condizione* $u = g$ *su* FR.

§ 5. - Unicità della soluzione. Esistenza in Γ del minimo assoluto di $I[u]$.

7. - In primo luogo si dimostrerà il seguente lemma:

I. - *Se* $\psi(x, y)$ *è una funzione continua in* R *insieme con le derivate parziali prime e seconda mista, e nulla su* FR, *riuscirà*

$$I[\psi] = \iint_R [\theta(\psi_{xy})^2 + p\psi)dxdy = 0 \tag{19}$$

quando, e solo quando, $\psi = 0$ *in ogni punto di* R.

E' ovvio, infatti, che se la ψ è identicamente nulla in R, la (19) è soddisfatta. Inversamente, se per una funzione ψ verificante le condizioni enunciate, vale la (19), da questa si trae, in particolare,

$$\iint_R \theta(\psi_{xy})^2 dxdy = 0$$

e quindi $\psi_{xy} = 0$ in ogni punto di R, sicchè la ψ deve essere somma di una funzione $\alpha(x)$ della sola x e di una funzione $\beta(y)$ della sola y. Ma, essendo $\psi = 0$ su FR, si riconosce immediatamente che le $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ sono costanti e che pertanto è $\psi = 0$ in ogni punto di R.

Ne consegue che:

II. - *La funzione $v(x, y)$ è l'unico integrale continuo in R insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y dell'equazione differenziale* (9) *congiunta con la condizione $u = g$ su FR — sicchè ogni successione minimizzante in Γ per il funzionale* (8) *ed equiconvergente in R avrà necessariamente per funzione limite la $v(x, y)$ — ed è la sola funzione minimizzante assoluta in Γ per il funzionale* (8).

Si supponga infatti che $v'(x, y)$ sia un altro integrale della (9) verificante le condizioni richieste: evidentemente la funzione $\bar{v} = v' - v$ è continua in R insieme con le derivate menzionate nell'enunciato, nulla su FR e, in ogni punto di R, riuscirà pure:

$$(\theta \bar{v}_{xy})_{xy} + p\bar{v} = 0 .$$

Moltiplicando ambo i membri di questa identità per $\bar{v}$ e integrando in R, ove si tenga conto che $\bar{v} = 0$ su FR, si trae

$$\iint_R [\theta(\bar{v}_{xy})^2 + p\bar{v}^2] dxdy = 0$$

da cui, per I, segue $\bar{v} = 0$ in ogni punto di R.

Se poi $u(x, y)$ è una qualsivoglia funzione della classe Γ, si può scrivere, posto $u - v = \delta u$, $u = v + \delta u$, sicchè δu è una funzione continua in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e nulla su FR. Risulta allora:

$$I[u] = I[v] + I[\delta u]$$

giacchè

$$\iint_R [\theta v_{xy}(\delta u)_{xy} + pv\delta u] dxdy = \iint_R [(\theta v_{xy})_{xy} + pv]\delta u dxdy = 0.$$

Pertanto, essendo $I[v] > 0$ $I[\delta u] \geq 0$, si ha, come volevasi, $I[u] \geq I[v]$ per tutte le funzioni u di Γ e il segno uguale potrà sussistere soltanto a patto che sia $I[\delta u] = 0$, o, ciò che è lo stesso, per I, $u = v$ in ogni punto di R.

In particolare si ha che:

III. - *L'unica soluzione della* (9) *continua in* R *insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad* x, y, x, y *e nulla su* FR *è la costante zero.*

Non sarà inutile osservare che:

IV. - *La funzione* $v(x, y)$ *è la sola estremante relativa in* Γ *per il funzionale* (8).

Nel n. 3 si è visto infatti che se una funzione $u(x, y)$ di Γ è estremante relativa per il funzionale (8), la funzione $\theta u_{xy} + \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} pu\,dx\,dy$ è, in R, uguale alla somma di una funzione della sola x e di una funzione della sola y. Si supponga ora che $v'(x, y)$ sia un'altra estremante relativa in Γ per il funzionale (8), talchè si avrà, in ogni punto di R.

$$\theta v_{xy} + \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} pv\,dx\,dy = \alpha(x) + \beta(y), \quad \theta v'_{xy} + \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} pv'\,dx\,dy = \alpha'(x) + \beta'(y)$$

Posto $\bar{v} = v - v'$, $\bar{\alpha} = \alpha - \alpha'$, $\bar{\beta} = \beta - \beta'$, si ricava, sottraendo membro a membro,

$$\theta \bar{v}_{xy} + \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} p\bar{v}\,dx\,dy = \bar{\alpha}(x) + \bar{\beta}(y)$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per $\bar{v}_{xy}$ e integrando in R,

$$\iint_R \left[\theta(\bar{v}_{xy})^2 + \bar{v}_{xy}\int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} p\bar{v}\,dx\,dy\right]dx\,dy = \iint_R [\bar{\alpha}(x) + \bar{\beta}(y)]\bar{v}_{xy}\,dx\,dy$$

laddove il secondo membro è nullo per il lemma del n. 2, giacchè $\bar{v} = 0$ su FR.

Ma, integrando due volte per parti, ove si ricordi che $\bar{v} = 0$ su FR e conseguentemente $\bar{v}_x(x, b_1) = \bar{v}_x(x, b_2) = 0$ per

$a_1 \leq x \leq a_2$, si trae

$$\iint_R \left[\bar{v}_{xy} \int_{a_1}^{x}\int_{b_1}^{y} p\bar{v}dxdy\right]dxdy = \iint_R p\bar{v}^2dxdy$$

Pertanto:

$$\iint_R [\theta(\bar{v}_{xy})^2 + p\bar{v}^2]dxdy = 0$$

da cui, per I, $v = v'$ in ogni punto di R.

§ 6. - Alcune estensioni dei risultati ottenuti.

8. — Si mostrerà ora come il procedimento variazionale dei §§ precedenti consenta, con opportune modificazioni, di dimostrare che esiste un'unica soluzione continua insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto a x, y, x, y in R dell'equazione differenziale

$$(\theta u_{xy})_{xy} - (ru_x + su_y)_x - (tu_y + su_x)_y + pu = 0 \tag{20}$$

congiunta con la solita condizione $u = g$ su FR, ove $r(x, y)$, $s(x, y)$, $t(x, y)$ sono funzioni continue in R insieme con la derivata parziale rispetto ad x la prima e rispetto ad y la terza, con entrambe le derivate parziali prime la seconda, e tali inoltre che, in ogni punto di R, risulti

$$r \geq 0,\ t \geq 0,\ \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} \geq 0. \tag{21}$$

Infatti, per quanto concerne il § 1, posto, per ogni funzione $u(x, y)$ continua in R insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y.

$$Lu = (\omega u_{xy})_{xy} - (ru_x + su_y)_x - (tu_y + su_x)_y + \rho u$$

continua a sussistere 1 I con la sola variante che la u si considera dotata anche delle derivate parziali u_{xx}, u_{yy} continue in R e che nel secondo membro della (3) si aggiungono i termini

$$+\frac{1}{\omega}\sum_{h,k=1}^{2}\gamma_{hk}\left\{\int_{x}^{a_h}[t(\xi, y)u(\xi, y) - t(\xi, b_k)g(\xi, b_k)](\xi - a_h)d\xi + \right.$$

$$+\int_{y}^{b_k}[r(x, \eta)u(x, \eta) - r(a_h, \eta)g(a_h, \eta)](\eta - b_k)d\eta +$$

$$\left. +\int_{x}^{a_h}\int_{y}^{b_k} u[2s + (s_\xi + t_\eta)(\xi - a_h) + (s_\eta + r_\xi)(\eta - b_k)]d\xi d\eta \right\}.$$

Restano pure validi, come agevolmente si verifica, 1 II e 1 IV, mentre non vi ha luogo a considerare 1 III, giacchè nel caso in esame, contrariamente a quello del n. 1, occorre a priori la considerazione delle derivate u_{xx}, u_{yy}. Si noti altresì che per i ragionamenti del § suddetto non sono necessarie le (21).

Procedendo poi come al § 2 si riconosce che la (20) è l'equazione di LAGRANGE relativa al funzionale

$$\iint_R [\theta(u_{xy})^2 + r(u_x)^2 + 2\, s u_x u_y + t(u_y)^2 + pu^2]dxdy$$

che, nelle ipotesi ammesse, è limitato inferiormente nella classe Γ, sicchè continueranno a sussistere 3 I e 5 I, ove, in luogo della (15), si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\iint_R\left[\theta\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + r\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + s\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + t\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + pu_n\varphi\right]dxdy = 0.$$

Vale inoltre 5 III, ove si aggiunga l'ipotesi che la φ sia dotata di derivate parziali φ_{xx}, φ_{yy} limitate in R e continue in ogni punto interno a $R_{hk}(h = 1, 2, ..., m_1;\ k = 1, 2, ..., m_2)$ e che soddisfi alle condizioni $\varphi_x = \varphi_y = 0$ su FR e si consideri la

$$\iint\limits_R [(\theta\varphi_{xy})_{xy} - (r\varphi_x)_x - (s\varphi_y)_x - (s\varphi_x)_y - (t\varphi_y)_y + p\varphi]v\,dx\,dy = 0$$

in sostituzione della (17).

Dopodichè, osservando che le $\varphi_m(\xi, \eta)$ del n. 6 soddisfano anche alle nuove condizioni imposte alla φ per la validità di 5 III, si ottengono, anche per il caso in esame, i risultati dei §§ 4 e 5 con procedimenti del tutto analoghi a quelli colà adottati.

Sia notato infine che una trattazione dello stesso tipo porta alla risoluzione di un analogo problema al contorno per equazioni differenziali di forma simile in più di due variabili indipendenti: il relativo sviluppo algoritmico viene tralasciato per brevità e anche perchè appare ormai ben chiaro lo spirito del metodo acquisito.

PARTE SECONDA

§ 1. - Alcune considerazioni preliminari.

9. - Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea del quarto ordine alle derivate parziali

$$(\theta u_{xy})_{xy} + (p - \lambda q)u = 0 \tag{22}$$

ove $\theta(x, y)$ e $p(x, y)$ sono funzioni verificanti, nel dominio rettangolare $R \equiv (a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2)$ del piano x, y, le condizioni indicate al n. 3, $q(x, y)$ è una funzione continua e non identicamente nulla in R e λ è un parametro complesso.

Si vuol vedere per quali valori (autovalori) del parametro λ esiste un integrale (autofunzione o autosoluzione) della (22) che sia:

A) non identicamente nullo e continuo in R insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y.

B) nullo su FR.

Si ha anzitutto che:

Gli autovalori non possono essere che reali e diversi da zero.

Sia, infatti, $\lambda' + i\lambda''(\lambda'' \neq 0)$ un autovalore immaginario e $u'(x, y) + iu''(x, y)$ una autofunzione corrispondente. Risulta allora:

$$(\theta u'_{xy})_{xy} + i(\theta u''_{xy})_{xy} + [p - (\lambda' + i\lambda'')q](u' + iu'') = 0$$

da cui:

$$\begin{aligned} &(\theta u'_{xy})_{xy} + (p - \lambda' q)u' + \lambda'' q u'' = 0 \\ &(\theta u''_{xy})_{xy} + (p - \lambda' q)u'' - \lambda'' q u' = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Moltiplicando per u'' la prima e per u' la seconda delle (23), indi sottraendo membro a membro e integrando in R, si trae

$$\iint_R [u''(\theta u'_{xy})_{xy} - u'(\theta u''_{xy})_{xy}]dxdy + \lambda'' \iint_R q(u'^2 + u''^2)dxdy = 0$$

da cui, essendo nullo, come si riconosce integrando due volte per parti, il primo integrale, segue

$$\iint_R q(u'^2 + u''^2)dxdy = 0. \tag{24}$$

Moltiplicando per u' la prima e per u'' la seconda delle (23), indi sommando membro a membro e integrando in R, ove si tenga conto della (24) e che $u' = u'' = 0$ su FR, si ottiene:

$$\iint_R [\theta(u'_{xy})^2 + pu'^2]dxdy = 0 \qquad \iint_R [\theta(u''_{xy})^2 + pu''^2]dxdy = 0$$

da cui, per 7 I, segue $u' = u'' = 0$ in ogni punto di R in contraddizione con le ipotesi ammesse è ciò prova la prima parte dell'enunciato.

Si noti che se la $q(x, y)$ è non negativa, oppure non positiva, in ogni punto di R, la precedente conclusione si trae senz'altro dalla (24).

Che poi non esistono autovalori nulli discende immediatamente da 7 III giacchè per $\lambda = 0$ la (22) si riduce alla (9).

II. - *Se λ' è un autovalore e $u'(x, y)$ è una autofunzione corrispondente, risulta*

$$\lambda' \iint_R qu'^2 dxdy > 0\,. \tag{25}$$

Infatti moltiplicando per u' la $(\theta u'_{xy})_{xy} + (p - \lambda' q)u' = 0$ e integrando in R, ove si ricordi che $u' = 0$ su FR, si ricava:

$$\iint_R [\theta(u'_{xy})^2 + pu'^2]dxdy = \lambda' \iint_R qu'^2 dxdy$$

da cui, essendo il primo membro certamente positivo, segue la (25).

In particolare:

III. - *Se $q \geq 0$, oppure $q \leq 0$, in ogni punto di R, non esistono autovalori negativi, o corrispondentemente positivi.*

§ 2. - Esistenza degli autovalori.

10. - Si dimostrerà ora che:

Se la funzione $q(x, y)$ assume in R valori di segno opposto esistono una successione non decrescente di autovalori positivi e una successione non crescente di autovalori negativi. Se invece è $q \geq 0$, oppure $q \leq 0$, in ogni punto di R, esiste una successione non decrescente di autovalori positivi, o corrispondentemente non crescente di autovalori negativi.

Supposto che la funzione $q(x, y)$ assuma in R valori di segno opposto, si consideri il funzionale (8) nella classe Γ_0 delle funzioni $u(x, y)$ continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e verificanti le condizioni

$$u = 0 \quad \text{su } FR \tag{26}$$

$$\iint_R qu^2 dxdy = 1. \tag{27}$$

Indicato con λ_0 l'estremo inferiore del funzionale (8) in Γ_0, onde sarà, giusti la (27) e 7 I, $\lambda_0 > 0$, per tutte le $u(x, y)$ di Γ_0 riuscirà:

$$I[u] \geq \lambda_0 = \lambda_0 \iint_R qu^2 dxdy$$

ovvero

$$\iint_R [\theta(u_{xy})^2 + (p - \lambda_0 q)u^2] dxdy \geq 0\,. \tag{28}$$

Si osservi ora che la (28) vale anche per le $u(x, y)$ che, ferme restando tutte le altre condizioni, non verificano la (27): questa circostanza risulta evidente se $\iint_R qu^2 dxdy \leq 0$, mentre, se detto integrale è positivo e diverso da uno, consegue dal fatto che la (28) sussiste per cu con $c = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\iint_R qu^2 dxdy}}$.

Il primo membro di (28) è pertanto un funzionale dotato di estremo inferiore nullo nella classe $\Gamma_0' \supset \Gamma_0$ delle $u(x, y)$

continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e nulle su FR.

Si consideri poi, in base al n. 4, una successione

$$u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0\nu}, \ldots$$

minimizzante in Γ_0 per il funzionale (8) e uniformemente convergente in R, sicchè la relativa funzione limite $u_0(x, y)$ sarà continua in R e verificherà le (26) e (27). Evidentemente la suddetta successione è pure minimizzante in Γ_0' per il funzionale a primo membro di (28) e quindi relativamente a questo funzionale nella classe Γ_0' continueranno a sussistere 5 III e, per conseguenza, i ragionamenti del n. 6 con le $\varphi_m(\xi, \eta)$ definite nella stessa maniera, onde si riconosce che la $u_0(x, y)$ è dotata di derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y continue in R ed è ivi soluzione, non identicamente nulla, della (22) con $\lambda = \lambda_0$. Si noti tuttavia che, per la (26), non occorre più l'ipotesi, essenziale invece nel n. 5, che sia anche $\varphi_{xy} = 0$ su FR.

Resta in tal modo dimostrata l'esistenza di un primo autovalore positivo.

Si consideri ora il funzionale (8) nella classe $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$ delle $u(x, y)$ continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e verificanti le (26), (27) e la ulteriore condizione

$$\iint_R q u_0 u dxdy = 0 \tag{29}$$

Indicato con λ_1 l'estremo inferiore del funzionale (8) in Γ_1, talchè sarà manifestamente $\lambda_1 \geq \lambda_0$, per ogni $u(x, y)$ di Γ_1 si avrà:

$$\iint_R [\theta(u_{xy})^2 + (p - \lambda_1 q)u] dxdy \geq 0 \tag{30}$$

e, ragionando come per la (28), si riconosce che la (30) vale anche per le funzioni $u(x, y)$ che, ferme restando tutte le altre condizioni, non verificano la (27), sicchè il funzionale a primo membro di (30) ha per estremo inferiore lo zero nella classe $\Gamma_1' \supset \Gamma_1$ delle $u(x, y)$ continue insieme con le derivate parziali prime e seconda mista in R e verificanti le (26) e (29).

Si consideri inoltre, in base al n. 4, una successione

$$u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1\nu}, \ldots$$

minimizzante in Γ_1 per il funzionale (8) e uniformemente convergente in R, sicchè la relativa funzione limite $u_1(x, y)$ sarà continua e soddisferà alle (26), (27), (28): evidentemente la predetta successione è altresì minimizzante in Γ_1' per il funzionale a primo membro di (30) e pertanto relativamente a questo funzionale nella classe Γ_1' continuerà a sussistere 5 III, ove si aggiunga l'ipotesi che la φ verifichi la (29), giacchè nei ragionamenti del n. 5 si richiede che, per ogni numero naturale ν, la $u_{1\nu} \pm \tau\varphi$, con τ numero positivo arbitrario, appartenga alla classe Γ_1'.

Procedendo poi come al n. 6, ove si usino, in luogo delle $\varphi_m(\xi, \eta)$ colà definite, le $\varphi_m - \mu_{0m}u_0$, con μ_{0m} costante da determinarsi in modo che tali funzioni verifichino la (29), talchè sarà $\mu_{0m} = \iint\limits_R \varphi_m q u_0 d\xi d\eta$, si riconosce che la $u_1(x, y)$ è dotata di derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y continue in R ed è ivi soluzione, non identicamente nulla, della (22) con $\lambda = \lambda_1$.

L'esistenza di una successione non decrescente di autovalori positivi può essere dimostrata per induzione. Supposto, infatti, che esistano, qualunque sia il numero naturale $n \geq 2$, n autovalori $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, con $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$, a cui corrispondono rispettivamente le n autofunzioni $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, essendo $\lambda_k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ l'estremo inferiore del funzionale (8) nella classe Γ_k delle funzioni $u(x, y)$ continue insieme con le derivate parziali prime e seconda mista in R e verificanti le (26), (27) e, se $k \geq 1$, le k condizione

$$\iint\limits_R q u_0 u dx dy = 0, \quad \iint\limits_R q u_1 u dx dy = 0, \ldots, \quad \iint\limits_R q u_{k-1} u dx dy = 0,$$

si mostrerà che esiste un $(n + 1)$-esimo autovalore $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$.

Indicato con λ_n l'estremo inferiore del funzionale (8) nella classe $\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1}$ delle $u(x, y)$ continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e verificanti le (26), (27) e le n condizioni

$$\iint_R q u_h u dx dy = 0 \qquad h = 0, 1 \dots, n-1, \tag{31}$$

talchè sarà $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$, riuscirà:

$$\iint_R [\theta(u_{xy})^2 + (p - \lambda_n q)u^2] dx dy \geq 0 \tag{32}$$

per tutte le $u(x, y)$ di Γ_n e anche per tutte le $u(x, y)$ che, ferme restando tutte le altre condizioni, non soddisfano alla (27). Il funzionale a primo membro di (32) è perciò dotato di estremo inferiore nullo nella classe $\Gamma'_n \supset \Gamma_n$ delle $u(x, y)$ continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e verificanti le (26), (27) e (31).

Si consideri poi, sempre in base al n. 4, una successione

$$u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{n\nu}, \dots$$

minimizzante in Γ_n per il funzionale (8) e uniformemente convergente in R, sicchè la relativa funzione limite $u_n(x, y)$ sarà continua in R e soddisferà alle (26), (27) e (31): evidentemente la predetta successione è altresì minimizzante in Γ'_n per il funzionale a primo membro di (32) e pertanto relativamente a codesto funzionale nella classe Γ'_n continuerà a sussistere 5 III, ove si aggiunga l'ipotesi che la φ renda soddisfatte le (31) giacchè, per la deduzione del citato teorema, si richiede che, per $\nu = 1, 2, \dots$, la $u_{n\nu} \pm \tau\varphi$, con τ numero positivo arbitrario, appartenga a Γ'_n.

Procedendo infine come al n. 6, sempre relativamente al funzionale a primo membro di (32), ove si considerino, in luogo delle $\varphi_m(\xi, \eta)$ colà definite, le $\varphi_m - \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{hm} u_h$, con μ_{0m}, $\mu_{1m}, \dots, \mu_{n-1, m}$ costanti da determinarsi in modo che le indicate funzioni verifichino le (31), talchè sarà $\mu_{hm} = \iint_R q u_h \varphi_m d\xi d\eta$ $(h = 0, 1, \dots, n-1)$, si riconosce che la $u_n(x, y)$ è dotata di derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y continue in R ed è ivi soluzione, non identicamente nulla, della (22) con $\lambda = \lambda_n$.

Si può tuttavia rilevare che le costanti μ_{om}, μ_{1m}, .., $\mu_{n-1,m}$ non figurano nei calcoli del procedimento del n. 6, giacchè, ponendo nella (17) $\varphi = \varphi_m - \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{hm} u_h$ e $p - \lambda_n q$ in luogo di p, risulta:

$$0 = \iint_R \{ [\theta(\varphi_m - \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{hm} u_h)_{\xi\eta}]_{\xi\eta} +$$

$$+ (p - \lambda_n q)(\varphi_m - \sum_{h=0}^{n-1} \mu_{hm} u_h) \} u_n d\xi d\eta = \iint_R \left[\left(\theta \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\xi\eta} + \right.$$

$$\left. + (p - \lambda_n q)\varphi_m \right] u_n d\xi d\eta$$

come si deduce facilmente osservando che, per $h = 0, 1, \ldots, n-1$, risulta:

$$\left[\left(\theta \frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y}\right)_{xy} + (p - \lambda_n q) u_h\right] u_n = \left[\left(\theta \frac{\partial^2 u_h}{\partial x d y}\right)_{xy} + (p - \lambda_h q) u_h\right] u_n -$$

$$- (\lambda_n - \lambda_h) q u_n u_h$$

e, per le proprietà delle $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n$,

$$\left(\theta \frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y}\right)_{xy} + (p - \lambda_h q) u_h = 0, \qquad \iint_R q u_n u_h d\xi d\eta = 0$$

Si consideri ora il funzionale (8) sulla classe Γ_{-0} delle $u(x, y)$ continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e verificanti la (26) e la

$$\iint_R q u^2 dx dy = -1 . \tag{33}$$

Indicato con $-\lambda_{-0} (\lambda_{-0} < 0)$ l'estremo inferiore del funzionale (8) in Γ_{-0} e ragionando come nel caso di Γ_0, si riconosce che λ_{-0} è un autovalore negativo.

Indicato poi con $-\lambda_{-1} \geq -\lambda_{-0}$ l'estremo inferiore del funzionale (8) nella classe Γ_{-1} delle $u(x, y)$ continue insieme con le derivate parziali prime e seconda mista in R e verificanti le (26), (33) e la ulteriore condizione

$$\iint_R q u_{-0} u \, dx dy = 0 ,$$

ove u_{-0} è una autofunzione corrispondente a λ_{-0}, si deduce, ragionando come per Γ_1, che λ_{-1} è un autovalore negativo non superiore a λ_{-0}.

L'esistenza di una successione non crescente di autovalori negativi si dimostra per induzione.

Infine, l'ultima parte dell'enunciato discende immediatamente da 9 III e dalla precedente dimostrazione, osservando peraltro che, in tal caso, il funzionale (8) va considerato ovviamente, per ogni numero naturale n, soltanto nella classe Γ_n, o Γ_{-n}, secondochè risulta $q \geq 0$, o corrispondentemente $q \leq 0$, in ogni punto di R.

§ 3. - Prime proprietà degli autovalori e delle autofunzioni.

11. - Gli autovalori e le autosoluzioni, di cui al n. 10 si è dimostrata l'esistenza, godono delle seguenti proprietà di agevole dimostrazione:

I. - *Se $u_h(x, y)$ e $u_k(x, y)$ sono le autosoluzioni corrispondenti agli autovalori λ_h e λ_k, risulta:*

$$\iint_R q u_h u_k \, dx dy \begin{cases} = \ \ 0 & \text{se} \quad h \neq k \\ = \ \ 1 & \text{se} \quad h = k, \ \lambda_k > 0 \\ = -1 & \text{se} \quad h = k, \ \lambda_k < 0 \end{cases} \tag{34}$$

$$\iint_R [\theta (u_h)_{xy} (u_k)_{xy} + p u_h u_k] dx dy \begin{cases} = 0 & \text{se} \quad h \neq k \\ = |\lambda_k| & \text{se} \quad h = k \end{cases} . \tag{35}$$

La validità della (34) per $h = k$ e, se λ_h e λ_k sono entrambi positivi o negativi, per $h \neq k$, discende senz'altro da quanto si è detto nel n. 10.

Se invece $h \neq k$ e λ_h, λ_k sono di segno opposto, moltiplicando per u_k la prima e per u_h la seconda delle identità

$$\left(\theta\frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y}\right)_{xy} + (p - \lambda_h q) u_h = 0 \tag{36}$$
$$\left(\theta\frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}\right)_{xy} + (p - \lambda_k q) u_k = 0$$

indi sottraendo membro a membro e integrando in R, si trae:

$$\iint_R \left[u_k\left(\theta\frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y}\right)_{xy} - u_h\left(\theta\frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}\right)_{xy}\right] dxdy = (\lambda_h - \lambda_k)\iint_R q u_h u_k dxdy.$$

Ma il primo membro è nullo come ci si può convincere integrando due volte per parti e tenendo conto che $u_h = u_k = 0$ su FR, sicchè, essendo $\lambda_h - \lambda_k \neq 0$, si riconosce che, anche in questo caso, l'integrale a secondo membro è nullo.

Moltiplicando poi per u_h la seconda delle (36) e integrando in R, con facili calcoli si ottiene:

$$\iint_R [\theta (u_h)_{xy} (u_k)_{xy} + p u_h u_k] dxdy = \lambda_k \iint_R q u_h u_k dxdy$$

da cui, per le (34), seguono immediatamente le (35).

II. - *L'autovalore positivo $\lambda_n (n = 0, 1, ...)$ è il minimo valore che assume il rapporto*

$$\frac{\iint_R [\theta (u_{xy})^2 + p u^2] dxdy}{\iint_R q u^2 dxdy} \tag{37}$$

nella classe G_n delle funzioni $u(x, y)$: 1°) continue in R insieme con le derivate parziali prime e seconda mista, 2°) nulle su FR, 3°) verificanti, se $n \geq 1$, le n equazioni

$$\iint_R q u_0 u dxdy = 0, \quad \iint_R q u_1 u dxdy = 0, \ \ldots, \ \iint_R q u_{n-1} u dxdy = 0$$

e 4°) tali che $\iint_R q u^2 dxdy$ abbia un valore positivo.

L'autovalore negativo λ_{-n} $(n = 0, 1, ...)$ *è il massimo valore che assume il rapporto* (37) *nella classe* G_{-n} *delle funzioni* $u(x, y)$ *verificanti le condizioni* 1°), 2°) *e, se* $n \geq 1$, *le* n *equazioni*

$$\iint_R qu_{-0}u\,dxdy = 0, \iint_R qu_{-1}u\,dxdy = 0\,,\ \dots,\ \iint_R qu_{-(n-1)}u\,dxdy = 0$$

e tali che $\iint_R qu^2dxdy$ *abbia un valore negativo.*

Infatti, dalle (28), (30), (32) si trae, per ogni intero non negativo n,

$$\frac{\iint_R [\theta(u_{xy})^2 + pu^2]dxdy}{\iint_R qu^2dxdy} \geq \lambda_n$$

per tutte le $u(x, y)$ di G_n e il segno uguale sussiste effettivamente quando la $u(x, y)$ coincide, a meno di una costante moltiplicativa non nulla, con la $u_n(x, y)$.

In modo perfettamente analogo si procede nel caso di λ_{-n}.

Si osservi che il teorema or ora dimostrato si può enunciare in maniera equivalente considerando, in luogo delle G_n e G_{-n}, le classi Γ_n e Γ_{-n} (n. 10) e quindi sostituendo la condizione 4°) con l'altra che $\iint_R qu^2dxdy$ sia uguale a $+1$ o -1 secondochè trattasi di λ_n o di λ_{-n}, e, sotto questa condizione più restrittiva per le $u(x, y)$, l'espressione a numeratore di (37), cioè il funzionale (8), avrà per minimo il valore assoluto dell'autovalore considerato.

§ 4. - Proprietà di massimo-minimo degli autovalori e sue conseguenze.

12. - Si dimostrerà ora un'altra proprietà, detta di « massimo-minimo », di cui godono gli autovalori del n. 10.

I. - *Fissate ad arbitrio* $n \geq 1$ *funzioni* $z_0(x, y)$, $z_1(x, y)$, ..., $z_{n-1}(x, y)$ *continue in* R, *con* $e'_n(z_0, z_1, ..., z_{n-1})$ *si indichi l'estremo inferiore del funzionale* (37) *nella classe* $H_n(z_0, z_1, ..., z_{n-1})$ *delle* $u(x, y)$: 1°) *continue in* R *insieme con le derivate* *parziali prime e seconda mista,* 2°) *nulle su FR,* 3°) *verificanti le n equazioni*

$$(38)\qquad \iint_R qz_0 u\,dxdy = 0\,,\ \iint_R qz_1 u\,dxdy = 0\,,\ \ldots,\ \iint_R qz_{n-1} u\,dxdy = 0$$

e 4°) *tali che* $\iint_R qu^2 dxdy$ *abbia un valore positivo, e con* $e''_{-n}(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ *si denoti l'estremo superiore del funzionale* (37) *nella classe* $H_{-n}(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ *delle* $u(x, y)$ *verificanti le condizioni* 1°), 2°), 3°) *e tali che* $\iint_R qu^2 dxdy$ *abbia un valore negativo. Per ogni numero naturale n, l'autovalore positivo* λ_n *è il massimo valore che può assumere* $e'_n(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ *e l'autovalore negativo* λ_{-n} *è il minimo valore che può assumere* $e''_{-n}(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ *al variare, in tutti i modi possibili, delle n funzioni* $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ *continue in R.*

Considerata infatti la successione degli autovalori positivi, se $u_h(x, y)$ è l'autofunzione del n. 10 corrispondente a λ_h $(h = 0, 1, 2, \ldots)$, assegnate le $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, si può sempre determinare un sistema di $n+1$ costanti non tutte nulle $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tali che sussistano le n equazioni lineari e omogenee

$$c_0 \iint_R qz_k u_0 dxdy + c_1 \iint_R qz_k u_1 dxdy + \ldots + c_n \iint_R qz_k u_n dxdy = 0$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

sicchè la funzione $c_0 u_0 + c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$ appartiene evidentemente ad $H_n(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$.

Riuscirà pertanto:

$$e'_n(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \leq \frac{\displaystyle\iint_R \left[\theta\left(\sum_{h=0}^{n} c_h \frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y}\right)^2 + p\left(\sum_{h=0}^{n} c_h u_h\right)^2\right] dxdy}{\displaystyle\iint_R q\left(\sum_{h=0}^{n} c_h u_h\right)^2 dxdy}$$

laddove il secondo membro, per le (34) e (35), risulta uguale a

$\dfrac{\sum\limits_{h=0}^{n} c_h^2\lambda_h}{\sum\limits_{h=0}^{n} c_h^2} \leq \lambda_n$. Dunque:

$$e'_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \leq \lambda_n$$

qualunque siano le n funzioni, continue in R, $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ e il segno uguale può sussistere effettivamente quando, in particolare, $z_h = u_h$ $(h = 0, 1, \dots, n-1)$, giacchè in tal caso le (38) si riducono alle (31) e fra le $u(x, y)$ di $H_n(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv G_n$ vi è, qualunque sia la costante non nulla c, la cu_n, in corrispondenza alla quale il rapporto (37) viene ad assumere il valore λ_n, che costituisce (cfr. 11 II) il suo minimo in G_n.

In maniera perfettamente analoga si procede nel caso di λ_{-n}.

Dal teorema dimostrato discendono i seguenti teoremi di confronto tra gli autovalori, dedotti col procedimento del n. 10, relativi a due diverse equazioni differenziali del tipo (22).

II. - *Date le equazioni differenziali*

$$(22)\qquad (\theta u_{xy})_{xy} + (p - \lambda q)u = 0$$

$$(39)\qquad (\bar{\theta} u_{xy})_{xy} + (\bar{p} - \lambda q)u = 0$$

— *ove le funzioni* $\bar{\theta}(x, y)$, $\bar{p}(x, y)$ *soddisfano alle condizioni imposte rispettivamente alle* $\theta(x, y)$, $p(x, y)$ — *se risulta*

$$\theta(x, y) \leq \bar{\theta}(x, y)\,, \quad p(x, y) \leq \bar{p}(x, y) \qquad \textit{in ogni punto di } R,$$

l'n-esimo autovalore positivo (*negativo*) *relativo alla* (22) *e alle condizioni A*) *e B*) *del n.* 9 *sarà, per ogni numero naturale n, non superiore* (*non inferiore*) *all'n-esimo autovalore positivo* (*negativo*) *relativo alla* (39) *e alle medesime condizioni.*

III. - *Date le equazioni differenziali*

$$(22)\qquad (\theta u_{xy})_{xy} + (p - \lambda q)u = 0$$

$$(40)\qquad (\bar{\theta} u_{xy})_{xy} + (\bar{p} - \lambda \bar{q})u = 0$$

— *ove le funzioni* $\bar{\theta}(x, y)$, $\bar{p}(x, y)$, $\bar{q}(x, y)$ *verificano le ipotesi* *ammesse per le* $\theta(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ *rispettivamente — se in ogni punto di* R *risulta*

$$\theta(x, y) \leq \bar{\theta}(x, y), \quad p(x, y) \leq \bar{p}(x, y), \quad q(x, y) \geq \bar{q}(x, y) > 0$$

oppure

$$\theta(x, y) \leq \bar{\theta}(x, y), \quad p(x, y) \leq \bar{p}(x, y), \quad q(x, y) \leq \bar{q}(x, y) < 0$$

sicchè (9 III) *gli autovalori relativi alle suindicate equazioni e alle condizioni* A) *e* B) *del n.* 9 *saranno tutti positivi o rispettivamente negativi, l'n-esimo autovalore relativo alla* (22) *riuscirà, per ogni numero naturale* n*, non superiore, o corrispondentemente non inferiore, all'n-esimo autovalore relativo alla* (40).

La dimostrazione, che per brevità vien tralasciata, è perfettamente analoga a quella dei corrispondenti teoremi relativi alle equazioni differenziali ordinarie.

§ 5. - Altre proprietà degli autovalori.

13. — Si hanno inoltre i seguenti risultati.

I. - *Le successioni di autovalori dedotte al n.* 10 *sono divergenti.*

Ciò è stato dimostrato, per $p(x, y)$ identicamente nulla in R, da MANGERON (cfr. op. cit. nell'Introduzione). Poichè gli autovalori determinati dal suddetto autore godono della proprietà di massimo-minimo, la validità dell'asserto discende immediatamente da 12 II.

II. - *Gli autovalori relativi alla equazione* (22) *e alle condizioni* A) *e* B) *del n.* 9 *sono tutti e soli quelli delle successioni del n.* 10.

Supposto, infatti, che λ' sia un autovalore diverso da tutti quelli del n. 10, ogni autofunzione $u'(x, y)$ ad esso corrispondente è, come si riconosce col ragionamento adottato al n. 11 per dimostrare la prima delle (34) con $\lambda_h \neq \lambda_k$, ortogonale in R, rispetto alla funzione peso $q(x, y)$, a tutte le autofunzioni del n. 10. Ne risulta, ove si ricordi 9 II, che la $u'(x, y)$ appartiene a tutte le classi G_0, G_1, ..., G_n, ... oppure G_{-0}, G_{-1}, ..., G_{-n}, ...

(definite in 11 II), secondochè λ' e quindi $\iint\limits_R qu'^2 dxdy$ sono positivi o negativi, sicchè, ricordando l'osservazione finale del n. 11, λ' dovrebbe essere non inferiore a tutti gli autovalori positivi o non superiore a tutti gli autovalori negativi del n. 10 e ciò, per I, è impossibile.

III. - *$m \geq 2$ qualsivogliano delle autofunzioni del n.* 10 *sono linearmente indipendenti in R.*

Si supponga infatti che per certe m costanti $c_1, c_2, \ldots, c_m$ risulti, in ogni punto di R,

$$c_1 u_{k_1} + c_2 u_{k_2} + \ldots + c_m u_{k_m} = 0$$

ove $u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_m}$ indicano $m \geq 2$ autofunzioni scelte ad arbitrio fra quelle del n. 10.

E' allora evidentemente:

$$\iint\limits_R q u_{k_i}\left(\sum_{l=1}^{m} c_l u_{k_l}\right) dxdy = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

da cui, per le (34), si trae immediatamente $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

IV. - *Se m elementi di una delle successioni del n.* 10 *hanno un medesimo valore λ', all'autovalore λ' corrispondono m, e soltanto m, autofunzioni linearmente indipendenti in R ed m non può essere che finito.*

Infatti, se λ_k è un autovalore positivo tale che risulti:

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+m-1} < \lambda_{k+m}$$

laddove, in luogo di λ_{k-1}, si pone lo zero se k è nullo, dal n. 10 e da III discende intanto che a λ_k corrispondono m autofunzioni $u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+m-1}$ linearmente indipendenti in R.

Sia u' una ulteriore autofunzione corrispondente a λ_k e linearmente indipendente in R dalle precedenti m: essa non può risultare ortogonale in R, rispetto alla funzione peso q, a tutte le autofunzioni del n. 10 corrispondenti agli autovalori positivi (cfr. dimostrazione di II); tuttavia, come si riconosce col ragionamento del n. 11 citato nella dimostrazione di II, la u' riesce ortogonale in R, rispetto alla funzione peso q, alle autofunzioni del n. 10 corrispondenti agli autovalori positivi diversi da λ_k.

Pertanto, fra le $u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+m-1}$ ve ne saranno $r \geq 1$, che verranno indicate con $u_{l_1}, u_{l_2}, \ldots, u_{l_r}$, per cui risultano diversi da zero gli integrali

$$\iint_R q u_{l_1} u' dxdy, \quad \iint_R q u_{l_2} u' dxdy, \ldots, \iint_R q u_{l_r} u' dxdy.$$

Ma allora si possono determinare $r+1$ costanti, non tutte nulle, $c_0, c_1, \ldots, c_r$ tali che sussistano le r equazioni lineari e omogenee:

$$\iint_R q(c_0 u' + c_1 u_{l_1} + c_2 u_{l_2} + \ldots + c_r u_{l_r}) u_{l_i} dxdy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

sicchè l'autofunzione $c_0 u' + c_1 u_{l_1} + c_2 u_{l_2} + \ldots + c_r u_{l_r}$, che corrisponde pure a λ_k, risulta ortogonale in R, rispetto alla funzione peso q, alle $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ del n. 10 e ciò è possibile soltanto a patto che sia $c_0 u' + c_1 u_{l_1} + c_2 u_{l_2} + \ldots + c_r u_{l_r} = 0$ in ogni punto di R, in contraddizione con le ipotesi ammesse.

In modo perfettamente analogo si procede nel caso di un autovalore negativo.

Infine, m non può essere che finito, giacchè le successioni degli autovalori sono monotone e divergenti.

Per II si ha pure che:

V. - *Il teorema di massimo-minimo* (n. 12) *permette di definire, per ogni numero naturale n, l'$(n+1)$-esimo autovalore positivo o negativo indipendentemente dalla conoscenza degli autovalori e delle autofunzioni di indice minore di n.*

Un autovalore positivo [o negativo] si dirà *semplice* o *multiplo di ordine m* secondochè nella successione degli autovalori positivi [o negativi] esso compare una o m volte. Si osservi che, contrariamente a quanto accade nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, possono effettivamente esistere degli autovalori multipli: ad es. per l'equazione

$$u_{xyxy} + (p - \lambda q)u = 0$$

con p e q costanti ($q \neq 0$) una successione di autovalori relativi alle condizioni A) e B) del n. 9 è fornita da

$$\frac{n^4\pi^4}{q(a_2-a_1)(b_2-b_1)}+\frac{p}{q} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

e all'n-esimo autovalore di questa successione corrispondono le autofunzioni linearmente indipendenti in R:

$$\operatorname{sen} h\pi\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\cdot\operatorname{sen} k\pi\frac{y-b_1}{b_2-b_1}$$

con h, k interi tali che $h^2k^2=n^4$.

Inoltre è facile provare che:

VI. - *Se $q(x,y)\geq 0$ [oppure $q(x,y)\leq 0$] in tutto R, per ogni numero naturale n, l'n-esimo autovalore positivo [negativo], relativo alla equazione* (22) *e alle condizioni A) e B) del n.* 9, *non diminuisce [non aumenta] sostituendo ad R un dominio rettangolare $\overline{R}\subset R$.*

Infatti, le classi G_0, $H_1(z_0)$, $H_2(z_0, z_1)$, ... [o G_{-0}, $H_{-1}(z_0)$, $H_{-2}(z_0, z_1)$, ...], definite in 11 II e 12 I, relative al dominio rettangolare $\overline{R}$ possono considerarsi subordinate delle analoghe classi relative ad R, giacchè ogni funzione appartenente alle prime può sempre considerarsi uguale a zero in tutti i punti di $R-\overline{R}$. L'asserto si trae allora immediatamente, per il primo autovalore, da 11 II, e, per i successivi autovalori, da 12 I e da V.

Infine, ove si tenga presente il § 6, si riconosce che, salvo lievi mutamenti formali, i risultati di questa seconda parte sono validi anche nel caso dell'equazione differenziale

$$(\theta u_{xy})_{xy}-(ru_x+su_y)_x-(tu_y+su_x)_y+(p-\lambda q)u=0$$

e possono inoltre estendersi senza difficoltà ad equazioni di tipo analogo in più di due variabili indipendenti.