RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

JAURÈS CECCONI

Sul teorema di Gauss-Green per una particolare classe di superficie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 81-112

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__81_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUL TEOREMA DI GAUSS-GREEN PER UNA PARTICOLARE CLASSE DI SUPERFICIE (1)

Memoria (*) *di* JAURÈS CECCONI (*a Pisa*)

INTRODUZIONE

1. - Sia Σ una superficie orientata di Frechèt del tipo della 2-sfera e sia

$$(1) \qquad (\mathcal{T}, \mathcal{C}): \quad x = x(p) \quad , \quad y = y(p) \quad , \quad z = z(p) \quad , \quad p \varepsilon \mathcal{C}$$

una sua rappresentazione sulla sfera unitaria orientata $\mathcal{C}$; $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$; dello spazio $u_1 u_2 u_3$.

Sia K un cubo con i lati paralleli agli assi xyz contenente nel suo interno l'insieme $[\Sigma]$ dei punti appartenenti a Σ, sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in K.

In un precedente lavoro [2] 2) ho studiato la validità della uguaglianza

$$(2) \qquad \iiint_K f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \Sigma) dx dy dz = -\iint_\Sigma f(x, y, z) dy dz ,$$

ove $O(x, y, z; \Sigma)$ è l'indice topologico del punto (x, y, z) rispetto a Σ se $(x, y, z) \varepsilon \bar{\Sigma}$; è zero altrimenti; e l'integrale a secondo membro è l'integrale di Weierstrass esteso alla superficie Σ della funzione $f(x, y, z) \cdot H_1$ [7].

(*) Pervenuta in Redazione il 19 gennaio 1953.

1) Un sunto di questo lavoro è stato presentato al IV Congresso della U.M.I. (Taormina, 25-30 ottobre 1951).

2) Sullo stesso argomento vedasi anche la seguente nota: R. CACCIOPPOLI, *Misura e integrazione sulle varietà parametriche.* Nota III. Rend. Acad. Naz. Lincei, 12, 629-634, (1952).

In tale lavoro ho dimostrato il

TEOREMA A. - *Se la superficie* Σ *è data come sopra e se sono soddisfatte le seguenti ipotesi*:

a) Σ *ammette area secondo Lebesgue*, $L(\Sigma)$, *finita*,

b) *l'insieme* $[\Sigma]$ *ammette misura tridimensionale nulla*,

c) *la funzione* $f(x, y, z)$ *è continua in* K *ed ivi dotata di derivata parziale* $f_x(x, y, z)$ *continua*,

allora vale la (2).

In tale occasione ho anche fatto vedere, mediante un esempio, che la condizione b) non può essere rimossa se la nozione di punto interno a Σ è formulata mediante la considerazione di $O(x, y, z; \Sigma)$.

Nel presente lavoro darò una nuova formulazione del Teorema A e della uguaglianza (2) per superficie chiuse di Jordan supposte soltanto di area secondo Lebesgue finita.

In tale formulazione l'ipotesi b) verrà completamente soppressa in connessione con recenti ricerche di H. OKAMURA [12].

2. - In un recente interessante lavoro (al quale ha portato ulteriori contributi S. MIZOHATA [11]) H. OKAMURA ha studiato la uguaglianza di Gauss-Green prendendo in considerazione superficie orientate chiuse di Jordan; cioè superficie che sono l'immagine biunivoca e bicontinua di una 2-sfera orientata.

Nel suo lavoro H. OKAMURA introduce dapprima un concetto di variazione limitata per trasformazioni piane del tipo della 2-cella ed un corrispondente concetto di integrale di superficie.

Prende poi in considerazione la classe delle superficie orientate di Jordan Σ che possono decomporsi in un numero finito di porzioni $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ciascuna delle quali ammette sul quadrato unitario Q del piano uv una rappresentazione

$$(T^{(n)}, Q): \; x = x_n(u, v), \quad y = y_n(u, v), \quad z = z_n(u, v), \quad (u, v) \in Q$$

per la quale la trasformazione piana associata

$$(T^n_{(1)}, Q): \; y = y_n(u, v), \quad z = z_n(u, v), \quad (u, v) \in Q$$

risulta a variazione limitata nel suo senso.

Definisce quindi l'integrale di superficie sulla superficie chiusa Σ mediante la relazione

$$\iint_{\Sigma} f_x(x, y, z)dydz = \sum_{r=1}^{n} \iint_{S_r} f(x, y, z)dydz .$$

Allora dimostra che sotto conveniente ipotesi per $f(x, y, z)$ sussiste la uguaglianza

$$\iiint_{D_1} f_x(x, y, z)dxdydz = -\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dydz$$

qualunque sia la misura dell'insieme $[\Sigma]$, l'integrale triplo a primo membro essendo preso su di un insieme D_1 contenente oltre ai punti interni a Σ anche opportuni punti di $[\Sigma]$, anzichè sull'insieme dei soli punti interni a Σ come in questo caso si avrebbe in accordo con la (2).

3. - Il concetto di variazione limitata introdotto da H. Okamura è stato da noi confrontato [4] con quello introdotto da L. Cesari e T. Radò (questo ultimo concetto di variazione limitata sarà nel seguito indicato brevemente con B.V.).

In tale nota abbiamo fatto vedere che il concetto di variazione limitata di H. Okamura è meno comprensivo di quello B.V..

Infatti ivi abbiamo dimostrato che ogni trasformazione a variazione limitata nel senso di H. Okamura è anche B.V., senza che sia vero il viceversa, e che per ogni trasformazione a variazione limitata in ambedue i sensi le variazioni totali secondo le due definizioni coincidono.

Di più abbiamo fatto vedere che esistono trasformazioni assolutamente continue nel senso di L. Cesari e T. Radò (brevemente A.C.), ed addirittura A.C. e biunivoche che non sono a variazione limitata nel senso di H. Okamura.

Nella stessa nota [4] abbiamo anche preso in considerazione una classe di trasformazioni B.V. che sono anche a variazione limitata nel senso di H. Okamura.

4. - In vista dell'importanza che il concetto B.V. ha nella teoria dell'area secondo Lebesgue delle superficie di Frechèt (è mediante questo concetto, che L. CESARI ha potuto, fra l'altro, caratterizzare la superficie di Frechèt di area secondo Lebesgue finita) si riprende in questo lavoro l'idea di H. OKAMURA facendo uso del più generale concetto B.V..

Precisamente dimostriamo la seguente generalizzazione del Teorema di H. OKAMURA:

TEOREMA I. — Sia

$$(3)\qquad (T,\ C):\ x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)\ ,\ z = z(u,v)\ ,\ (u,v) \in C\ ,$$

ove $C \equiv [u^2 + v^2 \leq 1]$ *è il cerchio unitario del piano uv, una trasformazione continua di* C *in* xyz *che è costante sul contorno* C^* *di* C *e tale che* $T(P_1) \neq T(P_2)$ *se* P_1 *e* P_2 *sono due punti interni a* C *e distinti.*

Sia $\mathfrak{C}$ *la sfera unitaria considerata nel n. 1, sia* $(\mathfrak{T},\ \mathfrak{C})$ *la trasformazione del tipo della 2-sfera associata a* $(T,\ C)$ *nel senso di* L. CESARI ([8] pg. 23-24), *e sia* Σ *la superficie orientata di Frechèt del tipo della 2-sfera rappresentata da* $(\mathfrak{T},\ \mathfrak{C})$.

Sia $[\Sigma]$ *il sostegno di* Σ, *sia* D *l'insieme dei punti interni a* Σ. *Consideriamo per ogni punto* (y,z) *del piano* yz *l'insieme chiuso* E_{yz} *intersezione di* $D + [\Sigma]$ *con la retta parallela all'asse* x *per* (y,z), *quindi l'insieme* I_{yz} *costituito dalla riunione dei componenti massimali di* E_{yz} *che non sono ridotti a punti.*

Consideriamo infine l'insieme misurabile

$$D_1 = \sum_{(y,z)} I_{yz}\ .$$

Supponiamo inoltre che

a, 1) *la trasformazione piana associata a* $(T,\ C)$

$$(T_1, C):\qquad y = y(u,v)\quad ,\quad z = z(u,v)\quad ,\quad (u,v) \in C$$

sia B.V.,

a, 2) *una almeno delle trasformazioni piane associate a* $(T,\ C)$

$$(T_2, C):\qquad z = z(u,v)\quad ,\quad x = x(u,v)\quad ,\quad (u,v) \in C$$

$$(T_3, C):\qquad x = x(u,v)\quad ,\quad y = y(u,v)\quad ,\quad (u,v) \in C$$

sia B.V.,

b, 1) *$f(x, y, z)$ sia una funzione definita e continua su $D + [\Sigma]$, assolutamente continua in x per quasi ogni (y, z) su ciascuno dei componenti di I_{yz},*

b, 2) *la derivata parziale rispetto ad x di $f(x, y, z)$, $f_x(x, y, z)$, che esiste su quasi tutto D_1 ed è misurabile in virtù di* b, 1), *sia sommabile su D_1.*

Si ha allora

$$\iiint_{D_1} f_x(x, y, z) dx dy dz = \pm \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dy dz, \tag{4}$$

l'integrale a secondo membro esistendo in virtù della ipotesi a, 1) *ed il segno — [+] essendo preso se l'indice topologico rispetto alla superficie orientata Σ di un punto ad essa interno è $+1$ $[-1]$.*

Da questo teorema, in virtù del significato che il concetto B.V. ha per l'area secondo Lebesgue, si deduce immediatamente il seguente

TEOREMA II. - *Sia Σ una superficie orientata di Jordan di area secondo Lebesgue finita. Sia $f(x, y, z)$ una funzione che gode nei confronti di Σ delle proprietà enunciate nel Teorema I.*

Allora sussiste la (4) *con le stesse convenzioni circa la scelta del segno.*

PARTE I^a - CONSIDERAZIONI PRELIMINARI DI CARATTERE TOPOLOGICO

5. - Siano (T, C), (T_i, C); $i = 1, 2, 3$; Σ le trasformazioni continue e la superficie di Frechèt considerate nel n. 4.

Sia K_1 un quadrato del piano yz, con i lati paralleli agli assi y, z, contenente nel suo interno l'insieme $T_1(C)$ immagine secondo (T_1, C) del cerchio C. Se r è una regione semplice orientata di Jordan appartenente a C sia $O(y, z; T_1, r)$ l'indice topologico del punto (y, z) rispetto alla curva $T_1(r^*)$, immagine secondo (T_1, C) del contorno orientato r^* di r, se $(y, z) \overline{\varepsilon} T_1(r^*)$; sia zero altrimenti.

Se R è una regione di Jordan di connessione finita [3]) appartenente a C sia ugualmente $O(y, z; T_1, R)$ l'indice topologico del punto (y, z) rispetto all'immagine secondo (T_1, C) del contorno orientato completo di R se $(y, z) \overline{\varepsilon} T_1(R - R^0)$; sia zero altrimenti.

Sia σ_r. $[\sigma_R]$ un gruppo di regioni orientate di Jordan semplici $r_1, r_2, \dots, r_n$ [di connessione finita $R_1, R_2, \dots, R_n$] appartenenti a C prive a due a due di punti interni in comune e siano $\Psi(y, z; T_1, C), \Psi^*(y, z; T_1, C)$ rispettivamente così definite

$$\Psi(y, z; T_1, C) = \operatorname{extr}_{\sigma_r} \sup \sum_{i=1}^{n} |O(y, z; T_1, r_i)|,$$

$$\Psi^*(y, z; T_1, C) = \operatorname{extr}_{\sigma_R} \sup \sum_{i=1}^{n} |O(y, z; T_1, R_i)|,$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i possibili gruppi di regioni σ_r e σ_R rispettivamente.

Per un risultato di T. RADÒ [14] si ha quasi ovunque sul piano yz

$$\Psi(y, z; T_1, C) = \Psi^*(y, z; T_1, C).$$

Osserviamo anche che le funzioni $\Psi(y, z; T_1, C)$ e $\Psi^*(y, z; T_1, C)$ risultano integrabili nel quadrato K_1 poichè (T_1, C) è B.V..

6. - Sia a_{yz} la retta parallela all'asse x per il punto $P \equiv (y, z)$ del piano yz. Sia M un punto in cui essa incontra il sostegno $[\Sigma]$ della superficie Σ.

Poniamo le seguenti definizioni.

Diremo che la retta a_{yz} *attraversa in senso debole* Σ in M se su ogni segmento $M'M''$ di a_{yz} contenente M nel suo interno si trovano sia punti interni sia punti esterni a Σ.

Diremo che la retta a_{yz} *attraversa in senso forte* Σ in M se:

---

[3]) Una regione semplice orientata di Jordan può essere pensata come una regione di Jordan in connessione finita che ha un solo contorno.

$a)$ esiste sulla retta a_{yz} un segmento $M'M''$ contenente M nel suo interno tale che ogni punto di MM' $[MM'']$ sia interno od appartenente a Σ [esterno od appartenente a Σ] ,

$b)$ su ogni segmento appartenente a $M'M''$ si trova almeno un punto non appartenente a $[\Sigma]$,

Diremo che la retta a_{yz} *è radente in* M a Σ se:

$a)$ esiste un intorno $M'M''$ di M su a_{yz} ogni punto del quale è interno [esterno] a Σ od appartenente a $[\Sigma]$,

$b)$ in ogni intorno di M su a_{yz} si trova almeno un punto non appartenente a $[\Sigma]$.

Dal confronto delle prime due definizioni si deduce che se in M a_{yz} attraversa Σ in senso forte allora essa attraversa ivi Σ anche in senso debole, ma non viceversa.

7. - Ciò posto enunciamo i seguenti Lemmi la cui dimostrazione sarà data nei numeri successivi.

LEMMA 1. - *Sia (T, C) la trasformazione continua considerata nel n. 4 e sia Σ la superficie continua ad essa ivi associata.*

Sia $P \equiv (y, z)$ un punto del piano yz appartenente all'insieme $T_1(C)$ e distinto da $T_1(C^*)$. Sia a_{yz} la retta parallela all'asse x per il punto $P \equiv (y, z)$.

Siano M_1, M_2, ... , M_n n punti in cui a_{yz} attraversa in senso debole Σ.

Allora esistono almeno n regioni di Jordan, di connessione finita, R_1, R_2, ... , R_n, prive a due a due di punti interni in comune tali che

$$\mathfrak{O}(y, z; T_1, R_i) \neq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots n \, .$$

LEMMA 2. - *Siano (T, C), Σ, $P \equiv (y, z)$, a_{yz} date come nel Lemma 1. Supponiamo inoltre che i componenti massimali dell'insieme chiuso $T_1^{-1}(P)$ siano ridotti a punti.*

Sia M un punto in cui a_{yz} attraversa in senso forte Σ. Sia H il modello secondo (T, C) di M.

Allora ogni insieme aperto contenente H contiene un poli-

gono semplice π, *contenente* H, *per il quale è*

$$O(y, z; T_1, \pi) = \mp 1 ,$$

il segno — valendo se l'indice topologico dei punti interni a Σ, *rispetto a* Σ, *è* $+1$ *e se il segmento* $M'M''$, *di cui alla definizione del n.ro precedente, ha orientazione concorde a quella dell' asse* x .

LEMMA 3. - *Siano* (T, C), Σ, $P \equiv (y, z)$, a_{yz} *dati come nel Lemma 2.*

Sia M *un punto in cui* a_{yz} *è radente a* Σ. *Sia* H *il modello di* M *secondo* (T, C).

Allora in ogni insieme aperto contenente H, *contenuto in* C, *esiste un poligono* π, *contenente* H *nel suo interno, non passante per alcuno dei punti* $T_1^{-1}(P)$, *per il quale si ha*

$$O(y, z; T_1, \pi) = 0 .$$

Il Lemma 2 costituisce, in un caso particolare, una precisazione del Lemma 1.

8. - Riporto in questo numero il risultato di L. CESARI [4]) ([5], pg. 287) che è espresso dal seguente:

TEOREMA. - Siano (T, C), (T_i, C); $i = 1, 2, 3$; le trasformazioni continue considerate nel n. 4.

Sia G la collezione dei continui massimali g di C sui quali le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono tutte e tre costanti.

Supponiamo che (T, C) goda delle proprietà a, 1), a, 2) enunciate nel Teorema I. Allora per quasi ogni punto $P \equiv (y, z)$ di K_1 i componenti continui degli insiemi chiusi, appartenenti a C, $T_1^{-1}(P)$ sono anche continui g di G.

9. - Dai Lemmi 1, 2, 3 e dal risultato di L. CESARI richiamato nel n.ro precedente discende il seguente

---

[4]) Nella nota citata questo teorema è stato dimostrato nella ipotesi che (T_1, C), $(T_2\ C)$, (T_3, C) siano tutte e tre B. V.; il prof. L. CESARI mi ha fatto gentilmente sapere che esso vale anche nella formulazione più generale qui riportata.

TEOREMA III. - *Siano* (T, C), (T_i, C); $i = 1, 2, 3$; *le trasformazioni continue considerate nel n. 4.*

Sia, per ogni $(y, z) \varepsilon T_1(C)$, $N(y, z; T_1, C)$ *il numero dei punti, eventualmente infinito, in cui la retta* a_{yz} *attraversa in senso forte la superficie* Σ *associata a* (T, C) *come nel n. 4.*

Supponiamo che la trasformazione (T, C) *goda inoltre delle proprietà enunciate nel Teorema I.*

Allora quasi ovunque in K_1 *sussiste la uguaglianza*

$$\Psi(y, z; T_1, C) = \Psi^*(y, z; T_1, C) = N(y, z; T_1, C).$$

Inoltre quasi ovunque in K_1 *ciascuno di questi numeri è pari.*

Sia (y, z) un generico punto di $T_1(C)$, sia a_{yz} la retta ad esso relativa e sia M un punto in cui essa incontra l'insieme $[\Sigma]$.

Può presentarsi uno ed uno solo dei seguenti casi:

a) esiste un intorno di M su a_{yz} formato da soli punti di $[\Sigma]$,

b) a_{yz} attraversa in senso debole Σ in M,

c) a_{yz} è radente a Σ in M.

Osserviamo che in virtù del ricordato risultato di L. CESARI per tutti i punti $P \equiv (y, z) \varepsilon T_1(C)$ che non appartengono ad un insieme $\overline{L}_1$ di misura nulla i componenti massimali dell'insieme $T_1^{-1}(P)$ sono ridotti a punti in quanto lo sono, in virtù delle ipotesi, i continui g di G.

Da ciò si deduce che i punti $P \equiv (y, z)$ per i quali la retta a_{yz} ha un segmento in comune con $[\Sigma]$ costituiscono un insieme, L_1, di misura nulla.

Sia infatti $P \equiv (y, z) \varepsilon L_1$ e la retta a_{yz} abbia in comune con $[\Sigma]$ il segmento s_{yz}. Allora il modello $T^{-1}(s_{yz})$ di questo segmento secondo (T, C) è un continuo γ di C non ridotto ad un punto che fa parte anche dell'insieme $T_1^{-1}(P)$. Ciò prova che $(y, z) \varepsilon \overline{L}_1$ e che quindi L_1 ha misura nulla.

Osserviamo anche che poichè (T_1, C) è B.V. la funzione $\Psi^*(y, z; T_1, C)$ è sommabile e quindi finita su $T_1(C)$, salvo al più per i punti di un insieme E_1 di misura nulla.

Perciò in virtù del Lemma 1 e della definizione di

$\Psi^*(y, z; T_1, C)$ ha misura nulla l'insieme dei punti in cui a_{yz} attraversa in senso debole Σ infinite volte.

Consideriamo allora soltanto punti $(y, z) \varepsilon T_1(C) - T_1(C^*) - \overline{L}_1 - E_1$.

Per questi punti, con lo stesso significato delle notazioni, può presentarsi solamente uno di questi casi:

a') a_{yz} attraversa in senso forte Σ in M,

b') a_{yz} è radente a Σ in M,

il caso b') avendo luogo solo un numero finito di volte per ciascuno di questi (y, z).

Consideriamo l'insieme $T_1^{-1}(P)$ dei modelli di $P \equiv (y, z)$ secondo (T_1, C) in C. Un componente massimale di questo insieme, che è ridotto ad un punto poichè $(y, z) \overline{\varepsilon} \overline{L}_1$, è detto essenziale (T. RADÒ [13]) se ogni insieme aperto appartenente a C contiene una regione di Jordan R, di connessione finita, per la quale è

$$O(y, z; T_1, R) \neq 0 .$$

Ricordiamo che il numero $\Psi^*(y, z; T_1, C)$, che è finito poichè $(y, z) \overline{\varepsilon} E_1$, esprime, in virtù di un noto risultato di T. RADÒ ([13], [14]), il numero di questi modelli essenziali.

Fissato (y, z) sia $\Psi^*(y, z; T_1, C) = \mu$ e siano $H_1, H_2, \dots, H_\mu$ questi modelli essenziali.

Fissato (y, z) sia $N(y, ; T_1, C) = \nu$, siano $M_1, M_2, \dots, M_\nu$ i punti in cui a_{yz} attraversa Σ in senso forte e siano $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \dots, \overline{H}_\nu$ i modelli secondo (T, C) di questi punti.

In virtù del Lemma 2 ciascuno dei punti del gruppo $[\overline{H}_s; s = 1, 2, \dots, \nu]$ fa parte anche del gruppo $[H_t; t = 1, 2, \dots, \mu]$.

In virtù del Lemma 3 anche ciascuno dei punti del gruppo $[H_t; t = 1, 2, \dots, \mu]$ fa parte del gruppo $[\overline{H}_s; s = 1, 2, \dots, \nu]$.

Infatti ciascuno, sia H, dei punti del gruppo $[H_t]$ che non appartengono al gruppo $[\overline{H}_s]$, dovrebbe essere il modello secondo (T, C) di un punto in cui a_{yz} è radente a Σ.

Ed allora poichè il gruppo $[H_t]$ è finito potrebbe trovarsi un intorno di H cui non appartiene nessuno dei rimanenti punti di $[H^t]$, al quale apparterrebbe almeno una regione di

Jordan R, di connessione finita, contenente H, per la quale si avrebbe

$$O(y, z;\ T_1, R) \neq 0\,.$$

Ma in virtù del Lemma 3 potremmo anche trovare un poligono π interno ad R, contenente H nel suo interno, non passante per alcuno dei punti $T_1^{-1}(P)$ per il quale si avrebbe

$$O(y, z;\ T_1;\ \pi) = 0\,.$$

Otterremo in tal modo una regione di Jordan di connessione finita $R' = R - \pi^0$, per la quale avremmo

$$O(y, z;\ T_1,\ R') = O(y, z;\ T_1, R) - O(y, z;\ T_1, \pi) \neq 0\,.$$

In virtù di un risultato di T. RADÒ [13] allora la regione R' dovrebbe contenere un modello di (y, z) secondo $(T_1\ C)$ che è essenziale in C, ciò che è assurdo. I gruppi di punti $[H_t]$, $[\overline{H}_s]$ sono dunque coincidenti.

E perciò per ogni $(y, z) \,\varepsilon\, T_1(C) - T_1(C^*) - \overline{L_1} - E_1$ si ha

$$N(y, z;\, T_1, C) = \Psi^*(y, z;\, T_1, C)\,.$$

Il ragionamento prova anzi che, quasi ovunque in $T_1(C)$, il numero $N(y, z;\ T_1, C)$ è pari.

Il Teorema III è così completamente provato.

10. - In questo numero dimostro il Lemma 1.

Considero per ognuno dei punti M_i; $i = 1, 2, \ldots, n$; una coppia di punti M_i' e M_i'' appartenenti alla retta a_{yz}, il primo interno a Σ, il secondo esterno a Σ, tali che il segmento $M_i'M_i''$ contenga nel suo interno M_i e sia esterno a ciascuno dei rimanenti punti M_j; $j \neq i$.

Sia $2\delta > 0$ minore di ciascuna delle distanze che i punti M_i', M_i''; $i = 1, 2, \ldots n$; hanno dalla superficie Σ ed anche minore della distanza che $T_1(C^*)$ ha da $P \equiv (y, z)$.

Siano σ_i' e σ_i'' due sfere di centro rispettivamente in M_i' M_i'' e raggio $\dfrac{\delta}{4}$.

Sia Γ il cilindro circolare retto di asse a_{yz} e di raggio di base $\dfrac{\delta}{4}$.

Sia Γ_i la parte di Γ che è limitata inferiormente dall'emisfero inferiore di σ_i' e superiormente dall'emisfero superiore di σ_i''.

Sia

$$(T', C): \; x = x'(u,v) \; , \; y = y'(u,v) \; , \; z = z'(u,v) \; , \; (u,v) \varepsilon C$$

una trasformazione continua del cerchio C nello spazio xyz che gode delle seguenti proprietà:

a) $T'(C^*)$ è ridotto ad un punto,

b) esiste una decomposizione di C, mediante linee semplici rettificabili, in regioni semplici di Jordan a ciascuna r delle quali (T', C) fa corrispondere un triangolo t non ridotto nè ad un punto nè a un segmento,

c) a ciascun punto di t diverso da $T'(C^*)$ corrisponde uno ed un sol punto di r,

per la quale si abbia per ogni punto (u,v) di C

$$d[T(u,v) \; , \; T'(u,v)] < \delta/8 \, .$$

Sia $\mathcal{P}$ il poliedro orientato di Frechèt del tipo della 2-sfera che è associato a (T, C) secondo la costruzione di L. CESARI ([8] pg. 23-24) già considerata nel n. 4.

La distanza secondo Frechèt fra le due superficie Σ e $\mathcal{P}$ risulta così $< \delta/8$ e poichè la distanza che ogni punto $U_i' \equiv (x_i', y_i', z_i')$ appartenere alla sfera σ_i' ha dalla superficie Σ è $> \delta$ se ne può concludere in virtù della forma topologica del Teorema di Rouchè e del fatto che U_i' è interno alla superficie di Jordan Σ che

$$|O(x_i', y_i', z_i'; \mathcal{P})| = |O(x_i', y_i', z_i'; \Sigma)| = 1 \, .$$

Allo stesso modo si ha per ogni punto $U_i'' \equiv (x_i'', y_i'', z_i'')$ appartenente a σ_i''

$$|O(x_i'', y_i'', z_i''; \mathcal{P})| = |O(x_i'', y_i'', z_i''; \Sigma)| = 0 \, .$$

Osserviamo ora che, in virtù di una proprietà elementare, l'indice topologico di un punto (x, y, z) dello spazio xyz rispetto ad un poliedro orientato $\mathcal{P}$ è uguale alla differenza fra il numero delle faccie del poliedro che sono incontrate positivamente ([1] pg. 384) da una semiretta uscente da (x, y, z) e non appartenente nè ad alcuna faccia nè ad alcuno spigolo di $\wp$, ed il numero di quelle che sono incontrate negativamente.

Ne viene perciò che ogni asse $\overrightarrow{U_i' \, U_i''}$, non appartenente nè ad alcuna faccia nè ad alcuno spigolo di $\wp$, deve incontrare un numero dispari di faccie di $\wp$, mentre l'asse orientato come $\overrightarrow{U_i' \, U_i''}$ ed avente origine in U_i'' deve incontrare un numero pari o nullo di faccie di $\wp$.

Da ciò si può concludere che ogni segmento $U_i' \, U_i''$, la cui retta non appartenga nè a vertici nè a spigoli di $\wp$, deve incontrare un numero dispari di faccie di $\wp$.

Sia $P^* \equiv (y^*, z^*)$ un punto del piano yz distante da $P \equiv (y, z)$ per meno di $\delta/8$ e tale che la retta $a_{y^* z^*}$, condotta per P^* parallelamente all'asse x non incontri nè vertici nè spigoli di $\wp$.

Sia G_i l'intersezione di $[\wp]$ con l'insieme dei punti interni a Γ_i.

L'insieme $T'^{(-1)}(G_i)$ è aperto ed i suoi componenti massimali sono un numero finito di insiemi aperti e connessi $\gamma_{i,1}$, $\gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,\nu_i}$.

Uno almeno degli insiemi $\gamma_{i,s}$; $s = 1, 2, \dots \nu_i$; dovrà contenere un numero dispari di punti la cui immagine secondo $(T' \, C)$ appartiene alla retta $a_{y^* z^*}$. Diciamo γ_i questo insieme.

La frontiera di γ_i, per il modo è stato ottenuto γ_i, per il modo come si è presa la rappresentazione (T', C) e poichè $T_1'(C^*)$ è esterno al cilindro Γ, è costituita da un numero finito di linee di Jordan una delle quali $p_{i,0}$ contiene nel suo interno le rimanenti [5]) $p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,\mu_i}$, tutte queste linee essendo interne a C.

Sia R_i la regione di Jordan, orientata, di connessione finita, avente per contorno esterno $p_{i,0}$ e per contorni interni le linee $p_{i,1}. \, p_{i,2}, \dots, p_{i,\mu_i}$.

Voglio intanto dimostrare che si ha

$$O(y^*, z^*, T_1', R_i) = O(y^*, z^*; T_1', p_{i,0}) - \sum_{s=1}^{\mu_i} O(y^*, z^*; T_1', p_{is}) \neq 0,$$

---

5) Qualcuna di queste linee può essere ridotta ad un punto, ma questo caso può essere escluso modificando opportunamente $\wp$.

ove ho indicato con (T_1', C) la trasformazione piana associata a (T', C) così come (T_1, C) è associata a (T, C).

Siano infatti $(u_{i,s}, v_{i,s})$; $s = 1, 2, \ldots, 2l_i + 1$; i punti di γ_i, in numero dispari, la cui immagine secondo (T', C) appartiene ad $a_{y^* z^*}$, o ciò che è lo stesso, la cui immagine secondo (T_1', C) appartiene ad (y^*, z^*).

Per una proprietà elementare dell'indice topologico posso determinare per ogni $(u_{i,s}, v_{i,s})$ una circonferenza C_{is}, con centro in (u_{is}, v_{is}), interna a γ_i in modo che le circonferenze che così si ottengono non abbiano punti in comune e si abbia

$$O(y^*, z^*; T_1', C_{is}) = \mp 1, \quad s = 1, 2, \ldots, 2l_i + 1.$$

Sarà perciò

$$\sum_{s=1}^{2l_i+1} O(y^*, z^*; T_1', C_{is}) \neq 0.$$

Ma è intanto

$$O(y^*, z^*; T_1', R_i) = O(y^*, z^*; T_1' \, p_{i,0}) - \sum_{s=1}^{\mu_i} O(y^*, z^*; T_1', p_{i,s}) -$$
$$- \sum_{s=1}^{2l_i+1} O(y^*, z^*; T_1', C_{is}) + \sum_{s=1}^{2l_i+1} O(y^*, z^*; T_1', C_{is}),$$

ed in quanto la regione orientata di Jordan di connessione finita $R' = R - \sum_{s=1}^{2l_i+1} C^0_{i,s}$ non contiene nel suo interno alcun modello di $P^* \equiv (y^*, z^*)$ si ha

$$O(y^*, z^*; T_1', R_i') = O(y^*, z^*; T_1', p_{i,0}) - \sum_{s=1}^{\mu_i} O(y^*, z^*; T_1', p_{is}) -$$
$$- \sum_{s=1}^{2l_i+1} O(y^*, z^*; T_1', C_{is}) = 0.$$

E' dunque

$$O(y^*, z^*; T_1', R_i) \neq 0.$$

Osservo ora che la distanza fra i punti $P \equiv (y, z)$ e $P^* \equiv (y^*, z^*)$ è minore di $\delta/8$ e che la distanza di $P \equiv (y, z)$ dalla immagine secondo (T_1', C) del contorno di R_i è uguale a $\delta/4$.

Ne discende perciò in virtù di note proprietà dell'indice topologico che è anche

$$O(y, z; T_1', R_i) = O(y^*, z^*; T_1', R_i) \neq 0.$$

Osservo infine che per il modo come si è presa la trasformazione (T', C) la distanza secondo Frechèt fra ciascuna delle curve che sono immagini delle curve $p_{i,s}$; $s = 0, 1, 2, \dots, \mu_i$ rispettivamente secondo le trasformazioni piane (T_1, C) e $(T_1' C)$, è minore di $\delta/8$.

E poichè d'altra parte la distanza di $P \equiv (y, z)$ da ciascuna delle curve $T_1'(p_{i,s})$ è uguale a $\delta/4$, si può dedurre in virtù della forma topologica del Teorema di Rouchè

$$O(y, z;\ T_1',\ p_{i,s}) = O(y, z;\ T_1,\ p_{i,s});\ s = 0, 1, 2, \dots, \mu_i .$$

E' quindi in definitiva

$$O(y, z;\ T_1,\ R_i) \neq 0 .$$

Il Lemma 1 è così dimostrato.

11. - In questo numero dimostro il Lemma 2.

Siano (T, C), (T_i, C); $i = 1, 2, 3$; Σ, $P \equiv (y, z)$, a_{yz}, M, H dati come nell'enunciato del Lemma.

Siano M' ed M'' due punti di a_{yz}, rispettivamente interno ed esterno a Σ, tali che il segmento $M'M''$ contenga M nel suo interno e tali che su $M'M''$ si trovi almeno un punto non appartenente a $[\Sigma]$.

Sia Ω un intorno circolare di centro H, interno a C, tale che l'intersezione dell'insieme $T(\Omega)$, immagine di Ω secondo (T, C), con la retta a_{yz} sia interna a $M'M''$.

L'insieme $T_1^{-1}(P)$ è chiuso ed i suoi componenti massimali sono ridotti a punti in virtù della ipotesi fatta su $P \equiv (y, z)$.

L'insieme complementare in Ω^0 di $T_1^{-1}(P)$ è perciò un insieme aperto e connesso, ed inoltre su ogni semiretta avente origine in H si trovano punti di Ω^0 non appartenenti a $T_1^{-1}(P)$.

Esiste allora in Ω^0 una linea poligonale semplice chiusa π_0^*, contenente H nel suo interno, alla quale non appartengono punti di $T_1^{-1}(P)$.

Supponiamo, come nell'enunciato del Lemma, che la semiretta $M'M''$ sia orientata in modo concorde all'asse x.

Consideriamo ora l'insieme $T(\pi_0)$, immagine secondo (T, C) del poligono π_0 limitato da π_0^*, e l'insieme $M'M'' \cdot T(\pi_0)$ intersezione di $T(\pi_0)$ con $M'M''$. Questo insieme è chiuso.

Sia $\overline{M}'$ il primo (secondo l' orientazione della semiretta $M'M''$) dei punti di questo insieme, $\overline{M}''$ l' ultimo [6]).

Consideriamo l'insieme chiuso $C - \pi_0{}^0$ ottenuto togliendo da C l'insieme $\pi_0{}^0$ dei punti interni a π_0, e l'insieme $T(C - \pi_0{}^0)$.

Due casi possono presentarsi: o l'insieme $\overline{M}'\overline{M}'' \cdot T(C - \pi_0^0)$ è vuoto, oppure no. Nel primo di questi casi indichiamo, d'ora in avanti, con π il poligono π_0, ed osserviamo che i modelli, $T^{-1}(\overline{M}')$ e $T^{-1}(\overline{M}'')$, di $\overline{M}'$ e $\overline{M}''$ secondo (T, C), che per le nostre ipotesi sono ridotti a punti, sono interni a π.

Perciò in virtù della ipotesi di semplicità fatta su (T, C), e poichè è $P \equiv (y, z) \neq T_1(C^*)$, esiste un intorno sinistro di $\overline{M}'$ (destro di $\overline{M}''$) al quale non appartiene nessun punto di $[\Sigma]$.

Siano N' *e* N'' due punti di tali intorni, che risultano perciò, rispettivamente interno ed esterno a Σ.

Ne viene perciò che l'insieme in cui $T(\pi)$ incontra a_{yz} è interno a $N'N''$, mentre l'insieme in cui $T(C - \pi^0)$ incontra a_{yz} è esterno a $N'N''$.

Nel secondo caso consideriamo l'insieme chiuso $\overline{M}'\overline{M}'' \cdot T(C - - \pi_0^0)$. Questo insieme ha distanza positiva da M in virtù delle ipotesi fatte su (T, C) e su $P \equiv (y, z)$.

Sia $\overline{\overline{M}}'$ l'ultimo dei punti di $\overline{M}'M \cdot T(C - \pi_0^0)$, $\overline{\overline{M}}''$ il primo dei punti di $\overline{M}M'' \cdot T(C - \pi_0^0)$. Questi due punti sono per quanto si è detto sopra distinti da M.

Per le ipotesi fatte su (T, C), su $P \equiv (y, z)$ e per il modo come si sono definiti $\overline{\overline{M}}'$ *e* $\overline{\overline{M}}''$ esiste un intorno destro di $\overline{\overline{M}}'$ (sinistro di M'') cui non appartengono punti di $[\Sigma]$.

Siano in questo caso N' *e* N'' punti appartenenti a questi intorni, interno ed esterno rispettivamente a Σ.

Consideriamo ora l'insieme dei punti appartenenti a π_0 le cui immagini secondo (T, C) appartengono agli intervalli chiusi $\overline{M}'\overline{\overline{M}}''$, $\overline{\overline{M}}'\overline{M}''$. Questo insieme è chiuso ed i suoi componenti massimali sono ridotti a punti in virtù delle ipotesi.

Diciamo F_1 tale insieme chiuso, diciamo F_2 l'insieme chiuso dei punti di π_0 le cui immagini secondo (T, C) apparten-

---

6) I punti $\overline{M}'$ e $\overline{M}''$ possono eventualmente coincidere.

gono all'intervallo chiuso $\overline{\overline{M'}}\,\overline{\overline{M''}}$. Questi insiemi F_1 ed F_2 non hanno punti in comune.

Infatti se tali insiemi avessero un punto in comune (u, v) $\varepsilon\, \pi_0$, ivi si avrebbe $T(u, v) = \dfrac{\overline{\overline{M'}}}{\overline{\overline{M''}}}$ la quale contrasta, in virtù delle ipotesi su (T, C) e $P \equiv (y, z)$, con il fatto che in $C - \pi_0$ esiste un punto (u', v') in cui $T(u', v') = \dfrac{\overline{\overline{M'}}}{\overline{\overline{M''}}}$.

Notiamo anche che li'nsieme $\pi_0^0 - F_1$ è aperto e connesso in virtù della circostanza che i componenti di F_1 sono ridotti a punti.

E' perciò possibile, mediante il classico procedimento di Runge ([10] pg. 49), costruire un gruppo di poligoni semplici $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, a due a due privi di punti in comune, interni a π_0, tali che ciascun punto di F_1 sia interno ad uno dei poligoni π_i; $i = 1, 2, \ldots, n$; e che ciascun punto di F_2 sia esterno ad ogni poligono π_i; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si può anche, in virtù delle nostre ipotesi, costruire un poligono semplice, che in questo caso chiamiamo π, contenente nel suo interno tutti i punti di F_2, rispetto al quale i punti di F_1 ed i punti di $C - \pi^0$ siano esterni.

Ciò può farsi nel seguente modo. Si considerino i poligoni $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ mediante i quali si è ricoperto l'insieme F_1, e si unisca un punto del contorno di ciascuno di questi poligoni con un punto del contorno del successivo mediante una spezzata interna a π_0 che non passi per alcuno dei punti di F_2. Ciò è possibile perchè i componenti massimali dell'insieme chiuso F_2 sono ridotti a punti e perciò l'insieme $\pi_0^0 - F_2$ è aperto e connesso ed anche perchè i punti di F_1 sono interni ai poligoni π_i; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ciascuna di queste spezzate ha da F_2 una distanza positiva, si può perciò condurre altrettante spezzate, diciamo per brevità parallele alle precedenti, che uniscono punti del contorno degli stessi poligoni, che non incontrano l'insieme F_2, che non incontrano le corrispondenti prima costruite, e tali che in ciascuna delle strisce così individuate non si trovino punti di F_2.

Sopprimiamo allora i punti dei contorni dei poligoni π_i; $i = 1, 2, \ldots, n$; che sono compresi fra spezzate parallele. Otteniamo in tal modo un poligono semplice contenente tutti i punti di F_1, al di fuori del quale stanno i punti di F_2. Uniamo con due spezzate alla stessa maniera due punti del contorno di questo poligono con due punti del contorno di π_0, sopprimiamo, come precedentemente, i punti dei contorni dei poligoni che stanno fra le spezzate parallele e veniamo in tal modo ad ottenere un poligono, π, che ha le proprietà richieste.

In entrambi i casi si può così costruire un poligono π interno a Ω, contenente H nel suo interno, non passante per alcun punto di $T_1^{-1}(P)$ e tale che ad esso si possono associare due punti N', N'' di a_{yz} dotati delle seguenti proprietà:

a) M è interno a $N'N''$,

b) N' è interno a Σ, N'' è esterno a Σ,

c) l'insieme in cui $T(\pi)$ incontra a_{yz} è interno a $N'N''$,

d) l'insieme in cui $T(C - \pi^0)$ incontra a_{yz} è esterno a $N'N''$.

Siano $\sigma(N')$ e $\sigma(N'')$ due sfere di centro N' e N'' rispettivamente interna ed esterna a Σ, e di ugual raggio d, minore della distanza che $T_1(C^*)$ ha da $P \equiv (y, z)$.

Sia

$$(T'^{(n)}, C):\ x = x_n'(u, v),\quad y = y_n'(u, v),\ z = z_n'(u, v),$$
$$(u, v) \in C,\ n = 1, 2, \ldots,$$

una successione di trasformazioni continue del cerchio C nello spazio xyz aventi le proprietà della trasformazione (T', C) considerata nel n. precedente, per la quale si abbia uniformemente sul cerchio C

$$\lim_{n \to \infty} T'^{(n)}(u, v) = T(u, v).$$

Siano $\wp_1, \wp_2, \ldots \wp_n, \ldots$ i poliedri di Frechèt del tipo della 2-sfera associati mediante la costruzione di L. CESARI [8] alle trasformazioni $(T'^{(n)}, C)$.

Sia n_1 un intero tale che se $n > n_1$ per ogni punto $(x', y', z') \in \sigma(N')$ si abbia

$$O(x', y', z'; \wp_n) = O(x', y', z'; \Sigma) = 1$$

ed anche per ogni punto $(x'', y'', z'') \varepsilon \sigma(N')$

$$O(x'', y'', z''; \wp_n) = O(x'', y'', z''; \Sigma) = 0.$$

Un tale intero esiste per il Teorema di Rouchè come si è visto nel n. precedente. Determiniamo ora un intero $n_2 > n_1$ ed un numero reale $\delta_1 > 0$ tali che se $n > n_2$ e $a_{y^*z^*}$ è una retta parallela all'asse x, distante da a_{yz} per meno di δ_1 e generica rispetto al poliedro $\wp_n$, associato a (T'_n, C), si abbia:

a) l'insieme $T'^{(n)}(\pi)$ incontra la retta $a_{y^*z^*}$ in punti del segmento $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$,

b) l'insieme $T'^{(n)}(C - \pi^0)$ non incontra la retta $a_{y^*z^*}$ in punti del segmento $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$.

Osserviamo intanto che in virtù di un ragionamento già fatto nel n. precedente ogni segmento $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$ incontra in numero dispari di punti $\wp_n$, se è generico rispetto ad esso.

Per quanto concerne la prima parte della affermazione ciò può vedersi nel seguente modo.

Sia Γ l'insieme chiuso limitato dal cilindro di asse a_{yz} e raggio d, uguale ai raggi delle sfere $\sigma(N')$, $\sigma(N'')$, e dalle semisfere superiori di $\sigma(N')$ ed inferiori di $\sigma(N'')$ rispettivamente.

Sia $\pi_{1/2d}$ l'insieme dei punti di π la cui immagine secondo (T, C) appartiene all'insieme Γ ed appartiene altresì al cilindro chiuso di asse a_{yz} e raggio $\frac{1}{2}d$.

L'insieme $T(\pi_{1/2d})$ è chiuso e non incontra le sfere $\sigma(N')$ e $\sigma(N'')$.

Sia $d + \varepsilon$; $\varepsilon > 0$: la minore delle distanze che l'insieme chiuso $T(\pi_{1/2d})$ ha dai punti N', N''.

Sia $\bar{n}$ un intero tale che se $n > \bar{n}$ si abbia

$$d[T(u, v), T'^{(n)}(u, v)] < \min\left[\frac{\varepsilon}{2}, \frac{d}{4}\right], \; (u, v) \varepsilon C.$$

Risulta allora che se il punto $(u, v) \varepsilon \pi_{1/2d}$ il corrispondente punto $T'^{(n)}(u, v)$ appartiene all'insieme Γ.

Mentre se $(u, v) \varepsilon \pi - \pi_{1/2d}$ si ha

$$d[a_{yz}, T'^{(n)}(u, v)] \geq d[a_{yz}, T(u, v)] - d[T(u, v), T'^{(n)}(u, v)] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} d - d[T(u, v), T'^{(n)}(u, v)] \geq \frac{1}{4} d,$$

BIBLIOTHÈQUE GRENOBLE UNIVERSITAIRE

e quindi che ciascuno dei punti $T'^{(n)}(u, v)$; $(u, v) \varepsilon \pi - \pi_{1/2d}$; è esterno al cilindro di asse a_{yz} e raggio $\frac{1}{4} d$.

Risulta così provato che se $a_{y^*z^*}$ è una retta parallela all'asse x e distante da a_{yz} per meno di $\frac{d}{4}$, allora i punti in cui essa incontra $T'^{(n)}(\pi)$ sono solo quelli in cui essa incontra $T'^{(n)}(\pi_{1/2d})$ e appartengono perciò al segmento $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$.

Per quanto concerne la seconda parte dell'affermazione osserviamo che la distanza fra l'insieme costituito dal segmento $N'N''$ e l'insieme $T(C - \pi^\circ)$ è > 0.

Sia d' questa distanza. E' allora, se $(u, v) \varepsilon C - \pi^\circ$ ed U indica un punto del segmento $N'N''$,

$$d[T(u, v), U] \geq d'.$$

E' quindi, se U^* è un punto appartenente al segmento $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$ che una retta $a_{y^*z^*}$ ha in comune con l'insieme Γ,

$$\begin{aligned} d[U^*, T'^{(n)}(u, v)] &\geq d[U, T'^{(n)}(u, v)] - d[U, U^*] \\ &\geq d[U, T(u, v)] - d[T(u, v), T'^{(n)}(u, v)] - \\ &\quad - d[U, U^*] \\ &\geq d' - d[T'^{(n)}(u, v), T(u, v)] - d[U, U^*] \end{aligned}$$

dove con U si è indicata la proiezione di U^* su a_{yz} se questa appartiene a $N'N''$, altrimenti si è indicato N' oppure N'' a seconda che questa proiezione è esterna a sinistra o a destra di $N'N''$.

Perciò se la distanza fra $a_{y^*z^*}$ e a_{yz} è minore di $\delta_1 = \min \left[\frac{1}{4} d, \frac{1}{8} d'\right]$, in modo che la distanza fra U e U^* sia minore di $\frac{1}{4} d'$, e se $n_2 > \bar{n}$ è un intero tale che per $n > n_2$ si abbia

$$d[T'^{(n)}(u, v), T(u, v)] < \frac{1}{4} d', \qquad (u, v) \varepsilon C,$$

si ottiene

$$d[U^*, T'^{(n)}(u, v)] > \frac{1}{2} d', \qquad (u, v) \varepsilon C$$

ciò che prova completamente la nostra affermazione.

Osserviamo ora che il punto $P \equiv (y, z)$ non appartiene alla immagine $T_1(\pi^*)$ del contorno π^* di π secondo (T_1, C).

Esiste allora in virtù di una nota proprietà dell'indice topologico, un numero positivo δ_2, minore del numero positivo δ_1 la cui esistenza è stata poco sopra affermata, tale che se $P^* \equiv (y^*, z^*)$ è un punto distante da $P \equiv (y, z)$ per meno di δ_2 si ha

$$O(y^*, z^*; T_1, \pi) = O(y, z; T_1, \pi).$$

Sia ora $n_3 > n_2$ un intero tale che, per $n > n_3$, $T_1'^{(n)}(\pi^*)$ non passi per nessuno dei punti $P^* \equiv (y^*, z^*)$ che distano da $P \equiv (y, z)$ per meno di δ_2, e si abbia

$$O(y^*, z^*; T_1'^{(n)}, \pi) = O(y^*, z^*; T_1, \pi) = O(y, z; T_1, \pi).$$

Siano $\pi_s^{(n)}$; $s = 1, 2, \ldots, \nu_n$; le regioni semplici di Jordan nelle quali il poligono π è suddiviso dalle regioni di Jordan che formano la decomposizione di C che è associata a $(T'^{(n)}, C)$.

Per una proprietà elementare dell'indice topologico si ha per tutti gli (y^*, z^*) distanti da (y, z) per meno di δ_2 per i quali la corrispondente retta $a_{y^*z^*}$ non incontra nè spigoli nè vertici del poliedro $\wp_n$ associato a $(T'^{(n)}, C)$

$$O(y^*, z^*; T_1'^{(n)}, \pi) = \sum_{s=1}^{\nu_n} O(y^*, z^*; T_1'^{(n)}, \pi_s^{(n)}).$$

Ciascuno dei numeri $O(y^*, z^*; T'^{(n)}, \pi_s^{(n)})$ vale ∓ 1 se e soltanto se la porzione $(T'^{(n)}, \pi_s^{(n)})$ della faccia del poliedro $\wp_n$ incontra la retta $a_{y^*z^*}$ in un punto ad essa interno, altrimenti vale zero.

Ne viene quindi per ciascuno dei punti (y^*, z^*) in questione e per ogni $n > n_3$

$$O(y, z; T_1, \pi) = O(y^*, z^*; T_1, \pi) = O(y^*, z^*; T_1'^{(n)}, \pi) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\nu_n} O(y^*, z^*; T'^{(n)}, \pi_s^{(n)}) = \Sigma' O(y^*, z^*; T'^{(n)}, \pi_s^{(n)}) = \Sigma'(\pm 1),$$

ove con Σ' si è indicata la somma estesa ai soli termini diversi da zero.

D'altra parte il segmento $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$, appartiene alla retta $a_{y^*z^*}$ in questione, per il modo come si è scelto n_3, deve incontrare un numero dispari di faccie di $\wp_n$ e queste, per il modo come si è scelto n_3, sono tutte e solo quelle che corrispondono alla porzione $T''^{(n)}(\pi)$ di $\wp_n$. Di più $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$ incontra ciascuna delle faccie di $\wp_n$ soltanto in punti interni alle porzioni di faccie $T'^{(n)}(\pi_s^{(n)})$ di $\wp_n$.

E' dunque

$$O(y, z; T_1, \pi) = \Sigma'(\mp 1)$$

la somma essendo così estesa ad un numero dispari di termini.

E' perciò in definitiva

$$O(y, z; T_1, \pi) \neq 0 .$$

Anzi possiamo precisare il valore di $O(y, z; T_1, \pi)$.

Supponiamo come nell'enunciato del Lemma, che per ogni punto interno a Σ sia $O(x, y, z; \Sigma) = +1$ e che la semiretta $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$ sia concorde all'asse x.

Allora la semiretta con origine in $N^{*\prime}$ ed orientata come l'asse x incontra un numero $k+1$ di faccie di $\wp_n$ positivamente ed un numero k di faccie di $\wp_n$ negativamente, mentre la semiretta con origine in $N^{*\prime\prime}$ e diretta come l'asse x incontra un numero di faccie positivamente ed altrettante negativamente.

Ora se la porzione $T'^{(n)}(\pi_s^{(n)})$ di faccia di $\wp_n$ è attraversata positivamente [negativamente] dalla semiretta $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$ il punto P è circondato negativamente [positivamente] dalla proiezione del contorno di questa faccia sul piano yz ed è quindi

$$O(y, z; T_1, \pi_s^{(n)}) = -1 \ [+1] .$$

Ne viene perciò che

$$O(y, z; T_1, \pi) = -1 .$$

Il Lemma 2 è così completamente dimostrato.

12. - In questo numero dimostro il Lemma 3.

Siano (T, C), (T_i, C); $i = 1, 2, 3$; Σ, $P \equiv (y, z)$, a_{yz}, M, H dati come nell'enunciato del Lemma.

Siano M' ed M'' due punti di a_{yz} tali che il segmento $M'M''$ contenga M nel suo interno, ogni punto di $M'M''$ sia interno a Σ o appartenente a $[\Sigma]$, su ogni intervallo appartenente a $M'M''$ si trovino punti non appartenenti a $[\Sigma]$.

Sia Ω un intorno circolare di H interno a C per il quale l'insieme $T(\Omega)\cdot a_{yz}$ appartenga a $M'M''$. Sia π_0 un poligono interno a Ω, contenente H nel suo interno e non passante per alcuno dei punti $T_1^{-1}(P)$.

Come nel n. precedente possiamo costruire, a partire da π_0, un poligono π interno a π_0, contenente H nel suo interno, non passante per alcuno dei punti $T_1^{-1}(P)$ e tale che ad esso si possa associare un segmento $N'N''$ di a_{yz} dotato delle seguenti proprietà:

a) M è interno a $N'N''$,

b) N' ed N'' sono entrambi interni a Σ,

c) l'insieme in cui $T(\pi)$ incontra a_{yz} è interno a N'',

d) l'insieme in cui $T(C - \pi^0)$ incontra a_{yz} è esterno a $N'N''$.

In modo analogo a quello del n. precedente consideriamo due sfere $\sigma(N')$, $\sigma(N'')$ interne a Σ (di centri rispettivi in N', N'') l'insieme Γ, i segmenti $N^{*\prime}, N^{*\prime\prime}$ e le successioni $(T'^{(n)}, C), \wp_n$.

Come nel n. precedente si prova che esistono un intero n_0 ed un numero positivo δ tali che

a') per ogni $(x', y', z') \varepsilon \sigma(N')$, $(x'', y'', z'') \varepsilon \sigma(N'')$ e per $n > n_0$

$$O(x'', y'', z''; O(x', y', z'; \Sigma) = \wp_n) = 0\,,$$

b') per ogni $n > n_0$ l'eventuale insieme in cui $T'^{(n)}(\pi)$ incontra una retta [7]) $a_{y^*z^*}$ distante da a_{yz} per meno di δ appartiene a $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$, quello in cui $T'^{(n)}(C - \pi^0)$ incontra la stessa retta non appartiene a $N^{*\prime}N^{*\prime\prime}$,

c') per ogni (y^*, z^*) distante da (y, z) per meno di δ e per ogni $n > n_0$ è

$$O(y^*, z^*; T_1'^{(n)}, \pi) = O(y^*, z^*; T_1, \pi) = O(y, z; T_1, \pi)\,.$$

Risulta allora anche in questo caso per ognuno di questi (y^*, z^*) per il quale la corrispondente retta $a_{y^*z^*}$ non incontra nè vertici nè spigoli di $\wp_n$

$$O(y, z; T_1, \pi) = \Sigma' O(y^*, z^*; T_1'^{(n)}, \pi_s^{(n)}) = \Sigma\ (\mp 1)\,,$$

---

[7]) Anche qui si intende generica rispetto a $\wp_n$.

i termini del secondo e del terzo membro avendo lo stesso significato che nel n. precedente.

Ora, in questo caso, la semiretta con origine in $N^{*\prime}$ ed orientata come l'asse x incontra un numero $k+1$ di faccie di $\wp_n$ positivamente ed un numero k negativamente, analogamente accade per la semiretta avente origine in $N^{*\prime\prime}$ ed orientata come l'asse x.

Si ha perciò con gli stessi argomenti del n. precedente

$$O(y, z; T_1, \pi) = 0 .$$

Con ciò anche il Lemma 3 è dimostrato.

PARTE II. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I.

13. - In questo numero dimostro che l'insieme D_1 considerato nell'enunciato del Teorema I è misurabile.

Siano m, M la minima e la massima ascissa dei punti dell'insieme $[\Sigma]$.

Sia

$$r_{n,k} = m + \frac{M-m}{n} \cdot k\,; \quad n = 1, 2, \dots, k = -1, 0, 1, \dots n, n+1.$$

Sia $\{r_s\}$ la successione ottenuta ordinando nel modo classico l'insieme ovunque denso dei numeri razionali.

Sia $\{r_s^{(n,k)}\}$ la successione estratta da $\{r_s\}$ considerandone i soli termini che appartengono all'intervallo chiuso $(r_{n,k-1}, r_{n,k+1})$.

Consideriamo i seguenti insiemi misurabili:

$$e_\xi = E[(y, z);\ (\xi, y, z) \varepsilon D + [\Sigma]] ,$$

$$e'_{n,k} = \min \lim_{s \to \infty} e_{r_s^{(n,k)}}\,; \quad n = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, n ,$$

$$e_{n,k} = e'_{n,k} + e'_{n,k+1}\,; \quad n = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, n-1 ,$$

$$\Delta_{n,k} = E[(x, y, z);\quad (y, z) \varepsilon e_{n,k}\,,\ r_{n,k} \leq x < r_{n,k+1}]\,;$$
$$n = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, n-1 ,$$

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_{n,k} .$$

Ora si ha

$$D_1 = \max \lim_{n \to \infty} \Delta_n .$$

L'insieme D_1 è quindi misurabile.

14. - Sono ormai in grado di dimostrare il Teorema I.

Siano (T, C), (T_i, C); $i = 1, 2, 3$; Σ, $f(x, y, z)$ date come nell'enunciato del Teorema.

Supponiamo, per fissare le idee, che l'indice topologico di ciascun punto interno a Σ rispetto a Σ sia $+1$.

Sia M il massimo del valore assoluto della funzione $f(x, y, z)$ nell' insieme chiuso $D + [\Sigma]$.

Prolunghiamo questa funzione $f(x, y, z)$ su tutto lo spazio xyz fino ad una funzione $F(x, y, z)$ uniformemente continua su tutto xyz per la quale si abbia inoltre $|F(x, y, z)| \leq M$ su tutto xyz.

Sia $[\pi_i \,;\, i = 1, 2, \dots n]$ un gruppo di poligoni di C privi a due a due di punti interni in comune. Relativamente a questo consideriamo, con L. CESARI, i seguenti numeri

$$m = \left| \sum_{i=1}^{n} T_1(\pi_i^*) \right|, \quad \delta = \max_{i=1, 2, \dots, n} \operatorname{diam} T(\pi_i), \quad \mu =$$

$$= \iint_{K_1} \psi(y, z \,;\, T_1, C) dydz - \sum_{i=1}^{n} \left| \iint_{K_1} O(y, z \,;\, T_1, \pi_i) dydz \right| .$$

Consideriamo anche il numero

$$\mu^* = \iint_{K_1} \psi(y, z;\, T_1, C) dydz - \sum_{i=1}^{n} \iint_{K_1} o(y, z;\, T_1, \pi_i) dydz$$

ove $o(y, z;\, T_1, \pi_i)$ è 1 se $O(y, z;\, T_1, \pi_i)$ è diverso da zero, è zero altrimenti.

Per ogni gruppo di poligoni $[\pi_i]$ è $m \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\mu^* \geq 0$.

Inoltre in forza delle ipotesi ed in virtù dei teoremi di approssimazione di L. CESARI ([6] pg. 1367 e seg.) [8]) comunque si

---

[8]) Qui si fa nuovamente uso della formulazione riportata nel n. 8 del Teorema dato da L. CESARI in [5] pag. 287.

assegni $\gamma > 0$ si può determinare almeno un gruppo di poligoni $[\pi_i]$ di C per i quali è $m \leq \gamma$, $\delta \leq \gamma$, $\mu \leq \gamma$, $\mu^* \leq \gamma$.

Sia (u_i, v_i) un generico punto del poligono π_i. Poichè (T_1, C) è B.V. esiste finito il

$$\lim_{m,\mu,\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} F[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)] \cdot \iint_{K_1} O(y, z; T_1, \pi_i) dydz,$$

introdotto da L. CESARI [9]) [7] come integrale di Weierstrass della funzione $F(x, y, z) \cdot u$ sulla trasformazione (T, C), che nel corso del lavoro indichiamo con la notazione

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z) dydz. \quad ^{10})$$

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio determiniamo un numero $\sigma_1 > 0$ tale che per ogni insieme h appartenente a K_1, di misura $< \sigma_1$, sia

$$\iint_{h} \Psi(y, z; T_1, C) dydz < \frac{\varepsilon}{8M}.$$

Determiniamo poi un numero positivo $\sigma_2 > \sigma_1$ tale che se (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) sono due punti di xyz distanti fra di loro per meno di σ_2, sia [11])

$$|F(x_1, y_1, z_1) - F(x_2, y_2, z_2)| < \frac{\varepsilon}{4G(T_1, C)}.$$

ove con $G(T_1, C)$ si è indicato l'integrale

$$\iint_{K_1} \Psi(y, z; T_1, C) dydz.$$

Determiniamo quindi un numero positivo $\sigma_3 < \sigma_2$ tale che se $[\pi_i]$ è un gruppo di poligoni appartenenti a C, privi a due a

---

9) Per l'esistenza del generale integrale di Weierstrass considerato da L. CESARI occorre che (T_1, C), (T_2, C), (T_3, C) siano tutte e tre B.V.. Nel caso particolare, considerato qui, in cui l'integranda è $F(x, y, z) . u$ basta, come subito si riscontra, che solo (T_1, C) sia B.V.

10) Per una giustificazione di queste notazioni vedasi la nota [2].

11) Se $G(T_1, C) \neq 0$, altrimenti la dimostrazione è banale, i due membri della (4) essendo ovviamente nulli.

due di punti interni in comune, per il quale si ha max $[m, \delta, \mu, \mu^*] < \sigma_3$ risulti

$$\left| \iint_{\Sigma} F(x, y, z) dydz - \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i \cdot \iint_{K_1} O(y, z; T_1, \pi_i) dydz \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Consideriamo la differenza

$$d = \iint_{D_1} F_x(x, y, z) dxdydz - \left(- \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot \iint_{K_1} O(y, z; T_1, \pi_i) dydz \right),$$

ove con $F(u_i, v_i)$ si è indicato per brevità $F[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)]$.

In virtù del Teorema di Fubini può scriversi

$$d = \iint_{T(C)_1} \left\{ \int_{I_{yz}} F_x(x, y, z) dx \right\} dydz + \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot \iint_{K_1} O(x, z; T_1, \pi_i) dydz$$

ove con I_{yz} si è indicato, come nell'enunciato del Teorema, l'insieme che D_1 ha in comune con la retta a_{yz}.

Poichè $O(y, z; T_1, \pi_i)$; $i = 1, 2, \dots n$; è nullo fuori di $T_1(C)$ possiamo anche scrivere

$$d = \iint_{T_1(C)} \left\{ \int_{I_{yz}} F_x(x, y, z) dx + \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot O(y, z; T_1, \pi_i) \right\} dydz.$$

Osserviamo che in virtù dei Lemmi 1, 2, 3 e del Teorema III, l'insieme I_{yz} è costituito da un numero finito, $\frac{1}{2} N(y, z; T_1, C)$, di intervalli chiusi, eccettuato al più per gli (y, z) appartenenti ad un insieme, che diciamo I', di misura nulla [12]).

Possiamo perciò scrivere, anche in virtù della ipotesi che $F(x, y, z)$ è assolutamente continua in D rispetto ad x per quasi tutti gli (y, z) di $T_1(C)$,

$$d = \iint_{T_1(C) - I'} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}N(y, z; T_1, C)} [F(x_{2k}, y, z)] - F(x_{2k-1}, y, z)] + \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot O(y, z; T_1, \pi_i) \right\} dydz$$

[12]) Includiamo in I' anche i punti dell'insieme $\bar{L}_1$ del n. 9.

ove (x_{2k-1}, y, z), (x_{2k}, y, z); $k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2} N(y, z; T_1, C)$; sono i punti, ordinati nel verso positivo dell'asse x, nei quali la retta a_{yz} attraversa in senso forte Σ.

Sia ora I_1 l'insieme di punti di $T_1(C)$ nei quali non è

$$N(y, z; T, C) = \sum_{i=1}^{n} o(y, z; T_1, \pi_i) .$$

Per il modo come si è scelto il gruppo di poligoni $[\pi_i]$ la misura di questo insieme è minore di σ_3.

Infatti in quasi ogni punto $(y, z) \varepsilon I_1$ si ha

$$N(y, z; T_1, C) - \sum_{i=1}^{n} o(y, z; T_1, \pi_i) \geq 1 ,$$

è dunque allora

$$\text{mis}\, I_1 \leq \iint_{T_1(C)} \left\{ N(y, z; T_1, C) - \sum_{i=1}^{n} o(y\ \ y; T_1, \pi_i) \right\} dydz$$

e quindi

$$\text{mis}\, I_1 \leq \iint_{(T_1, C)} \left\{ \Psi(y, z\,.\ T_1, C) - \sum_{i=1}^{n} o(y, z; T_1, \pi_i, \right\} dydz < \sigma_3 .$$

Possiamo intanto scrivere

$$d = \iint_{T_1(C) - I' - I_1} \left\{ \sum_{k=1}^{1/2 N(y, z; T_1, C)} [F(x_{2k}, y, z) - F(x_{2k-1}, y, z)] + \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot O(y, z; T_1, \pi_i) \right\} dydz + \iint_{I_1} \left\{ \sum_{k=1}^{1/2 N(y, z; T_1, C)} [F(x_{2k}, y, z) - \right.$$

$$\left. - F(x_{2k-1}, y, z)] + \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot O(y, z; T_1, \pi_i) \right\} dydz = d_1 + d_2 .$$

Ricordiamo che in virtù delle definizioni si ha $\sum_{i=1}^{n} | O(y, z; T_1, \pi_i)| \leq \Psi(y, z; T_1, C)$.

Possiamo perciò dedurne che

$$|d_2| \leq \iint_{I_1} \left\{ M \cdot N(y, z; T_1, C) + M\Psi(y, z; T_1, C) \right\} dydz =$$

$$= 2M \iint_{I_1} \Psi(y, z; T_1, C) dydz$$

dalla quale, per il modo con cui si è scelto σ_3, si deduce

$$|d_2| \leq 2M \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Consideriamo ora il termine d_1.

Per ogni (y, z) appartenente a $T_1(C) - I' - I_1$ si ha $N(y, z; T_1, C) = \sum_{i=1}^{n} o(y, z; T_1, \pi_i)$. Ciò significa che per ciascuno dei punti in questione il gruppo di poligoni $[\pi_i ; i = 1, 2, \dots n]$ contiene $N(y, z; T_1, C) \equiv N$ poligoni $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots \bar{\pi}_N$ per ciascuno dei quali si ha

$$O(y, z; T_1, \bar{\pi}_i) \neq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots N \equiv N(y, z; T_1, C).$$

Siano $M_1, M_2, \dots M_N$ i punti nei quali la retta a_{yz} attraversa in senso forte Σ.

Siano $H_1, H_2, \dots H_N$ i modelli secondo (T, C) ridotti a punti di questi M_i.

In virtù del Lemma 3, precedentemente dimostrato, ciascuno di questi punti è interno ad uno dei poligoni $\bar{\pi}_i$.

Affermo che si ha

$$O(y, z; T_1, \bar{\pi}_i) = +1 \qquad (-1)$$

il segno $+$ $[-]$ essendo preso se nel corrispondente punto M_i la semiretta $\overrightarrow{a_{yz}}$ orientata come l'asse x, attraversa Σ dall'esterno verso l'interno oppure nel senso opposto.

Supponiamo, per fissare le idee, che nel punto M_i la semiretta $\overrightarrow{a_{yz}}$ attraversi in senso forte Σ dall'esterno verso l'interno.

L'asserto si prova osservando che in virtù del Lemma 2 esiste nell'interno di $\bar{\pi}_i$ un poligono $\bar{\bar{\pi}}_i$ per il quale si ha

$$O(y, z; T_1, \bar{\bar{\pi}}_i) = +1.$$

E poichè la regione R_i avente per contorno esterno $\bar{\pi}_i$ e per contorno interno $\bar{\bar{\pi}}_i$ non contiene alcun modello di (y, z) che sia essenziale per (T_1, C) in C risulta

$$O(y, z; T_1, R_i) = O(y, z; T_1, \bar{\bar{\pi}}_i) - O(y, z; T_1, \bar{\pi}_i) = 0$$

e quindi

$$O(y, z; T_1, \bar{\pi}_i) = O(y, z; T_1, \bar{\bar{\pi}}_i) = +1.$$

Si ha dunque

$$|d_1| \leq \left| \iint\limits_{T_1(C)-I'-I_1} \left| \sum_{k=1}^{1/2N} \left\{ [F(_{2k}, y, z) - \overset{\doteq}{F}(u_k, v_k)] - [F(x_{2k-1}, y, z) - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - F(u_k, v_k)] \right\} \right| dydz \right|$$

dove si è indicato con $\overline{F}(u_k, v,)$ la quantità $F(u_i, v_i)$ relativa al poligono $\overline{\pi}_i$ che contiene nel suo interno il punto H_i modello di (x_{2k-1}, y, z), ed in modo analogo si è definito $\overline{\overline{F}}(u_k, v_k)$.

Ma per il modo come si è scelto σ_8 si ha

$$|F(x_{2k}, y, z) - \overline{\overline{F}}(u_k, v_k)| < \frac{\varepsilon}{4G(T_1, C)}, \; |F(x_{2k-1}, y, z) -$$
$$- \overline{F}(u_k, v_k)| < \frac{\varepsilon}{4G(T_1, C)},$$

è dunque

$$|d_1| \leq \iint\limits_{T_1(C)-I_1} \frac{\varepsilon}{4G(T_1, C)} N(y, z; T_1, C) dydz \leq \frac{\varepsilon}{4G(T_1, C)} \cdot$$
$$\cdot \iint\limits_{T_1(C)} N(y, z; T_1, C) dydz = \frac{\varepsilon}{4},$$

e quindi

$$|d| \leq |d_1| + |d_2| \leq \varepsilon/2 .$$

Si ha così in virtù delle precedenti relazioni

$$\left| \iiint\limits_{D_1} F_x(x, y, z)\; dxdydz + \iint\limits_{\Sigma} F(x, y, z) dydz \right| < \varepsilon$$

e quindi per l'arbitrarietà di ε e per il modo come si è definita $F(x, y, z)$

$$\iiint\limits_{D_1} f_x(x, y, z) dxdydz = - \iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) dydz .$$

Il Teorema I è così completamente dimostrato.

15. - Notiamo che in accordo a quanto abbiamo fatto vedere nella nota [3] il nostro Teorema è suscettibile di una estensione a funzioni misurabili su $D + [C]$ anzichè continue su tale insieme.

16. - Notiamo infine che quanto abbiamo osservato nella nota [4] sul confronto fra i concetti di variazione limitata di L. CESARI e di H. OKAMURA ci consentirebbe di dare una nuova dimostrazione del Teorema II.

Occorrerebbe confrontare l'integrale di superficie introdotto da H. OKAMURA con quello di tipo di Weierstrass qui usato, e fare vedere che nella classe delle trasformazioni a variazione limitata secondo H. OKAMURA questi integrali coincidono.

Basterebbe quindi tenere presente che secondo un risultato di L. CESARI e R. E. FULLERTON [9] ogni superficie chiusa di Jordan di area secondo Lebesgue finita ammette una rappresentazione sul quadrato Q per la quale ciascuna delle trasformazioni piane associate è B.V. e regolare nel senso di L. CESARI.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALEXANDROFF P. - HOPF H.: *Topologie*. Berlin (1935).

[2] CECCONI J.: *Sul Teorema di Gauss-Green*, «Rend. Sem. Mat. Padova, 20, 194-218, (1951).

[3] — — *Un complemento al Teorema di Stokes*. in corso di stampa presso il «Rend. Sem. Mat. Padova».

[4] — — *Confronto tra recenti definizioni di variazione totale per trasformazioni piane*. «Boll. Un. Mat. Ital. (3). 8. 10-19, (1953).

[5] CESARI L.: *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita*, «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa» (2), 10, 253-294, (1941).

[6] — — *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*, «Mem. Accad. Ital.», 18, 1323-1481, (1943).

[7] — — *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*, «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa», (2). 13, 77-117 (1944).

[8] — — *Sulle superficie di Frechèt*, «Riv. Mat. Univ. Parma», 1, 19-44 (1950).

[9] CESARI L. - FULLERTON R. E.: *On regular representation of surfaces*, «Riv. Mat. Univ. Parma» 2, 279-288. (1951).

[10] KERÉKJARTO B. V.: *Vorlesungen über Topologie*, **I**, Berlin (1923).

[11] MIZOHATA S.: *Note to Okamura's last paper*, « Kyoto Math. Mem. », 26, 15-18, (1950).

[12] OKAMURA H.: *On the surface integral and Gauss-Green's theorem*, « Kyoto Math. Mem. », 26, 5-14, (1950).

[13] RADÒ T.: *Lenght and area*, « Amer. Math. Soc. » Colloquium Publications, XXX (1948).

[14] — — *Two-dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity*, « Duke Math. Jour. », 14, 587-608 (1947).