RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

Su una formula d'interpolazione per le funzioni razionali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 417-425

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__417_0>

SU UNA FORMULA D'INTERPOLAZIONE PER LE FUNZIONI RAZIONALI

Nota (*) *di* ARNO PREDONZAN (*a Trieste*)

1. — È noto che esiste uno, ed un solo, polinomio $y = P(x)$, di grado al più uguale ad n, che assume dati valori $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ in corrispondenza ad $n+1$ determinazioni assegnate, *distinte*, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ della variabile x. Tale polinomio, in virtù della formula d'interpolazione di LAGRANGE [1]), ha la forma

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k l_k^{(n+1)}(x)\,, \tag{1}$$

avendo posto

$$l_k^{(n+1)}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}\,, \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)\,, \tag{2}$$

$$\omega_{n+1}(x) = c \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) \text{ [2])}, \qquad (c \text{ costante } \neq 0)\,. \tag{3}$$

Le funzioni $l_k^{(n+1)}(x)$ date dalle (2) — nelle quali $\omega'_{n+1}(x_k)$ sta ad indicare la derivata della funzione (3) $\omega_{n+1}(x)$ calcolata nel punto x_k — vengono dette *funzioni fondamentali dell'interpolazione di Lagrange.*

In questa nota si vuole, con semplice procedimento, giungere ad una formula d'interpolazione — analoga a quella di LAGRANGE — mediante la quale si possa costruire una funzione razionale $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ [$f(x)$, $g(x)$ polinomi, il secondo dei quali

---

(*) Pervenuta in Redazione il 18 agosto 1953.

1) Ved. J. L. LAGRANGE, *Opere*, vol. 7, Paris (1877), pp. 284-287.

2) Le notazioni usate sono quelle della moderna teoria dell'interpolazione. In tale teoria il secondo membro della (1) si indica, in genere, con $L_{n+1}(x)$.

non identicamente nullo] di grado al più uguale ad n [3]), dati che siano i valori $y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}$ che deve assumere y in corrispondenza a $2n+1$ determinazioni assegnate, *distinte*, $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ [4]) della variabile x. Tale funzione sarà unica a prescindere da un fattore costante non nullo e da (eventuali) fattori indeterminati del tipo $x-h$ [5]), comuni ai polinomi $f(x)$, $g(x)$ [6]).

2. — Posto

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = f(x),$$
$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = g(x),$$

si scriva la funzione razionale cercata nella forma

$$f(x) - yg(x) = 0. \tag{4}$$

La totalità delle curve di un piano cartesiano $\pi(x, y)$ aventi un'equazione del tipo (4) costituiscono, al variare dei coefficienti a_i, b_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), un sistema lineare $|C|$ di ordine $n+1$ e dimensione $2n+1$. La generica curva di tale sistema è razionale, passa semplicemente per il punto improprio X_∞ dell'asse x ed ha molteplicità n nel punto improprio Y_∞ dell'asse y; il grado di $|C|$ è pertanto dato da $(n+1)^2 - 1 - n^2 = 2n$ [7]).

Per $2n+1$ punti generici assegnati $P_k(x_k, y_k)$ [$k =$

---

3) Per grado di una funzione razionale $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ deve intendersi il grado più alto dei due polinomi $f(x)$, $g(x)$.

4) I valori $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}, y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}$ li supporremo sempre finiti.

5) Cioè del tipo $x - h$, con h costante indeterminata.

6) Se la funzione razionale cercata risulterà, ad es., del tipo $y = \dfrac{(x-x_1)\bar f(x)}{(x-x_1)\bar g(x)}$ [$\bar f(x)$, $\bar g(x)$ polinomi di grado al più $n-1$], essa sarà indeterminata per $x = x_1$; potrà dunque assumere, in corrispondenza a tale x_1 un qualunque valore, quindi anche il valore y_1.

7) Come noto, per grado di un sistema lineare di curve s'intende il numero delle intersezioni di due curve generiche del sistema fuori dei punti base.

$= 1, 2, \ldots, 2n+1]$ di π passa una sola curva C di $|C|$: è quindi unica [8]) la funzione razionale di grado al più n che assume i valori y_k in corrispondenza ai $2n+1$ valori x_k.

3. — Vogliamo qui dimostrare che:

Fissati ad arbitrio $2n+1$ valori (finiti) distinti $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ della variabile x, esiste, a meno di un fattore costante non nullo e di (eventuali) fattori indeterminati del tipo $x-h$, comuni ai polinomi $f(x)$, $g(x)$ di grado al più uguale ad n, una e una sola funzione razionale $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ che assuma in corrispondenza $2n+1$ valori (finiti) $y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}$ comunque assegnati.

La proposizione è ovvia se è unica la curva C di $|C|$ (n. 2) passante per i punti $P_k(x_k, y_k)\,[k = 1, 2, \ldots, 2n+1]$.

Se tale C si spezza, in particolare, in $s+1$ $(s < n)$ rette proprie per Y_∞ e in una parte residua C', di ordine $n-s$, tra i $2n+1$ punti P_k ve ne sono $s+1$, ed $s+1$ soltanto — siano $P_1, P_2, \ldots, P_{s+1}$ — che appartengono ciascuno ad una di tali rette e non sono situati sulla C'. Ciò è chiaro appena si pensi che ciascuna delle rette in questione, per essere determinata, deve contenere uno dei punti P_k che non appartengono e C', e sulla retta stessa non può esservi più di uno di tali punti in virtù dell'ipotesi delle x_k distinte. I polinomi $f(x)$, $g(x)$ contengono, in questo caso, i fattori comuni $x - x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s+1)$ che nella $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ non possono essere soppressi, perchè altrimenti in corrispondenza ai valori $x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}$ non si potrebbero far assumere alla y i valori $y_1, y_2, \ldots, y_{s+1}$.

Proviamo ora la proposizione enunciata nel caso che le curve di $|C|$ (n. 2) passanti per i punti $P_k(x_k, y_k)$ costituiscono un sistema lineare $|C^*|$, di dimensione $d > 0$.

La generica C^* di $|C^*|$ è, in questo caso, riducibile; se infatti così non fosse, dovrebbe essere $2n$ (al più) il grado di $|C^*|$, il che contrasta col fatto che due generiche curve di

---

8) Prescindendo da un fattore costante non nullo comune ai polinomi $f(x)$, $g(x)$.

tale sistema si incontrano, fuori di X_∞, Y_∞, nei $2n+1$ punti P_k (almeno).

A norma di un classico teorema di BERTINI [9]) si possono allora presentare per il sistema riducibile $|C^*|$ le due seguenti possibilità:

a) la generica C^* si compone di un certo numero di parti irriducibili che variano in un medesimo fascio;

b) le curve di $|C^*|$ hanno tutte una parte fissa (irriducibile o no) in comune; la parte rimanente potendo essere, a sua volta, composta di curve variabili in uno stesso fascio.

Vogliamo far vedere che la prima eventualità non può, nel nostro caso, verificarsi.

Sia, a tale scopo, C_1 una componente irriducibile, di ordine n_1+1 $(0 \leq n_1 < n)$ di C^* e C_2 la parte residua, di ordine $n_2 = n - n_1 > 0$.

Se $n_1 > 0$, C_1, C_2 hanno in Y_∞ molteplicità rispettive n_1, n_2 $(n_1 + n_2 = n)$, per cui C_2 si spezza in n_2 rette per Y_∞. Qualora si presentasse il caso a), pure C_1 dovrebbe spezzarsi in n_1+1 rette, il che contrasterebbe con l'ipotesi della C_1 irriducibile. Se invece $n_1 = 0$ (cioè C_1 è una retta), la C^* dovrebbe spezzarsi in $n+1$ rette per Y_∞ tutte variabili con C^*, il che appare assurdo ove si pensi che C^* deve passare per i $2n+1$ punti P_k assegnati.

Supponiamo, pertanto, valida l'alternativa b), e siano ora $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, la componente fissa e quella variabile di C^*, degli ordini rispettivi $\bar{n}_1+1$, $\bar{n}_2$ $(0 \leq \bar{n}_1 < n$; $\bar{n}_2 = n - \bar{n}_1 > 0)$.

Ci proponiamo di provare che $\overline{C}_1$ (eventualmente riducibile) ha in Y_∞ molteplicità $\bar{n}_1$.

Ammettiamo, *per assurdo*, che ciò non avvenga; allora $\overline{C}_1$ deve avere in Y_∞ molteplicità $\bar{n}_1+1$, il che comporta che si spezzi in $\bar{n}_1+1$ rette per Y_∞, comprendenti eventualmente anche la retta impropria di π.

---

9) Ved. ad es., F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I, Zanichelli, Bologna (1926), p. 45.

Più precisamente, il numero delle rette proprie, necessariamente distinte [10]), di $\bar{C}_1$ sia

$$\nu = \bar{n}_1 + 1 - \varepsilon \geq 0 , \tag{5}$$

con ε intero ≥ 0 a seconda che di $\bar{C}_1$ faccia parte, o meno, la retta impropria.

I $2n+1$ punti P_k determinano univocamente la $\bar{C}_1$; segue che di tali punti — tenuto anche conto delle x_k distinte — ν appartengono a $\bar{C}_1$ (uno per ogni sua componente propria), mentre gli altri $2n+1-\nu$ stanno su $\bar{C}_2$.

Supponiamo, in primo luogo, $\bar{C}_2$ irriducibile e di ordine $\bar{n}_2 > 1$. Essa ha allora in Y_∞ molteplicità $\bar{n}_2 - 1$, e può passare, o no, per X_∞ [11]).

Due generiche $\bar{C}_2$ (che sono la parte residua di $\bar{C}_1$ rispetto a due generiche C^* di $| C^* |$) hanno (al massimo) fuori di X_∞, Y_∞, μ intersezioni, essendo

$$\mu = \bar{n}_2{}^2 - (\bar{n}_2 - 1)^2 - \sigma = 2\bar{n}_2 - 1 - \sigma , \tag{6}$$

dove $\sigma = 1$ o $\sigma = 0$ a seconda che $\bar{C}_2$ passi, o no, per X_∞.

A tali due $\bar{C}_2$ appartengono però, per quanto sopra detto, $2n+1-\nu$ dei punti P_k; deve quindi risultare

$$2n + 1 - \nu \leq \mu ,$$

o meglio, avuto riguardo alle (5), (6), e alla $\bar{n}_2 = n - \bar{n}_1$

$$\bar{n}_1 \leq -\varepsilon - \sigma - 1 ,$$

il che è manifestamente assurdo.

Se poi $\bar{n}_2 = 1$, la $\bar{C}_2$ variabile è una retta, quindi sulla stessa non vi può stare più di uno dei $2n+1$ punti P_k. Gli altri $2n$ appartengono, di conseguenza, alla $\bar{C}_1$, per cui deve risultare

$$2n = \nu$$

od anche, per la (5) e tenuto conto che ora $\bar{n}_1 = n - 1$,

$$n = -\varepsilon ,$$

---

10) È chiaro che il passaggio per i punti P non può portare la condizione che una di tali rette sia multipla per $\bar{C}_1$, quindi per C^*.

11) Vi passerà certamente se $\varepsilon = 0$, cioè se le $\bar{n}_1 + 1$ rette componenti $\bar{C}_1$ sono tutte proprie.

relazione che appare assurda appena si pensi che la C^*, per essere composta di una parte fissa ed una variabile, deve avere ordine $n+1 \geq 2$.

Supponiamo, *infine*, la $\overline{C}_2$ riducibile. Essa può spezzarsi allora, a norma del citato teorema di BERTINI, solo in un gruppo di $\bar{n}_2$ rette variabili per Y_∞; sulla $\overline{C}_1$ debbono allora essere situati tutti i $2n+1$ punti P_k, uno solo per ognuno delle sue ν rette proprie, e ciò è assurdo in quanto risulta sempre $2n+1 > \nu$.

Si può così concludere che $\overline{C}_1$ non ha in Y_∞ molteplicità $\bar{n}_1+1$, quindi deve avere, in tale punto, molteplicità $\bar{n}_1$. La $\overline{C}_2$ variabile (cioè la parte di C^* non determinata dai $2n+1$ punti P_k) ha, di conseguenza, in Y_∞ molteplicità $\bar{n}_2$, per cui si spezza in $\bar{n}_2$ rette per il punto stesso.

Sulla $\overline{C}_2$ non giacciono punti P_k ed essa comporta, in relazione alla costruzione della funzione razionale y, solo dei fattori indeterminati del tipo $x-h$ comuni al numeratore e denominatore della funzione stessa.

Tanto basta perchè resti provato l'asserto iniziale.

4. — Tra i dati valori $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ se ne scelgano $n+1$ ad arbitrio, e siano $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

I due polinomi $f(x)$, $g(x)$, in virtù della formula d'interpolazione (1), possono assumere la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i g_i \, l_i^{(n+1)}(x), \tag{7}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} g_i l_i^{(n+1)}(x), \tag{8}$$

dove si è posto

$$g_i = g(x_i), \qquad (i=1, 2, \ldots, n+1),$$

quindi, per la (4),

$$y_i g_i = f(x_i), \qquad (i=1, 2, \ldots, n+1),$$

ed avendo $l_i^{(n+1)}(x)$ il significato dato dalle (2), (3).

Tenuto conto delle (7), (8), la funzione razionale cercata può ora scriversi

$$(9)\qquad y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} y_i g_i\, l_i^{(n+1)}(x)}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} g_i l_i^{(n+1)}(x)},$$

ed essa risulterà d e t e r m i n a t a appena saranno noti i valori delle g_i.

Dalla (4) segue poi

$$f(x_j)=y_j g(x_j), \qquad (j=n+2, \ldots, 2n+1)$$

e da quest'ultima, avuto riguardo alle (7), (8), discende

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{n+1}(y_j-y_i)l_i^{(n+1)}(x_j)g_i=0, \quad (j=n+2, \ldots, 2n+1).$$

Le (10) rappresentano un sistema di n equazioni lineari ed omogenee nelle $n+1$ incognite g_i.

Se tali equazioni risultassero tutte identicamente nulle si avrebbe $y_i-y_j=\lambda$ $(i=1, 2, \ldots, n+1;\ j=n+2, \ldots, 2n+1)$ il che porterebbe di conseguenza che la funzione razionale cercata potrebbe assumere [a meno di fattori indeterminati del tipo $x-h$, comuni ai polinomi $f(x)$, $g(x)$] la forma $y=\lambda$. Escluderemo in seguito questa eventualità (del resto banale).

Il sistema (10), a norma delle (2), (3), diviene

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\{x_j,\ x_i\}g_i}{\omega'_{n+1}(x_i)}, \qquad (j=n+2, \ldots, 2n+1),$$

dove si è posto

$$\{x_j,\ x_i\}=\frac{y_j-y_i}{x_j-x_i}$$

La matrice dei coefficienti della (11) ha la stessa caratteristica della matrice

$$(12)\qquad \|\{x_j,\ x_i\}\|=\left\|\begin{matrix}\{x_{n+2},\ x_1\}\ \ldots\ \{x_{n+2},\ x_{n+1}\}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \{x_{2n},\ x_1\}\ \ldots\ldots\ \{x_{2n},\ x_{n+1}\}\end{matrix}\right\|.$$

Se i valori assegnati x_k, y_k $(k=1, 2, \ldots, 2n+1)$ sono tali che i $2n+1$ punti $P_k(x_k,\ y_k)$ determinano univocamente una curva C del sistema $|C|$ (n. 2), la matrice (12) ha caratteristica n, perchè se così non fosse il sistema (11) ammetterebbe più di una soluzione linearmente indipendente; ciò porterebbe di conseguenza che, attraverso alla (9), si otterrebbe più di una curva di $|C|$ per i punti P_k, il che contrasta l'ipotesi. La matrice (12) ha pertanto, in generale, caratteristica n. In tale eventualità la soluzione del sistema (11) è data da

$$g_i = \frac{\Delta_i \omega'_{n+1}(x_i)}{\prod_{r=1}^{n+1} \omega'_{n+1}(x_r)}, \qquad (i = 1, 2, ..., n+1), \tag{13}$$

stando Δ_i a rappresentare il minore, con segno, che si ottiene dalla (12) sopprimendo la colonna i-esima.

Dalla (9), in virtù delle (13), si ricava infine

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} y_i \Delta_i \omega'_{n+1}(x_i) l_i^{(n+1)}(x)}{\sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i \omega'_{n+1}(x_i) l_i^{(n+1)}(x)},$$

che è la *cercata formula d'interpolazione.*

Qualora la matrice (12) abbia, in particolare, caratteristica inferiore ad n, la curva di $|C|$ per i $2n+1$ punti $P_k(x_k, y_k)$ non è determinata univocamente. Risulta però determinata — a norma di quanto stabilito nel n. 3 — la funzione razionale y, che assume i valori $y_1, y_2, ..., y_{2n+1}$ in corrispondenza ai valori $x_1, x_2, ..., x_{2n+1}$, quando si suppongano $f(x)$, $g(x)$ privati dei loro fattori comuni relativi alla componente variabile $\overline{C}_1$ di C^*. La formula d'interpolazione della funzione stessa è, in questo caso, data dalla (9) dove al posto delle g_i venga sostituita la soluzione generale del sistema (11) ed il numeratore e denominatore della stessa (9) vengono privati dei fattori comuni, del tipo $x - h$, non determinati dai valori x_k, y_k.

Ove si osservi che, per costruire con procedimento diretto, una funzione razionale di grado n — cioè una curva di ordine $n+1$ del tipo (4) — quando siano assegnate le $2n+1$ coppie di valori x_k, y_k occorre risolvere un sistema (in generale notevolmente complesso) di $2n+1$ equazioni lineari ed omogenee in $2n+2$ incognite, si può concludere che il procedimento indicato nella presente nota porta, in ogni caso, una notevole semplificazione in quanto si riduce, in effetti, alla risoluzione del sistema (11) di sole n equazioni in $n+1$ incognite; tale soluzione è di facile determinazione come risulta dall'osservare la forma semplice della matrice (12).