

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

**La nozione di variazione limitata e di assoluta
continuità super-uniforme**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 246-250

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__246_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

LA NOZIONE DI VARIAZIONE LIMITATA E DI ASSOLUTA CONTINUITÀ SUPER-UNIFORME

Nota (*) di GABRIELE DARBO (a Padova)

In un recente lavoro, E. Bajada¹⁾ ha considerato delle funzioni di due variabili $f(x, y)$ che egli chiama *assolutamente continue rispetto ad x in modo super-uniforme* rispetto ad y .

Nella presente nota, vengono messe in rilievo alcune proprietà di certe classi di funzioni a variazione limitata e assolutamente continue, che si ricollegano alla nozione citata.

1. - Sia $\{f(x)\}$ una classe di funzioni definite in $a \dashv\vdash b$;

α) diremo che $\{f(x)\}$ è una classe a variazione limitata in modo super-uniforme (V. L. s. u.), se esiste una costante M tale che, preso ad arbitrio un numero finito d'intervalli disgiunti $\xi_i' - \xi_i''$ di $a \dashv\vdash b$ ed associata comunque ad ogni intervallo una funzione $f_i(x)$ della classe $\{f(x)\}$, si abbia

$$(1) \quad \sum_i |f_i(\xi_i') - f_i(\xi_i'')| \leq M;$$

β) diremo invece che $\{f(x)\}$ è una classe assolutamente continua in modo super-uniforme (A. C. s. u.), se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$, tale che per ogni sistema finito d'intervalli $\xi_i' - \xi_i''$ disgiunti, di $a \dashv\vdash b$, con $\sum_i |\xi_i' - \xi_i''| < \delta$, si abbia

$$\sum_i |f_i(\xi_i') - f_i(\xi_i'')|$$

qualunque siano le funzioni $f_i(x)$ della classe $\{f(x)\}$.

(*) Pervenuta in Redazione il 17 Marzo 1953.

¹⁾ E. BAJADA, *L'equazione $p = f(x, y, z, q)$ e l'unicità*, [Rendiconti Acc. Lincei, Vol. XII (1952, I sem.)], pag. 163-167.

OSSERVAZIONE: La nozione di funzioni $f(x, y)$ a variazione limitata o assolutamente continua rispetto ad x in modo super-uniforme rispetto ad y si può rimandare a quella relativa alla classe di funzioni $f(x, \bar{y})$ descritta al variare di \bar{y} .

2. - Sia $\{f(x)\}$ una classe V. L. s. u. in $a \dashv b$.

Chiameremo variazione totale della classe $\{f(x)\}$ in $a \dashv b$ l'estremo superiore delle somme

$$\sum_i |f_i(\xi_i') - f_i(\xi_i'')|$$

già considerate in α . Tale numero lo indicheremo con $W(a, b)$. Se $\alpha \dashv \beta$ è un subintervallo di $a \dashv b$ la $W(\alpha, \beta)$ è una funzione addittiva d'intervallo. Infatti, $\alpha \dashv \beta$ e $\beta \dashv \gamma$ siano intervalli contigui contenuti in $a \dashv b$. Fissato un $\varepsilon > 0$ si potrà trovare un sistema d'intervalli disgiunti contenuto in $\alpha \dashv \beta$ e uno contenuto in $\beta \dashv \gamma$ tali che almeno una somma S_1 del tipo (1) relativa al primo, ed una S_2 relativa al secondo, soddisfino alle relazioni

$$W(\alpha, \beta) - S_1 < \varepsilon,$$

$$W(\beta, \gamma) - S_2 < \varepsilon;$$

da cui segue

$$W(\alpha, \beta) + W(\beta, \gamma) < S_1 + S_2 + 2\varepsilon \leq W(\alpha, \gamma) + 2\varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε ,

$$(2) \quad W(\alpha, \beta) + W(\beta, \gamma) \leq W(\alpha, \gamma).$$

Non può essere d'altronde $W(\alpha, \beta) + W(\beta, \gamma) < W(\alpha, \gamma)$ perchè in tal caso esisterebbe in $\alpha \dashv \gamma$ un sistema d'intervalli $\{\xi_i' - \xi_i''\}$ tale che una somma S del tipo (1) relativa ad esso sarebbe maggiore di $W(\alpha, \beta) + W(\beta, \gamma)$. Ma allora, spezzando in due parti, $\xi_r' - \beta$ e $\beta - \xi_r''$ l'eventuale intervallo che contenesse β si verrebbe facilmente ad un assurdo.

Osserviamo ancora che se una classe $\{f(x)\}$ è V. L. s. u. in due intervalli contigui, essa lo è pure nell'intervallo somma. La dimostrazione è immediata.

3. - Consideriamo ancora la classe $\{f(x)\}$ V. L. s. u.

Se poniamo $W(x) = W(a, x)$ risulta $W(x)$ monotona in $a \dashv\vdash b$ ed è $W(\alpha, \beta) = W(\beta) - W(\alpha)$. Ne segue che ogni funzione della classe $\{f(x)\}$ è tale che il suo incremento è maggiorato dall'incremento di una funzione monotona $W(x)$. È questa una proprietà *caratteristica* per le classi V. L. s. u.

In conseguenza, ciascuna funzione di una classe V. L. s. u. è continua nei punti di continuità di $W(x)$. Inoltre essendo pure a variazione limitata ogni $f(x)$, dalla relazione

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \left| \frac{W(x+h) - W(x)}{h} \right|$$

si avrà quasi ovunque in $a \dashv\vdash b$

$$|f'(x)| \leq W'(x);$$

ossia le derivate delle funzioni di una classe V. L. s. u. sono maggiorate quasi ovunque da una funzione sommabile.

4. - Consideriamo ora una classe $\{f(x)\}$ assolutamente continua in modo super-uniforme (A. C. s. u.). Ogni funzione di tale classe è assolutamente continua. Inoltre la classe è pure V. L. s. u. Ciò risulta dal fatto che se facciamo $\varepsilon = 1$ nella definizione data in β), ad esso corrisponde un $\delta > 0$ che

$$(4) \quad \sum_i |f_i(\xi_i') - f_i(\xi_i'')| < 1,$$

purchè sia $\sum_i |\xi_i' - \xi_i''| < \delta$. Allora suddividendo $a \dashv\vdash b$ in intervalli di ampiezza minore di δ , avremo per la (4) che la classe $\{f(x)\}$ è V. L. s. u. in ciascuno di essi e perciò anche in $a \dashv\vdash b$.

In questo caso la $W(x)$ risulta assolutamente continua e quindi la classe $\{f(x)\}$ è A. C. s. u. se e soltanto se, l'incremento di ogni $f(x)$ della classe è maggiorato dal corrispondente incremento di una funzione assolutamente continua fissa.

Possiamo ora dimostrare che *se una classe di funzioni $f(x)$ assolutamente continue è V. L. s. u., essa è pure A. C. s. u. e viceversa* (il viceversa è immediato).

Infatti, esiste allora, per quanto è stato detto al n. 3, una funzione $H(x)$ sommabile, tale che per ogni $f(x)$ si abbia quasi ovunque in $a \text{---} b$

$$|f'(x)| \leq H(x),$$

per ogni coppia x_1, x_2 di $a \text{---} b$ risulta dunque

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} H(x) dx \right|;$$

e, posto $\Phi(x) = \int_a^x H(x) dx$, si trova

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|$$

che per l'assoluta continuità di $\Phi(x)$ prova l'asserto.

5. - Dalle precedenti considerazioni si ottiene facilmente un criterio per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale, equivalente a quello noto di Lebesgue, ma notevolmente diverso nella forma.

Dimostriamo il seguente teorema:

Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni sommabili in $a \text{---} b$ convergente quasi ovunque in $a \text{---} b$ ad una funzione $f(x)$. Se esiste una costante M tale che prese comunque le funzioni $f_{n_i}(x)$ nella successione e gli intervalli disgiunti $\alpha_i \text{---} \beta_i$ in $a \text{---} b$ risulti sempre

$$(5) \quad \sum_i \left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f_{n_i}(x) dx \right| \leq M$$

allora la $f(x)$ è sommabile e si ha

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^b f_{n_h}(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Infatti, se poniamo

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

per la (5) la classe $\{F_n(x)\}$ risulta V. L. s. u. Esiste allora una funzione sommabile $H(x)$ tale che per ogni n è

$$|f_n(x)| = |F_n'(x)| \leq H(x)$$

e per il citato teorema di Lebesgue segue l'asserto.

OSSERVAZIONE: Tutte le considerazioni svolte in questa nota si possono estendere immediatamente alle funzioni in due o più variabili. In due variabili, ad esempio, si dovranno considerare gli incrementi doppi delle funzioni e si potranno definire in modo analogo a quello tenuto in α) e in β) le classi di funzioni $\{f(x, y)\}$ V. L. s. u. ed A. C. s. u. (secondo Vitali).

Tutti i teoremi corrispondenti a quelli qui considerati resteranno validi.