

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. COLOMBO

**Un teorema di dinamica ed una sua applicazione  
al moto di un corpuscolo elettrizzato in  
presenza di un dipolo**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 22 (1953), p. 207-222

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1953\\_\\_22\\_\\_207\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__207_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UN TEOREMA DI DINAMICA ED UNA SUA APPLICAZIONE AL MOTO DI UN CORPU- SCOLO ELETTRIZZATO IN PRESENZA DI UN DIPOLO

*Nota (\*) di G. COLOMBO (a Padova)*

Sia dato un sistema dinamico, in due gradi di libertà, conservativo, il cui integrale dell'energia sia del tipo:

$$(1) \quad p_1^2 + p_2^2 - 2U(q_1, q_2) = 2h$$

e si consideri la varietà  $M$  delle traiettorie dinamiche corrispondenti al valore  $h_0$  dell'energia totale.

Facciamo le seguenti ipotesi:

a) Assunte  $q_1, q_2, p_2$  come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio  $S$ , della superficie di equazione:

$$(2) \quad 2[h_0 + U(q_1, q_2)] - p_2^2 = 0$$

faccia parte una superficie chiusa  $\Sigma$ , convessa, in maniera che nella regione finita  $R$  di  $S$  delimitata da  $\Sigma$  risulti  $2(h_0 + U) - p_2^2 > 0$ . Denoteremo con  $\mathcal{C}$  l'intersezione di  $\Sigma$  col piano  $q_1, q_2$  e con  $M^*$  l'insieme dei moti di  $M$  le cui traiettorie dinamiche, rappresentate sul piano  $q_1, q_2$ , appartengono alla regione finita  $\Omega$  delimitata da  $\mathcal{C}$ .

b) Esiste un valore  $q_1^0$ , di  $q_1$ , interno all'intervallo, dell'asse  $q_1$ , su cui si proietta ortogonalmente  $\mathcal{C}$ , per il quale sussista l'identità  $U'_{q_1}(q_1^0, q_2) \equiv 0$ . Allora tra i moti di  $M$

---

(\*) Pervenuta in Redazione il 10 maggio 1953.

c'è un moto periodico <sup>1)</sup>  $p^*$  in corrispondenza al quale è <sup>2)</sup>  $q_1 = q_1^0$ .

Accenneremo con  $T$  al suo periodo.

c) Sia  $\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}(q_1^0, q_2) < 0$ , e gli esponenti caratteristici non nulli  $\pm i\mu$  dell'equazione alle variazioni relativa alla  $p^*$  siano immaginari puri e tali che non sia razionale il numero <sup>3)</sup>  $\frac{\pi}{\mu T}$ .

In queste ipotesi dimostreremo che *il sistema ammette almeno una ulteriore soluzione periodica, in corrispondenza alla quale  $q_1$  assume ognuno dei valori compresi tra il suo massimo ed il suo minimo due sole volte in un periodo.*

È noto <sup>4)</sup> che nelle stesse ipotesi circa la natura della stabilità di  $p^*$  si dimostra l'esistenza di infiniti moti periodici tra i moti di  $M$  prossimi a  $p^*$  stessa, almeno se si esclude un caso eccezionale; ma questi non godono necessariamente della proprietà che caratterizza il moto periodico di cui dimostreremo l'esistenza.

Nella seconda parte del presente lavoro il teorema enunciato viene applicato ad un notevole problema: quello del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo

<sup>1)</sup> Ve ne sono infiniti ma tutti coincidenti a meno di un cambiamento di origine dei tempi.

<sup>2)</sup> Le equazioni di tale moto sono ovviamente:

$$q_1 = q_1^0, \quad t = \int_{q_2^0}^{q_2} \frac{dq_2}{\pm \sqrt{2(h_0 + U(q_1^0, q_2))}}$$

ed è facile riconoscere, attesa la convessità di  $\Sigma$ , che almeno per  $q_2^0$  tale che  $P_0 \equiv (q_1^0, q_2^0)$  sia un punto di  $\Omega$ , tale moto è periodico.

<sup>3)</sup> Osserviamo in primo luogo che l'ipotesi sull'irrazionalità del rapporto  $\frac{\pi}{\mu T}$  non è certamente molto restrittiva, poichè essa è con estrema probabilità verificata, ed in secondo luogo che, sebbene tale ipotesi sia essenziale nel nostro ragionamento, è opinabile che il teorema valga in generale.

<sup>4)</sup> GEORGE D. BIRKOFF, *Dynamical Systems*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. IX, p. 154.

magnetico. Tale problema è stato oggetto di notevoli studi da parte di C. AGOSTINELLI <sup>5)</sup>, il quale ha trovato un nuovo integrale primo che permette di ridurre il problema in due gradi di libertà.

In questo modo il problema si riduce a quello dello studio del moto (relativo) del corpuscolo in un piano passante per l'asse del dipolo. Conosciuto tale moto, il moto di trascinamento è determinato mediante una quadratura.

Per opportune condizioni iniziali sono possibili moti piani relativi periodici. Dimosteremo che tra questi ce n'è almeno uno la cui orbita (relativa) è tale che le rette del piano ortogonali all'asse del dipolo hanno al massimo due punti in comune con essa.

### 1. - Rappresentazione geometrica nel $S_3(q_1, q_2, p_2)$ dei moti di $M^*$ e considerazioni preliminari.

Poichè possiamo supporre di conglobare la eventuale costante addittiva in  $U$  non si fanno restrizioni di sorta se si suppone, come faremo nel seguito,  $h_0 = 0$ . Allora il sistema differenziale delle traiettorie di  $M$  si può porre ovviamente sotto la forma:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = \pm [2U(q_1, q_2) - p_2^2]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{q}_2 = p_2, \\ \dot{p}_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}. \end{array} \right.$$

<sup>5)</sup> C. AGOSTINELLI, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico*, «Atti R. Acc. Scienze di Torino», vol. 73, 1937-38, p. 460.

Id., *Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico*. «R. Accademia dei Lincei», vol. XXVIII, serie 6ª, 2ª sem., fasc. 7-8, 1938, p. 183.

Id., *Sulla risoluzione analitica del problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico*, «Mem. R. Acc. Scienze di Torino», Serie 2ª, Tomo 69, P. I, 1938-39.

ANTONIO PIGNEDOLI, *Sul problema delle aurore polari*, «Atti Sem. Mat. e Fis. di Modena», vol. I, 1946-47, p. 17.

Assunte, come supposto dell'enunciato,  $q_1, q_2, p_2$  come coordinate cartesiane di punto in  $S$ , le (3) definiscono nella regione  $R$  un insieme di traiettorie  $\mathfrak{N}$ , tali che per ogni punto interno ad  $R$  passano due e due sole traiettorie, in relazione alla scelta del segno  $+$  o  $-$  davanti al radicale del secondo membro di (3<sub>1</sub>). Denoteremo con  $\mathfrak{N}^+$  ed  $\mathfrak{N}^-$  i due insiemi facenti parti di  $\mathfrak{N}$  costituiti dagli archi di traiettorie relative alla determinazione  $+$  e rispettivamente  $-$  davanti a tale radicale. L'insieme  $\mathfrak{N}$  è allora costituito dagli insiemi  $\mathfrak{N}^+, \mathfrak{N}^-$  e dalle eventuali traiettorie su  $\Sigma$ .

Le traiettorie dei moti  $M^*$  sono le proiezioni ortogonali sul piano  $q_1 q_2$  delle traiettorie di  $\mathfrak{N}$ .

Possiamo senz'altro supporre nel seguito  $q_1^0 = 0$ . A questo caso ci si può sempre ricondurre mediante una semplice traslazione.

La curva chiusa  $\gamma$  del piano  $q_1 = 0$  di equazione  $p_2^2 - 2U(q_1, q_2) = 0$ , che è ovviamente la sezione di  $\Sigma$  con detto piano, rappresenta in  $\mathfrak{N}$  il moto  $p^*$  ed è l'unica traiettoria di  $\mathfrak{N}$  giacente su  $\Sigma$ . Se ve ne fosse un'altra dovrebbe esistere un valore  $q_1'$  di  $q_1$  per il quale la funzione  $\frac{\partial U}{\partial q_1}(q_1', q_2)$  sarebbe identica a zero in  $q_2$  e  $\Sigma$  non sarebbe più, come supposto, convessa.

## 2. - Analisi delle traiettorie prossime a $\gamma$ .

In questo numero esamineremo le traiettorie prossime a  $\gamma$ . Assunta all'uopo una coordinata curvilinea  $\theta$ , che per esempio può essere la lunghezza d'arco di  $\gamma$ , contata da un suo generico punto in senso orario, sarà, attesa la convessità di  $\Sigma$ ,

$$(4) \quad \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{p_2^2 + U'^2}.$$

Tenuto presente che il secondo membro di (4) non si annulla mai, assumeremo  $\theta$  come variabile indipendente in luogo di  $t$ .

Consideriamo il piano  $\pi$  normale a  $\gamma$  in un generico  $Q$ ; detto piano ha per normale  $n$  una retta i cui coseni sono

proporzionali a 0,  $p_2^{(Q)}$ ,  $U'_{q_2}(0, q_2^{(Q)})$ , mentre i coseni delle tangenti  $t$  alle traiettorie che passano per il generico  $P$  di  $R$  sono proporzionali a  $\pm \sqrt{2U - p_2^2}$ ,  $p_2$ ,  $U'_{q_2}(q_1, q_2)$ .

Si avrà allora in ogni modo:

$$(5) \quad \cos \widehat{tn} = p_2 p_2^{(Q)} + U'_{q_2}(0, q_2^{(Q)}) U'_{q_2}(q_1, q_2),$$

e quindi, in quella parte  $\mathcal{J}_r$ , che appartiene ad  $R$ , di un opportuno intorno tubolare  $\mathcal{J}$  di  $\gamma$  è certamente  $\cos \widehat{tn} > 0$ .

Il piano  $\pi$  è allora, almeno localmente in  $\mathcal{J}_r$ , piano di sezione per le traiettorie di  $\mathfrak{M}$ . Si assumano come coordinate di un generico  $P$  di  $R$  le variabili  $q_1$  e  $\pm \sqrt{2U - p_2^2}$ , scegliendo il segno  $+$  o  $-$  davanti al radicale a seconda che ci si riferisca alle traiettorie di  $\mathfrak{M}^+$  od a quelle di  $\mathfrak{M}^-$ . Una generica traiettoria almeno in  $\mathcal{J}_r$  potrà essere espressa da equazioni del tipo:

$$(6) \quad q_1 = q_1(\theta) \quad , \quad p_1 = p_1(\theta),$$

e sarà completamente determinata dai valori  $q_1^0 = q_1(\theta_0)$  e  $p_1^0 = p_1(\theta_0)$ . Ai valori  $q_1^0 = 0$ ,  $p_1^0 = 0$  corrisponde ovviamente  $\gamma$ .

Indichiamo con  $u^2$  la somma  $q_1^2 + p_1^2$  e teniamo conto dell'ipotesi c).

Allora per ogni fissato  $\Theta$  si può certamente determinare un  $\varepsilon_0$  opportuno, per modo che, in corrispondenza ad ogni traiettoria attuale, che soddisfi alla condizione  $u^2(\theta_0) = \varepsilon^2 \leq \varepsilon_0^2$ , sia verificata per ogni  $\theta$  dell'intervallo  $(\theta_0, \theta_0 + \Theta)$  la relazione  $h\varepsilon^2 < u^2 < k\varepsilon^2$ , con  $h, k$  costanti opportune indipendenti da  $\varepsilon$  e da  $\Theta$ .

Denoteremo con  $S_1$  questa proprietà dei moti prossimi a  $p^*$ .

Si consideri inoltre quella delle equazioni alle variazioni, relativa alla soluzione  $p^*$ , che interessa  $q_1$ . Essa si presenta ovviamente sotto la forma:

$$(7) \quad \ddot{q}_1 - \frac{\partial U}{\partial q_1^2}(0, q_2^*(t)) q_1 = 0$$

ove  $q_2^*$  è la determinazione di  $q_2$  relativa a  $p^*$  ed è perciò

periodica di periodo  $T$ . Sia  $q_1(t, a, b)$  una generica soluzione di (7); poichè, sempre per la (4),  $t$  è funzione invertibile di  $\theta$ , possiamo porla sotto la forma:

$$(8) \quad q_1 = q_1^{(v)}(\theta, a, b) \quad , \quad p_1 = p_1^{(v)}(\theta, a, b).$$

Ad ogni traiettoria attuale  $q_1 = q_1(\theta)$ ,  $p_1 = p_1(\theta)$  soddisfacente alle condizioni iniziali  $q_1(\theta_0) = q_1^0$ ,  $p_1(\theta_0) = p_1^0$ , potremo far corrispondere la traiettoria variata, le cui equazioni sono date da (8), appena si scelgano  $a, b$  in modo da soddisfare alle stesse condizioni iniziali. Allora, sempre per l'ipotesi c) si può dire che almeno per ogni  $\theta$  soddisfacente alla  $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \Theta$ , i divari  $|q_1 - q_1^{(v)}|$  e  $|p_1 - p_1^{(v)}|$  si mantengono infinitesimi di ordine superiore ad  $\varepsilon$ . Denoteremo con proprietà  $S_2$  questa seconda proprietà dei moti prossimi a  $p^*$ .

Si osservi ora che le soluzioni di (7), attesa l'ipotesi c), godono di proprietà note che brevemente richiameremo:

I. — Ogni soluzione di (7) che si annulli in un punto  $t_0$ , con ivi derivata positiva (negativa) si annulla successivamente in un punto  $t_1$  (primo coniugato a destra di  $t_0$ ) con ivi derivata negativa (positiva). Se sussiste, come accade nel nostro caso, in base all'ipotesi c), la relazione:

$$\alpha < -\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}(0, q_2^*(t)) < \beta^2$$

allora certamente si ha:

$$\frac{\pi}{\beta} < t_1 - t_0 < \frac{\pi}{\alpha}$$

Inoltre tra  $t_0$  e  $t_1$  la soluzione ha un solo massimo (o minimo).

II. — Tutte le soluzioni che si annullano in  $t_0$  differiscono per un fattore costante.

III. — La dipendenza  $t_1 = t_1(t_0)$  è continua e periodica di periodo  $T$ .

È ovvio che si possono enunciare le stesse proprietà per le funzioni  $q_1(\theta)$ ,  $p_1(\theta)$  che si ottengono dalle soluzioni di (7) sostituendo  $t(\theta)$  a  $t$ . Basterà sostituire  $\theta_0$  a  $t_0$ ,  $\theta_1$  a  $t_1$ , la lunghezza  $l$  di  $\gamma$  a  $T$ . Potremo anche asserire che  $\theta_1 - \theta_0$  è limi-

tato inferiormente e superiormente da due numeri positivi  $B$  ed  $A$  rispettivamente.

Premesso ciò si assuma  $\Theta = 3A$  ed in corrispondenza si determini un  $\varepsilon_0$  in relazione alla proprietà  $S_1$ . Si consideri inoltre una traiettoria attuale soddisfacente alle  $q_1(\theta_0) = 0$ ,  $p_1(\theta_0) = \varepsilon$  con  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  e la traiettoria variata soddisfacente alle stesse condizioni iniziali. Per la proprietà  $S_1$  i massimi ed i minimi della  $q_1$  sono infinitesimi dello stesso ordine di  $\varepsilon$  e per la proprietà II delle soluzioni di (7) lo stesso è dei massimi della  $q_1^{(v)}$ . Tanto basta per dire, attesa la proprietà  $S_2$  che, almeno per  $\varepsilon_0$  sufficientemente piccolo, tra un massimo ed il successivo minimo negativo della  $q_1^{(v)}$  c'è uno zero della  $q_1$  e viceversa che tra un massimo ed il successivo minimo negativo della  $q_1$  c'è uno zero della  $q_1^{(v)}$ . Inoltre gli zeri della  $q_1$  cadono in intorni di ampiezza  $\rho\varepsilon$  degli zeri di  $q_1^{(v)}$ , con  $\rho$  opportuno ma indipendente da  $\varepsilon$ . Anzi in ogni intorno ne cade uno solo, perchè se, per esempio, ne cadessero tre distinti, dovrebbero ivi cadere anche tre zeri della  $q_1^{(v)}$  contrariamente al supposto. Infine, le derivate assumono in due zeri successivi della funzione  $q_1^{(v)}$ , come in due zeri successivi della  $q_1$ , valori di segno opposto ed infinitesimi dello stesso ordine di  $\varepsilon$ .

Possiamo dunque concludere che una traiettoria attuale, soddisfacente alle condizioni iniziali  $q_1(\theta_0) = 0$ ,  $p_1(\theta_0) = \varepsilon$ , per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, attraversa il piano  $q_1 = 0$ , una prima volta, per  $\theta = \theta_1^{(Q)}$  e  $p_1 = p_{11} < 0$ , ed una seconda volta lo stesso piano per  $\theta = \theta_2^{(Q)}$ ,  $p_1 = p_{12} > 0$ . Inoltre  $|p_{11}|$  e  $p_{12}$  sono ambedue compresi tra  $h\varepsilon$  e  $k\varepsilon$  mentre  $\theta_1^{(Q)}$  e  $\theta_2^{(Q)}$  differiscono dai valori  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , primo e secondo coniugato a destra di  $\theta_0$ , per infinitesimi con  $\varepsilon$ .

### 3. - Costruzione di una opportuna trasformazione topologica.

Ritornando ad esaminare in  $R$  le traiettorie di  $\mathfrak{N}$  denotiamo con  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  le parti di  $\Sigma$  che stanno nel semispazio  $q_1 \geq 0$  e rispettivamente  $q_1 \leq 0$ . Esse hanno in comune la frontiera  $\gamma$ . Per la supposta ipotesi sulla convessità di  $\Sigma$  da ogni punto interno di  $\Sigma^-$  escono al crescere di  $t$  archi di tra-



iettorie dell'insieme  $\mathfrak{N}^+$  e da ogni punto interno di  $\Sigma^+$  escono al crescere di  $t$  archi di traiettorie relative ad  $\mathfrak{N}^-$ .

Per convincersi di ciò basta calcolare con referenza alle (3) la derivata:

$$\frac{d}{dt}(2U - p_2^2) = \frac{\partial U}{\partial q_1} \dot{q}_1.$$

Tenendo ora conto che si ha  $\frac{\partial U}{\partial q_1} < 0$  nei punti interni di  $\Sigma^-$ , mentre è  $\frac{\partial U}{\partial q_1} > 0$  nei punti interni di  $\Sigma^+$ , attesa la convessità di  $\Sigma$ , se si considerano gli archi di  $\mathfrak{N}^+$ , tale derivata, che si annulla ovviamente su  $\Sigma$  assume valori positivi nei punti infinitamente prossimi a  $\Sigma^-$  e valori negativi nei punti infinitamente prossimi a  $\Sigma^+$ .

Ricordando che è  $2U - p_2^2 > 0$  nei punti di  $R$  esterni a  $\Sigma$  e  $2U - p_2^2 = 0$  nei punti di  $\Sigma$ , si riconosce che le traiettorie di  $\mathfrak{N}^+$  ( $\mathfrak{N}^-$ ) partono al crescere di  $t$  da  $\Sigma$ , da punti interni di  $\Sigma^-$  ( $\Sigma^+$ ) e giungono su  $\Sigma$  in punti interni a  $\Sigma^+$  ( $\Sigma^-$ ).

Sia  $\sigma^*$  la regione finita del piano  $q_1 = 0$  delimitata da  $\gamma$ ; tale  $\sigma^*$  è una superficie di sezione separatamente per le traiettorie di  $\mathfrak{N}^+$  e di  $\mathfrak{N}^-$ ; ovvero le traiettorie di  $\mathfrak{N}^+$  che passano per un punto interno a  $\sigma^*$  la attraversano nel senso delle  $q_1$  crescenti, mentre le traiettorie di  $\mathfrak{N}^-$  che passano per un punto interno a  $\sigma^*$  la attraversano nel senso delle  $q_1$  decrescenti.

Si consideri un punto  $A$  interno di  $\sigma^*$ ; l'arco di traiettoria  $c_1$  relativo ad  $\mathfrak{N}^+$ , che esce da esso, incontrerà  $\Sigma^+$  in un punto  $A_1$ . Infatti, altrimenti, esso dovrebbe essere o asintotico per  $q_1$  crescente ad un'orbita chiusa, che dovrebbe ovviamente essere su un piano  $q_1 = \text{costante}$ , o asintotico ad un punto singolare, e qui è escluso sia l'un fatto che l'altro. Basta all'uopo ricordare che in  $R$  non ci sono punti singolari e l'unica orbita chiusa di  $\mathfrak{N}$ , giacente su un piano  $q_1 = \text{cost}$ , è  $\gamma$ , alla quale, per quanto visto più sopra, nessuna orbita è asintotica per  $q_1$  crescente.

Dal punto  $A_1$  interno a  $\Sigma^+$  esce al crescere di  $t$  un arco  $c_2$  relativo ad  $\mathfrak{N}^-$ , il quale, poichè non può essere asintotico a  $\gamma$  (per la proprietà stabilita più sopra al riguardo delle

traiettorie prossime a  $\gamma$ ) dovrà attraversare  $\sigma^*$  in un punto interno  $A_2$ , e giungere su  $\Sigma$  in un punto  $A_3$  che non può essere che interno a  $\Sigma^-$ . Considerata ora la traiettoria di  $\mathcal{N}^+$  che esce al crescere di  $t$  da  $A_3$  questa attraverserà  $\sigma^*$  in un punto  $B$ .

Nel modo qui sopra accennato si può associare quindi ad ogni punto interno  $A$  di  $\sigma^*$ , il punto  $B$  della stessa  $\sigma^*$  e ad essa interno. Si ottiene così una trasformazione  $B = \mathcal{T}(A)$  dei punti interni di  $\sigma^*$  in punti interni della stessa  $\sigma^*$ .

Si può osservare senz'altro che tale corrispondenza è continua.

Tale  $\mathcal{T}$  non è definita sul contorno di  $\sigma^*$ , ma ora noi la prolungheremo anche su di esso nella maniera che segue. Ad ogni punto  $Q$  di  $\gamma$  di coordinata  $\theta_0$  faremo corrispondere il punto  $Q'$  di coordinata  $\theta_2$ , ove  $\theta_2$  è il secondo valore coniugato a destra di  $\theta_0$ . La corrispondenza  $\theta_2(\theta_0)$  è, come sono  $\theta_1(\theta_0)$  e  $\theta_2(\theta_1)$ , periodica di periodo  $l$  e continua. Si viene così a stabilire una trasformazione del contorno  $\gamma$  di  $\sigma^*$  in sè, trasformazione che denoteremo con  $\mathcal{T}_1$  e che è continua e bi-univoca.

La trasformazione  $\mathcal{T}^*$ , definita come equivalente a  $\mathcal{T}$  per i punti interni di  $\sigma^*$  e ad  $\mathcal{T}_1$  per i punti della frontiera  $\gamma$ , trasforma punti di  $\sigma^*$  in punti dello stesso  $\sigma^*$  ed il contorno  $\gamma$  in se stesso. Essa è continua nei punti interni perchè lo è la  $\mathcal{T}$  ed è continua anche sul contorno come proveremo ora.

Siano infatti  $\theta_0$  e  $p_1^0$  le coordinate di un punto  $P$  prossimo al contorno  $\gamma$ , e  $\theta_2^{(Q)}$  e  $p_{12}$ , le coordinate del corrispondente  $P' = \mathcal{T}(P)$ . Per le proprietà accennate alla fine del numero precedente, se  $p_1^0 = \varepsilon$  si ha certamente  $p_{12} < k\varepsilon$  con  $k$  indipendente da  $\varepsilon$ , onde sarà  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_{12} = 0$ . Inoltre, sempre per le stesse proprietà,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_2^{(Q)} = \theta_2$ .

Perciò quando  $P$  tende ad un punto  $Q$  di  $\gamma$ ,  $P'$  tende al punto  $Q' = \mathcal{T}_1(Q)$ . Ciò prova l'asserto.

#### 4. - Dimostrazione dell'esistenza dell'ulteriore soluzione periodica.

La  $\mathcal{C}^*$  definita nel n. precedente trasforma quindi biunivocamente e con continuità  $\sigma^*$  in sè. In questa trasformazione esiste certamente un punto unito  $P$  e se dimostriamo, come faremo, qui di seguito, che il contorno è privo di punti uniti,  $P^*$  non potrà che essere un punto interno.

Se infatti ci fosse un punto unito su  $\gamma$ , esisterebbe un valore  $\theta_0$  per il cui secondo coniugato a destra,  $\theta_2$ , varrebbe la seguente:

$$(9) \quad \theta_2 - \theta_0 = n\lambda, \quad (n \text{ intero positivo})$$

ovvero esisterebbe per l'equazione (7) un valore  $t_0$  tale che il secondo coniugato a destra  $t_2$  soddisferebbe alla:

$$(10) \quad t_2 - t_0 = nT,$$

e, per la periodicità della dipendenza di  $t_2$  da  $t_0$ , sarebbe anche  $t_4 - t_2 = nT$ , ecc.

Una generica  $q_1$  delle soluzioni di (7), soddisfacente alla  $q_1(t_0) = 0$ , soddisferebbe, per ogni  $m$  intero e per un certo  $n$ , alla:

$$(11) \quad q_1(t_0 + mnT) = 0.$$

Ma ogni integrale della (7) si presenta, in ogni  $t_0 + mnT$ , sotto la forma:

$$(12) \quad q_1(t_0 + mnT) = M \cos \mu(t_0 + mnT) + N \sin \mu(t_0 + mnT)$$

con  $M$  ed  $N$  indipendenti da  $m$ .

Per ogni  $m$  deve allora essere, attesa la (11):

$$(13) \quad \operatorname{tg} \mu(t_0 + mnT) = -\frac{M}{N},$$

il che richiede che sia  $\mu mnT = r\pi$  con  $r$  intero, ovvero  $\pi/\mu T$  razionale, contrariamente all'ipotesi  $c$ .

Resta dunque provato che su  $\gamma$  non ci sono punti uniti in  $\mathcal{C}^*$ . Allora c'è certamente qualche punto  $P^*$  interno a  $\sigma^*$

che è unito in  $\mathcal{C}$  ovvero in  $\mathcal{C}^*$ , attesa l'identità di  $\mathcal{C}^*$  con  $\mathcal{C}$  relativamente ai punti interni a  $\sigma^*$ .

Se si considera l'arco di traiettoria  $c_1$ , di  $\mathfrak{N}^*$  che esce da  $P^*$  per  $t=0$ , esso giunge su  $\Sigma^+$  in  $P_1$ ; da  $P_1$  esce una traiettoria  $c_2$  di  $\mathfrak{N}^-$  che giunge su  $\Sigma^-$  in  $P_2$ , da  $P_2$  esce una traiettoria  $c_3$  di  $\mathfrak{N}^+$  che giunge su  $\sigma^*$  ancora in  $P^*$  e poichè per  $P^*$  di traiettorie di  $\mathfrak{N}^+$  ne passa una sola, essa viene a coincidere con  $c_1$ , onde il moto corrispondente è periodico ed in relazione ad esso  $q_1$  si annulla ed assume ognuno dei valori compreso tra il suo massimo ed il suo minimo due sole volte in un periodo. Risulta quindi dimostrato il teorema.

### 5. - Applicazione al moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico.

Il teorema dimostrato nei n. precedenti trova interessante applicazione nella teoria del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico. È noto, come abbiamo accennato nella prefazione, che il problema si riduce a quello del moto piano di un punto materiale<sup>6)</sup>, sollecitato da una forza il cui potenziale previa opportuna scelta di coordinate cartesiane  $q_1, q_2$  è del tipo:

$$(14) \quad U = -\frac{\alpha}{2} \left( \frac{\gamma - \psi}{q_2} \right)^2$$

ove  $\alpha$  e  $\gamma$  sono costanti positive ed inoltre  $\psi$  è dato da:

$$(15) \quad \psi = \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 + 1}{\sqrt{(q_1 + 1)^2 + q_2^2}} - \frac{q_1 - 1}{\sqrt{(q_1 - 1)^2 + q_2^2}} \right)$$

Le regioni del piano, in cui sono possibili movimenti del punto per i quali l'energia totale ha un valore  $h_0$  prefissato, sono definite dalla relazione:

$$(16) \quad 2h_0 - \frac{\alpha}{q_2^2} (\gamma - \psi)^2 \geq 0$$

---

<sup>6)</sup> Confrontare lavori citati in <sup>5)</sup>.

Si osservi ora che per ogni  $\gamma$  soddisfacente alle relazioni:

$$(17) \quad 1 < \gamma < \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

esistono due numeri  $k_1(\gamma)$  e  $k_2(\gamma)$  tali che per  $\sqrt{\frac{2\bar{h}_0}{\alpha}}$  soddisfacente alle disuguaglianze:

$$(18) \quad k_1(\gamma) < \sqrt{\frac{2\bar{h}_0}{\alpha}} < k_2(\gamma)$$

e solo allora, l'equazione

$$(19) \quad \gamma - \sqrt{\frac{2\bar{h}_0}{\alpha}} q_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + q_2^2}}$$

ha 3 radici reali positive e distinte.

In corrispondenza ai valori di  $\gamma$  soddisfacenti a (17) e di  $\sqrt{\frac{2\bar{h}_0}{\alpha}}$ , corrispondentemente, alla (18), le regioni del piano in cui è soddisfatta la (16), (limitandoci, attesa la simmetria rispetto all'asse  $q_1$ , a considerare solo quelle del semipiano

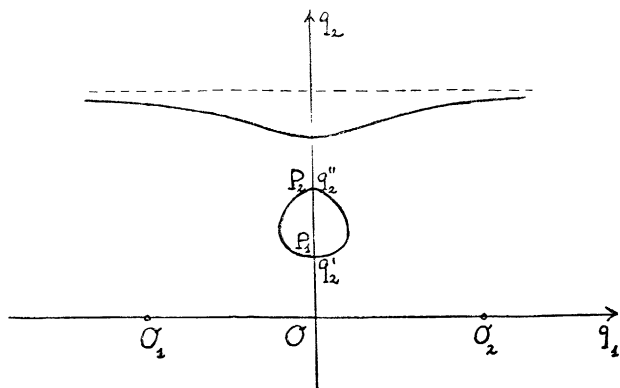


Fig. 1

$q_2 > 0$ ) sono due: l'una che si estende all'infinito e l'altra  $\Omega$  non esterna ad una curva chiusa  $\mathcal{C}$  (vedi fig. 1) simmetrica rispetto all'asse  $q_2$  e che taglia questo asse nei punti  $P_1, P_2$

le cui ordinate  $q_2'$ ,  $q_2''$  sono le due più piccole radici positive della (19).

Se si suppone dunque che siano soddisfatte le (17), (18), facilmente si riconosce, nei riguardi dei moti che avvengono nella  $\Omega$ , essere soddisfatte anche le ipotesi a) del teorema dimostrato.

Per quanto riguarda l'ipotesi b) si osservi che, poichè ci troviamo nelle condizioni ivi presupposte, i moti definiti da:

$$(20) \quad q_1 = 0, \quad \dot{q}_2 = \pm \sqrt{2h_0 - \frac{\alpha}{q_2^2} (\gamma - 4)^2}$$

rappresentano (a meno di una inessenziale costante) la soluzione  $p^*$  la cui traiettoria è il segmento  $P_1P_2$  percorso successivamente nei due sensi. Il periodo di tale soluzione è ovviamente:

$$(21) \quad T = 2 \int_{q_2'}^{q_2''} \frac{dq_2}{\sqrt{2h_0 - \frac{\alpha}{q_2^2} (\gamma - 4)^2}}$$

La prima parte dell'ipotesi c) è di più difficile verifica ma qui di seguito proveremo che almeno per opportuni valori di  $\gamma$  e del rapporto  $\sqrt{\frac{2h_0}{\alpha}}$ , soddisfacenti alle (17), (18), la c) è appunto verificata.

Cominciamo all'uopo con qualche osservazione al riguardo delle due più piccole radici positive  $q_2'$ ,  $q_2''$  dell'equazione (19).

Si rappresenti su un piano, in cui  $q_2$ ,  $y$  siano coordinate cartesiane la funzione (vedi fig. 2):

$$(22) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 + q_2^2}}$$

e si consideri la retta di equazione:

$$(23) \quad y = \gamma - \sqrt{\frac{2h_0}{\alpha}} q_2$$

Semplici considerazioni di natura geometrica permettono di asserire che al tendere ad 1 di  $\gamma$ , tende a 0 il limite in-

feriore  $k_1(\gamma)$  dei valori di  $\sqrt{\frac{2h_0}{\alpha}}$  per i quali la (19) ha 3 radici reali positive distinte.

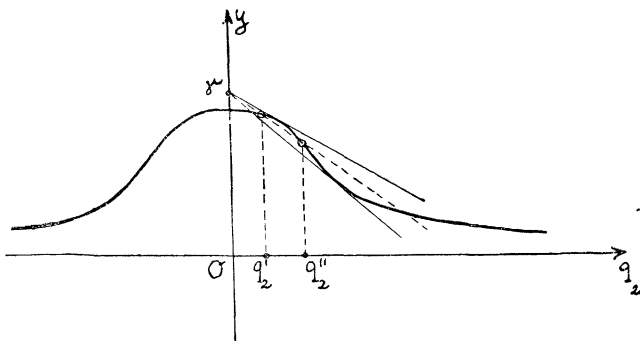


Fig. 2

Inoltre è facile riconoscere che si può sempre determinare un  $\gamma^* > 1$ , ma abbastanza prossimo ad 1, ed un  $h_1$  positivo tanto prossimo a zero per modo che per ogni  $\gamma$  e  $\sqrt{\frac{2h_0}{\alpha}}$  soddisfacenti rispettivamente alle relazioni:

$$(24) \quad 1 < \gamma < \gamma^*, \quad k_1(\gamma) < \sqrt{\frac{2h_0}{\alpha}} < k_1(\gamma) + h_1$$

le corrispondenti  $q_2'$ ,  $q_2''$  siano minori di un  $\epsilon$  positivo arbitrario.

Premesso ciò si consideri quella delle equazioni alle variazioni relative a  $p^*$  che riguarda  $q_1$ . Essa è ovviamente, qualora si denoti con  $q_2^*$  una generica soluzione di (20),

$$(25) \quad \ddot{q}_1^{(v)} + 3\alpha^2 \left( \gamma - \frac{1}{\sqrt{1 + q_2^{*2}}} \right) \frac{1}{(1 + q_2^{*2})^{\frac{5}{2}}} q_1^{(v)} = 0.$$

In relazione a (25) la condizione che gli esponenti caratteristici siano immaginari puri, è certamente soddisfatta, in base al criterio sufficiente di Liapounoff, se

$$(26) \quad T \int_0^T 3\alpha^2 \left( \gamma - \frac{1}{\sqrt{1 + q_2^{*2}}} \right) \frac{1}{(1 + q_2^{*2})^{\frac{5}{2}}} dt < 4.$$

Convenendo di indicare il valor medio di una funzione  $f(x)$  nell'intervallo  $a, b$  con il simbolo  $\{f(x)\}_{a,b}$  la (26) si può scrivere:

$$(27) \quad T^2 \left\{ 3\alpha^2 \left( \gamma - \frac{1}{(1 + q_2^{*2})^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{(1 + q_2^{*2})^{\frac{5}{2}}} \right\}_{0,T} < 4.$$

Posto ora per ragioni di brevità:

$$(28) \quad z = (1 + q_2^{*2})^{\frac{1}{2}}, \quad z' = (1 + q_2'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad z'' = (1 + q_2''^2)^{\frac{1}{2}},$$

da (21) discende

$$(29) \quad T = 2 \int_{z'}^{z''} \frac{z^2 dz}{\sqrt{2h_0(z - z')(z - z'') \left( z^2 + (z' + z'')z - \frac{\alpha^2}{2h_0 z' z''} \right)}}$$

ovvero, per il teorema della media generalizzato,

$$(30) \quad T = 2\pi \left\{ \frac{z^2}{\sqrt{2h_0} \sqrt{-z^2 - (z' + z'')z + \frac{\alpha^2}{2h_0 z' z''}}} \right\}_{z', z''}.$$

Sostituendo la (30) nelle (27) la condizione di Liapounoff diventa:

$$(31) \quad 12\pi^2 \left\{ \frac{\gamma - (1 + q_2^{*2})^{-\frac{1}{2}}}{(1 + q_2^{*2})^{\frac{5}{2}}} \right\}_{0,T} \left\{ \frac{z^2}{\sqrt{\frac{1}{z' z''} - \frac{2h_0 z}{\alpha^2} (z + z' + z'')}} \right\}_{z', z''}^2 < 4.$$

Alla (31) si può sempre soddisfare scegliendo  $\gamma$  e  $\sqrt{\frac{2h_0}{\alpha}}$  soddisfacenti a (24) per  $\gamma^*$  abbastanza prossimo ad 1 ed  $h_1$  abbastanza piccolo. Per convincersi di ciò basta pensare che  $z', z''$  e quindi  $z$ , che è certamente compreso tra essi, tendono ad 1 quando  $\gamma$  tende ad 1 e  $\sqrt{\frac{2h_0}{\alpha}}$  tende a zero con  $q_2'$  e  $q_2''$  e quindi con  $q_2^*$ , cosicchè mentre il secondo fattore del primo membro di 31) tende a 0, il terzo tende ad 1, lo stesso primo membro di (31) tende a zero.

L'ultima condizione al riguardo della irrazionalità del rap-



porto  $\frac{\pi}{\mu T}$  è estremamente improbabile non sia verificata, e, se potesse succedere che essa non fosse verificata, ciò avverrebbe per qualche valore eccezionale dei parametri.

Resta quindi, completamente provato che le ipotesi del teorema sono tutte soddisfatte almeno per opportuni valori dei parametri, cioè che per tali valori, oltre all'orbita periodica rappresentata dal segmento  $P_1P_2$  dell'asse  $q_2$ , esiste un'altra orbita chiusa, che taglia ogni parallela all'asse  $q_2$  al massimo in due punti.