LUIGI FANTAPPIÈ

Su un'espressione generale dei funzionali lineari mediante le funzioni « para-analitiche » di più variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__1_0>

SU UN' ESPRESSIONE GENERALE DEI FUNZIONALI LINEARI MEDIANTE LE FUNZIONI "PARA-ANALITICHE" DI PIÙ VARIABILI

Nota (*) *di* LUIGI FANTAPPIÈ (*a Roma*)

1. - E' ben noto [1]) che un funzionale analitico lineare $F[f(z_1, z_2, \dots, z_n)]$ ha per campo di definizione una regione funzionale lineare (A), costituita da tutte e sole le funzioni f localmente analitiche di n variabili e *biregolari* (cioè regolari in un punto proprio, regolari e nulle in un punto all' ∞) in tutti i punti di un dato insieme chiuso A (insieme *caratteristico* della regione funzionale) della varietà di Segre, su cui si rappresentano realmente tutte le n-uple complesse $z_1, z_2, \dots,$ z_n (proprie e improprie).

E' altresì noto che, nel caso più semplice di $n = 1$, il valore di un tale funzionale lineare F *in tutto il suo campo di definizione* (A) è dato dalla formula integrale fondamentale

$$F[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C u(z)f(z)dz \tag{1}$$

dove $u(z)$ è la cosiddetta indicatrice (emisimmetrica) del funzionale F, definita dalla formula

$$u(\alpha) = F\left[\frac{1}{\alpha - z}\right] \tag{2}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 15 ottobre 1952.

[1]) Per questi concetti, riguardanti i funzionali analitici, e per i risultati citati in seguito, vedere il mio corso di lezioni di Madrid e Barcellona (1942): *Los funcionales analiticos, etc.*, pubblicato in volume dal Consejo Sup. de Investigaciones Científicas, Madrid, 1943 e anche la 4ª parte, redatta dal Dr. Pellegrino, del volume di P. LÉVY, « *Problèmes concrets d'Analyse fonctionnelle* ». Paris, Gauthier-Villars, 1951.

e la curva d'integrazione C è una curva chiusa qualunque della sfera complessa, che racchiuda però nel suo interno tutti i punti dell'insieme chiuso A (caratteristico della regione di definizione di F), ma lasci all'esterno tutti i punti dell'insieme chiuso I, ove la funzione $f(z)$ non è definita. Una tale curva si dice una curva *separatrice* dei due insiemi A e I, ed è evidente che due curve separatrici C e C' degli stessi insiemi, ed ugualmente orientate, sono *omologhe* nel campo ove la funzione integranda è regolare (nulla di 2° ordine all'∞, se è ivi regolare), cosicchè nella formula (1) *si ottiene sempre lo stesso valore anche sostituendo la curva C con qualunque altra curva separatrice, C',* cioè

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C u(z)f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} u(z)f(z)dz = F[f(z)] \tag{3}$$

Le cose cambiano radicalmente, quando si passa a considerare invece il caso dei funzionali lineari delle funzioni analitiche *di più* variabili complesse, già da $n = 2$ in poi. Intanto, non è più sempre possibile generalizzare la nozione di funzione « indicatrice », data dalla (2) per $n = 1$, essendo necessario che il campo di definizione (A) del funzionale lineare $F[f(z_1, z_2, \ldots, z_n)]$, e quindi il suo insieme caratteristico A, soddisfi a particolari condizioni. Ma anche se tali condizioni sono soddisfatte, come avviene, per es., *se A è tutto al finito,* anche cioè se è possibile definire una « indicatrice » del funzionale lineare (« emisimmetrica », analoga alla (2), « simmetrica », o « proiettiva »), le formule integrali, che si conoscono per calcolare il valore del funzionale lineare F, mediante una tale indicatrice, *non dànno* in generale questo valore *per tutte* le funzioni f del suo campo di definizione, ma solo per le funzioni *di un campo parziale* $(A^*) \subset (A)$, restando ignoto il valore del funzionale per le funzioni rimanenti.

Nella presente Nota ci proponiamo invece di determinare la classe, abbastanza interessante (che può forse estendersi fino a comprendere *la totalità* dei funzionali lineari) di quei funzionali lineari F di una funzione $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ di n variabili, il cui valore può esprimersi ancora *in tutto il campo di definizione* (A), che può essere qualunque (supporremo soltanto A a distanza finita) con una formula analoga alla (1), e cioè con un integrale esteso pure a una varietà V, *separatrice* dei due insiemi chiusi A e I, e che non vari sostituendo tale varietà con un' altra varietà V', *omologa* nel campo comune di biregolarità delle funzioni integrande.

2. - Cominciamo perciò con l' osservare che, avendo supposto A al finito, ed essendo una qualunque funzione $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ del campo di definizione (A) del funzionale lineare F regolare nei punti di A, si potrà sempre scegliere un intorno di A, al finito, e la varietà d' integrazione V (separatrice) abbastanza ristretta intorno ad A, in modo che sia compresa entro questo intorno. Per le considerazioni che dovremo svolgere, ci sarà dunque sufficiente rappresentare le sole n-uple complesse *finite* $z_1, z_2, \dots, z_n$ coi punti reali di un S_{2n} cartesiano $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, ponendo per es.,

$$(4) \qquad z_1 = x_1 + ix_{n+1}, \; z_2 = x_2 + ix_{n+2}, \dots, \; z_n = x_n + ix_{2n}$$

Poichè la funzione arbitraria f, argomento del funzionale, è definita e regolare in una regione al finito M di S_{2n}, *contenente l' insieme* A nel suo interno, se indichiamo con I l' insieme dei punti esterni o al contorno di M, una varietà *separatrice* di A e I sarà allora data da una *ipersuperficie chiusa* V_{2n-1} di S_{2n} contenuta in M, la quale sia, entro M, contorno completo di un' altra regione parziale $M'(\subset M)$, a cui l' insieme A sia ancora interno. Infatti V_{2n-1} è omologa a O entro M, ma non lo è più nella regione M privata dei punti di A; V_{2n-1} è pure omologa a O entro la varietà di Segre, (rappresentativa delle n-uple complesse), privata dei punti di A (essendo il contorno, cambiato di segno, del dominio complementare di M', che non contiene A), ma non lo è più in tale dominio privato dei punti di I (ad esso interni).

Se dunque il valore del funzionale lineare $F[f]$ può per ipotesi ottenersi, in tutto il suo campo di definizione (A), da una formula analoga alla (1), tale formula dovrà avere la forma precisa

$$(5) \qquad F[f(z_1, z_2, \dots, z_n)] = \iint\limits_{V_{2n-1}} \dots \int f(z_1, z_2, \dots, z_n)\omega_{2n-1}$$

ove a secondo membro compare proprio un integrale multiplo d' ordine $2n-1$, esteso a una varietà separatrice V_{2n-1}, di questa dimensione, e quindi a coefficiente della funzione f dovrà comparire *una forma differenziale esterna* ω_{2n-1}, dello stesso grado $2n-1$, nei differenziali $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{2n}$ delle $2n$ variabili reali $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ (4) (parti reali e coefficienti degli immaginari delle variabili complesse $z_1, z_2, \ldots, z_n$), del tipo

(6) $$\omega_{2n-1} = \sum_{1}^{2n}{}_{r} (-1)^{r-1} u_r dx_1 dx_2 \ldots dx_{r-1} dx_{r+1} \ldots dx_{2n}$$

I $2n$ coefficienti u_r di questa forma si supporranno funzioni continue e con derivate prime continue, definite in tutta una regione R, ottenuta da un' altra regione R_1 (eventualmente da tutto lo spazio S_{2n}, ma interessano in realtà soltanto i valori nei punti prossimi ad A) contenente nel suo interno tutti i punti di A, dopo aver escluso da R_1 *proprio questi punti di* A, ove dunque tali coefficienti *non sono definiti* (in generale, *singolari* in A, regolari in $R = R_1 - A$). In definitiva l'espressione integranda $f\omega$, che figura nel 2° membro della (5), sarà dunque *regolare* nella regione $\overline{R}$ intersezione di R con la regione M, in cui è regolare la f.

3. - D' altra parte l' espressione integrale (5) del funzionale F non deve variare, per ipotesi, se la varietà separatrice V d' integrazione si sostituisce con un' altra qualunque varietà separatrice V', *omologa* a V ($V' \backsim V$) entro la regione $\overline{R}$ di regolarità della forma integranda

(7) $$f\omega = \sum_{1}^{2n}{}_{r} (-1)^{r-1} f u_r dx_1 dx_2 \ldots dx_{r-1} dx_{r+1} \ldots dx_{2n}$$

Ma la condizione necessaria e sufficiente perchè sia

(8) $$\int_V f\omega = \int_{V'} f\omega$$

per ogni

(9) $$V' \backsim V$$

è data semplicemente dal fatto che la forma differenziale integranda deve essere *chiusa* [1]), cioè

---

[2]) V., p. es., B. SEGRE, « *Forme differenziali e loro integrali* », Roma, 1951, pag. 176 e 141.

$$d(f\omega) = 0 \tag{10}$$

e poichè la forma $f\omega$ è di grado $2n-1$, tale condizione riducesi all' unica equazione differenziale nei coefficienti

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{u}) = \sum_1^{2n}{}_r \frac{\partial(fu_r)}{\partial x_r} = 0 \tag{11}$$

ove abbiamo indicato con $\boldsymbol{u}$ e $f\boldsymbol{u}$ i vettori di S_{2n} che hanno per componenti i coefficienti, coi segni alternati, delle forme ω e $f\omega$ rispettivamente. Deve dunque essere

$$f \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \sum_1^{2n}{}_r u_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0 \tag{12}$$

per ogni funzione analitica $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ regolare in A (e nella regione $\bar{R}$). Tra tali funzioni c'è anche la funzione costante $f = 1$ che, sostituita nella (11), ci dà dunque una condizione importante a cui devono soddisfare i coefficienti della forma differenziale ω:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \sum_1^{2n}{}_r \frac{\partial u_r}{\partial x_r} = 0 \tag{13}$$

Tale condizione (il vettore $\boldsymbol{u}$ *a divergenza nulla*) ci dice che anche *la sola forma differenziale* ω *deve essere chiusa*, e quindi, per varietà V, V' omologhe

$$\int_V \omega = \int_{V'} \omega \quad (= F[1]) \tag{14}$$

Tenendo conto della (13), la (12) diviene dunque

$$\sum_1^{2n}{}_r u_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0 \tag{15}$$

che deve pure essere verificata, come la (12), per ogni funzione analitica $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ regolare in A, dunque, in particolare anche per

$$f = z_r = x_r + ix_{n+r} \qquad (r = 1, 2, \dots, n) \tag{16}$$

fornendo così le altre n condizioni, per il vettore $\boldsymbol{u}$

$$u_r + iu_{n+r} = 0$$

cioè

$$u_{n+r} = iu_r \qquad (r = 1, 2, \dots, n) \tag{17}$$

Sostituendo questi valori delle u_{n+r} *nella* (13), *si ha allora la relazione fondamentale*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \sum_1^n{}_r \frac{\partial u_r}{\partial x_r} + i \sum_1^n{}_r \frac{\partial u_r}{\partial x_{n+r}} = 0 \tag{18}$$

o anche

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \operatorname{div}' \boldsymbol{u} + i \operatorname{div}'' \boldsymbol{u} = 0 \tag{19}$$

se indichiamo con $\operatorname{div}' \boldsymbol{u}$ e $\operatorname{div}'' \boldsymbol{u}$ la divergenza del vettore complesso *di* S_n di componenti $u_1, u_2, \dots, u_n$, considerato rispettivamente come vettore di campo nell' S_n delle sole prime n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, o nell' S_n delle sole ultime n variabili $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$.

Viceversa, si vede subito che, preso ad arbitrio un qualunque vettore complesso $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$ di S_n, soddisfacente alla sola condizione (18) o (19), e completato tale vettore di S_n con l'aggiunta delle altre n componenti u_{n+r} (17), nel primitivo vettore $\boldsymbol{u}$ di S_{2n}, la forma ω ad esso corrispondente, data dalla (6), soddisfa effettivamente a tutti i requisiti richiesti per l'espressione (5) di un funzionale lineare del tipo indicato.

La condizione necessaria e sufficiente è infatti espressa dalla (11) o (12), che ora, tenendo conto della (19) e delle (17), si riduce semplicemente all' altra

$$\sum_1^n{}_r u_r \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} + i \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}}\right) = 0 \tag{20}$$

E' dunque sufficiente che la f sia una funzione *analitica* rispetto a ciascuna variabile $z_r = x_r + i x_{n+r}$, come abbiamo supposto, perchè risultino identicamente soddisfatte le n *condizioni di monogeneità*

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}} \text{ o anche } D_r f = \frac{\partial f}{\partial x_r} + i \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n) \tag{21}$$

e di conseguenza la (20), e quindi anche le (12), (11), (10).

4. - Osserviamo che, spezzando le funzioni complesse u nelle parti reali e immaginarie

$$u_r = u_r' + i u_r'' \qquad (r = 1, 2, \dots, n) \tag{22}$$

e sostituendole nell'equazione fondamentale (18), si ha allora la relazione

$$\sum_{1}^{n}{}_r \left\{ \frac{\partial(u_r' + iu_r'')}{\partial x_r} + \frac{\partial(-u_r'' + iu_r')}{\partial x_{n+r}} \right\} = 0 \tag{18'}$$

e cioè *le due equazioni fondamentali nelle* $2n$ *funzioni reali* u_r', u_r'' *delle* $2n$ *variabili reali* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial u_r'}{\partial x_r} - \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial u_r''}{\partial x_{n+r}} = 0 \\ &\sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial u_r''}{\partial x_r} + \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial u_r'}{\partial x_{n+r}} = 0 \end{aligned} \right. \tag{23}$$

che possiamo anche scrivere, con le notazioni della formula (19)

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{div}' \boldsymbol{u}' - \operatorname{div}'' \boldsymbol{u}'' = 0 \\ &\operatorname{div}'' \boldsymbol{u}' + \operatorname{div}' \boldsymbol{u}'' = 0 . \end{aligned} \right. \tag{24}$$

5. - E' interessante notare che, per $n = 1$, *la condizione fondamentale* (18), (19) *o* (23) *si riduce alle sole condizioni di monogeneità per l'unica funzione* $u(z) = u(x + iy)$, riottenendosi così, come caso particolare della (5), proprio la formula fondamentale (1), valida per tutti i funzionali lineari delle funzioni $f(z)$ di una sola variabile (a meno di un coefficiente costante, che si può pensare incorporato entro la $u(z)$).

Un altro caso particolare analogo a questo, in cui la condizione fondamentale (18) o (19) è evidentemente soddisfatta, si ha *quando le* n *funzioni* u_n *sono tutte funzioni analitiche delle* n *variabili complesse* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, e quindi sono soddisfatte le n^2 *condizioni di monogeneità*

$$D_s u_r = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + i \frac{\partial u_r}{\partial x_{n+s}} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

(poichè nel 2° membro della (18) ogni termine del 1° sommatorio si elimina col corrispondente del 2° sommatorio).

In questo caso, a ogni n-upla complessa $z_1, z_2, \ldots, z_n$ di un certo campo viene a corrispondere *un'altra* n-upla *complessa* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e nasce quindi *una rappresentazione* (*in generale parziale*) *della varietà di Segre* (*immagine di tali* n-uple) *su se stessa, la quale non è altro che una rappresentazione pseudoconforme.*

Un caso particolare ancora più vasto di funzioni u_r soddisfacenti alla (18) o (19), si ha *quando ciascuna funzione* u_r *è funzione analitica della sola variabile* z_r *dello stesso indice* (in generale funzione non analitica delle altre variabili), quando cioè, invece delle n^2 condizioni di monogeneità (25), sono soddisfatte le sole n condizioni (25), per cui $s = r$, come è evidente dalla struttura della (18).

Comunque, anche considerando il caso completamente generale delle n-uple di funzioni u_r che soddisfano alla (18) o (19), e con le quali quindi si può costruire una forma ω_{2n-s} del tipo (6) considerato, e, in corrispondenza, un *funzionale del tipo* (5), *evidentemente analitico e lineare,* si ha sempre *una rappresentazione* (*parziale*) *dello spazio vettoriale* (*complesso*) S_n *delle* n-uple *complesse su sè stesso,* essendo sempre associata a ogni n-upla complessa $z_1, z_2, \dots, z_n$ di un certo campo *ancora un'altra* n-upla *complessa* $u_1, u_2, \dots, u_n$. Sarà allora naturale considerare queste n-uple, o vettori complessi $\boldsymbol{u}$ di S_n, come *funzioni* della n-upla (o vettore) variabile $z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n)$, che generalizzano la nozione di *funzione analitica* $f(z)$, a cui si riducono per $n = 1$, e che chiameremo *funzioni para-analitiche* di $z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Come abbiamo visto, casi particolari di funzioni para-analitiche $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ sono dati dalle n-uple di funzioni analitiche di tutte le variabili z_s, o anche delle n-uple u_r, in cui ciascuna u_r è funzione analitica della sola z_r corrispondente.

Di più, data la linearità della condizione fondamentale (18) o (19), che caratterizza le funzioni para-analitiche, è evidente che *anche la somma e la differenza di due funzioni para-analitiche definite in uno stesso campo, è ancora para-analitica,* e quindi che tali funzioni costituiscono *un modulo.*

Sempre considerando *funzioni definite e regolari in uno stesso campo,* è poi da osservare che, pure per la linearità della (19), *anche il prodotto* $c\boldsymbol{u} \equiv (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$ *di una funzione para-analitica* $\boldsymbol{u}$ *per una costante* c (*complessa*) *è ancora una funzione para-analitica.*

Più generalmente, *anche il prodotto* $f\boldsymbol{u}$ *di una funzione para-analitica* $\boldsymbol{u}$ *per una funzione analitica* $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ *di tutte le* n *variabili* z_r *è pure una funzione para-analitica,* dato che la condizione fondamentale (18) si riduce, per la $f\boldsymbol{u}$, alla (20), che è sempre soddisfatta, in virtù delle (21).

Il modulo delle funzioni para-analitiche è dunque *un modulo con moltiplicatori,* tali moltiplicatori essendo dati *dall' anello di tutte le funzioni analitiche, regolari nel campo considerato* (in particolare costanti complesse); questo insieme delle funzioni para-analitiche, regolari in un certo campo, può dunque anche considerarsi come *uno spazio vettoriale,* a moltiplicatori nel detto anello.

Infine un' altra proprietà notevole di tale spazio delle funzioni *para-analitiche* $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$, si ha considerando la « trasformazione infinitesima » associata a ciascuna di esse

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad Uf &= \sum_{1}^{n}{}_r\, u_r \frac{\partial f}{\partial x_r} + i \sum_{1}^{n}{}_r\, u_r \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}} \\
&= \boldsymbol{u} \times \operatorname{grad}' f + i\boldsymbol{u} \times \operatorname{grad}'' f
\end{aligned}
$$

(con evidente significato dei simboli $\times$, grad', grad''). Prese infatti due tali funzioni para-analitiche $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n)$ (per cui si suppongano le componenti con derivate seconde continue), e le due corrispondenti trasformazioni infinitesime Uf e

$$
(27) \qquad Vf = \sum_{1}^{n}{}_r\, v_r \frac{\partial f}{\partial x_r} + i \sum_{1}^{n}{}_r\, v_r \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}}
$$

potremo allora costruire *la trasformazione infinitesima alternata*

$$
(28) \qquad Wf = (U, V)f = UVf - VUf = \sum_{1}^{n}{}_r\, w_r \frac{\partial}{\partial x_r} + i \sum_{1}^{n}{}_r\, w_r \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}}
$$

i cui coefficienti w_r sono dati, com'è noto [3]), dalle espressioni

$$
(29) \qquad w_r = Uv_r - Vu_r \qquad (r = 1, 2, \dots, n)
$$

Ma con facili calcoli risulta

$$
\begin{aligned}
(30) \qquad & \operatorname{div}' \boldsymbol{w} + i \operatorname{div}'' \boldsymbol{w} = \\
&= \boldsymbol{u} \times \operatorname{grad}'(\operatorname{div}' \boldsymbol{v} + i \operatorname{div}'' \boldsymbol{v}) + i\boldsymbol{u} \times \operatorname{grad}''(\operatorname{div}' \boldsymbol{v} + i \operatorname{div}'' \boldsymbol{v}) - \\
&- \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad}'(\operatorname{div}' \boldsymbol{u} + i \operatorname{div}'' \boldsymbol{u}) - i\boldsymbol{v} \times \operatorname{grad}''(\operatorname{iv}' \boldsymbol{u} + i \operatorname{div}'' \boldsymbol{u})
\end{aligned}
$$

e quindi anche quest' espressione è identicamente nulla, quan-

---

3) V., per es., L. BIANCHI, *Gruppi continui finiti di trasformazioni,* Pisa, Spoerri, 1918, pag. 17.

do lo sono le espressioni tra parentesi, quando cioè $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono funzioni para-analitiche. Definendo come alternata $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ di due funzioni *para-analitiche* la n-upla $\boldsymbol{w}_r$ data dalle (29), cioè il vettore $\boldsymbol{w} \equiv (w_1, w_2, \dots, w_n)$, si ha dunque che *anche l'alternata* (29) *di due funzioni para-analitiche è pure una funzione para-analitica.*

Se nello spazio vettoriale di tutte le funzioni para-analitiche $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$ definite e indefinitamente derivabili in un certo campo dell' S_{2n} (a moltiplicatori funzioni analitiche), oltre la *somma e la differenza* di due funzioni, definiamo anche una operazione di *prodotto* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, con le (29), cioè come la funzione *alternata* delle due, con le note proprietà *distributiva* (*non* associativa) e le altre:

$$(31) \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

$$(32) \qquad ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) + ((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}) + ((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = 0$$

(identità di Jacobi)

tale spazio vettoriale delle funzioni para-analitiche risulta allora addirittura *un'algebra di Lie,* a coefficienti funzioni analitiche.

Ciò, del resto, era da prevedersi, considerando il fatto che, nello spazio S_{2n} delle $2n$ variabili *complesse* $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ (non più soltanto *reali,* come finora) l'equazione differenziale (18) *definisce le trasformazioni infinitesime* (26) *di un gruppo continuo infinito,* come si vede subito osservando che, cambiando le variabili indipendenti $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ per il fattore $-i$ (cioè nelle $-ix_{n+1}, -ix_{n+2}, \dots, -ix_{2n}$), la (18) non è altro che *l' equazione di definizione del gruppo infinito di Möbius* (*complesso*) *delle trasformazioni equivalenti sulle* $2n$ *variabili complesse* $x_1, x_2, \dots, x_n, -ix_{n+1}, -ix_{n+2}, \dots, -ix_{2n}$.

Per considerare tale gruppo, in particolare per costruirne le traiettorie, dato che i coefficienti $u_1, u_2, \dots, u_n, iu_1, \dots, iu_n$ delle trasformazioni infinitesime (26) sono *necessariamente complessi* (almeno in parte), occorre però considerare funzioni che debbono essere definite e derivabili *anche per valori complessi* delle $2n$ variabili $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ (e non solo reali), cioè funzioni *che debbono essere necessariamente funzioni « analitiche » di queste* $2n$ *variabili,* non però, in generale, funzioni analitiche delle sole n combinazioni $z_r = x_r + ix_{n+r}$ $(r = 1, 2, \dots, n)$.