Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Roberto Conti

Su una classe generale di problemi ai limiti non lineari per i sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 181-191

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__181_0>

SU UNA CLASSE GENERALE DI PROBLEMI AI LIMITI NON LINEARI PER I SISTEMI DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

Nota (*) *di* ROBERTO CONTI (*a Firenze*)

1. — In una Nota del 1947 [1]) G. STAMPACCHIA ha posto e risolto, sotto ipotesi opportune, un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z), \end{cases}$$

che può enunciarsi, in termini geometrici, come segue: « Ricercare se esistono curve integrali

$$C: \qquad y = y(x) \quad , \quad z = z(x) \quad , \quad a \leq x \leq b$$

del sistema (1) che si appoggiano a due curve assegnate γ_1, γ_2, giacenti nei piani $x = a$, $x = b$ ».

In questa formulazione, estesa successivamente dallo stesso A. ai sistemi di n equazioni [2]) rientrano numerosi tipi di problemi ai limiti studiati per sistemi di due equazioni [3]).

---

*) Pervenuta in Redazione il 24 aprile 1953.

[1]) G. STAMPACCHIA, *Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, Rend. Lincei, (8) 2 (1947), pp. 411-8. Tale Nota riproduce, in parte la Tesi di Laurea dell'A., discussa nel nov. 1944.

[2]) G. STAMPACCHIA, *Sulle condizioni che determinano gli integrali dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, Giorn. di Mat. di Battaglini, (4) 77 (1947), pp. 55-60.

[3]) Se le curve γ_1, γ_2 sono rette si hanno i problemi con condizioni

Il metodo dimostrativo seguito da G. STAMPACCHIA è un adattamento del procedimento ideato da L. TONELLI per la risoluzione di una certa classe di equazioni funzionali [4]).

Di un analogo adattamento si è valso E. MAGENES per provare l'esistenza di una soluzione del problema di T. SATÔ relativo all'equazione

$$y'' = g(x, y, y') \tag{2}$$

consistente nel ricercare una soluzione della (2) che passi per un punto $P \equiv (x_0, y_0)$ assegnato e risulti tangente ad una certa curva del piano x, y, pure assegnata [5]).

Sotto veste geometrica il problema di T. SATÔ consiste nel ricercare una soluzione del particolare sistema

$$\left\{\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}\right. \tag{1'}$$

la quale si appoggi alla retta

$$\gamma_1: \quad x = x_0 \quad , \quad y = y_0$$

ed alla curva

$$\gamma_2: \quad y = y(x) \quad , \quad z = y'(x) \, ,$$

---

lineari, in particolare quello di NICOLETTI. Se $g \equiv 0$ il sistema (1) equivale all'equazione $y' = f(x, y, \lambda)$, dipendente da un parametro λ per la quale problemi ai limiti del tipo sopra detto sono stati studiati da F. CAFIERO (a), *Su un problema relativo all'equazione* $y' = f(x, y, \lambda)$, Giorn. di Mat. di Battaglini, (4) 77 (1947), pp. 145-163; (b) *Sui problemi ai limiti relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine e dipendente da un parametro*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 18 (1949), pp. 239-257) e da G. ZWIRNER (*Criteri di esistenza per un problema al contorno relativo all'equazione* $y' = f(x, y, \lambda)$, Rend, Sem. Mat. Univ. Padova, 19 (1950), pp. 141-158).

4) L. TONELLI, *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*, Bull. Calcutta Math. Soc., 20 (1928), pp. 31-48. La prima applicazione nel campo delle equazioni differenziali si trova in G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte 1ª, (Bologna, 1941), pp. 42 e segg.

5) E. MAGENES, *Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$, Nota I, Rend. Lincei, (8) 2 (1947), pp. 130-6; (Nota II, ibid., pp. 258-261).

Poichè la γ_2 non giace in un piano parallelo al piano y, z (anzi, in generale è sghemba) il problema di T. SATÔ non rientra tra quelli di G. STAMPACCHIA.

In questa Nota vogliamo far vedere come il procedimento di L. TONELLI ora ricordato si possa utilizzare anche per risolvere, sotto ipotesi convenienti, il seguente problema: « *Ricercare se esistono curve integrali del sistema* (1) *che si appoggino alla retta*

$$\gamma_1: \qquad x = x_0 \quad , \quad y = y_0$$

ed alla curva

$$\gamma_2: \qquad y = Y(x) \quad , \quad z = Z(x)$$

con $Y(x)$, $Z(x)$ funzioni assolutamente continue assegnate in un certo intervallo ».

Questo problema, da un lato viene ad integrare la classe dei problemi di STAMPACCHIA prima ricordati e d'altro canto generalizza quello di SATÔ, anzitutto perchè il sistema considerato è più generale del sistema (1') e in secondo luogo perchè qualora il sistema sia appunto del tipo (1') il problema stesso, trasferito nel piano x, y, diventa quello di ricercare una soluzione dell'equazione (2) passante per il punto $P \equiv (x_0, y_0)$, la quale giunga sulla curva

$$\Gamma: \qquad y = Y(x)$$

con direzione $Z(x)$ assegnata, ma non necessariamente coincidente con quella che Γ ha nel punto di incontro con la soluzione [6]).

[6]) Problemi di questo tipo si incontrano ad es. nel Calcolo delle Variazioni quando si cerca il minimo per l'integrale

$$I(C) = \int_C F(x, y, y')\,dx$$

in un insieme di curve

$$C: \qquad y = y(x)$$

aventi un estremo fisso, P_0, ed un estremo variabile su di una curva Γ assegnata. Come è risaputo, le curve estremanti, sotto condizioni opportune, risultano soluzioni di un'equazione differenziale del 2° ordine

2. — Proviamo ora il

Teorema. Sia dato il sistema

$$
(3) \qquad \begin{cases} y' = F(x,y,z)z + \varphi_1(x,y,z) \\ z' = \varphi_2(x,y,z) \end{cases}
$$

dove $F(x,y,z)$, $\varphi_1(x,y,z)$, $\varphi_2(x,y,z)$ *sono funzioni (reali) definite nel semispazio*

$$
S: \qquad x_0 \leq x \quad , \quad |y| < \infty \quad , \quad |z| < \infty
$$

ed ivi soddisfacenti le seguenti ipotesi

i) *per ogni* $x \geq x_0$ *esse sono continue rispetto ad* (y,z); *per ogni* (y,z) *esse sono misurabili rispetto ad* x;

ii) *esistono cinque funzioni* $p(x)$, $q(x)$, $r_1(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$, *le prime tre non negative, tutte sommabili in ogni intervallo finito del semiasse* $x \geq x_0$, *tali che in* S *sia*

$$
(4) \qquad p(x) \leq F(x,y,z) \leq q(x)
$$

$$
(4') \qquad |\varphi_1(x,\ y,\ z)| \leq r_1(x)
$$

$$
(5) \qquad s_1(x) \leq \varphi_2(x,\ y,\ z) \leq s_2(x)\ ;
$$

Sia inoltre data la retta

$$
\gamma_1: \qquad x = x_0 \quad , \quad y = y_0
$$

e la curva

$$
\gamma_2: \qquad y = Y(x) \quad , \quad z = Z(x)
$$

con $Y(x)$, $Z(x)$ *funzioni assolutamente continue in ogni intervallo finito del semiasse* $x > x_0$.

Infine esista un numero $\xi_1 \geq x_0$ *per cui valga uno dei due sistemi di disuguaglianze*

$$
(6) \qquad \begin{cases} Y(\xi_1) + Z(\xi_1)\displaystyle\int_{\xi_1}^{x_0} q(t)dt - \int_{\xi_1}^{x_0} r_1(t)dt + \int_{\xi_1}^{x_0} q(t)\left(\int_{\xi_1}^{t} s_2(u)du\right)dt < y_0 \\ Z(\xi_1) \leq 0 \end{cases}
$$

(equazione di EULERO) le quali escono dal punto P_0 e debbono risultare «trasversali» a Γ, cioè giungere su Γ con una direzione (dipendente dalla F integranda) e in genere diversa da quella di Γ.

$$(6') \quad \begin{cases} Y(\xi_1) + Z(\xi_1) \int\limits_{\xi_1}^{x_0} p(t)dt - \int\limits_{\xi_1}^{x_0} r_1(t)dt + \int\limits_{\xi_1}^{x_0} q(t)\left(\int\limits_{\xi_1}^{t} s_2(u)du\right) dt < y_0 \\ Z(\xi_1) \geq 0 \end{cases}$$

ed un numero $\xi_2 \geq x_0$ *per cui valga uno dei due sistemi di disuguaglianze*

$$(7) \quad \begin{cases} Y(\xi_2) + Z(\xi_2) \int\limits_{\xi_2}^{x_0} p(t)dt + \int\limits_{\xi_2}^{x_0} r_1(t)dt + \int\limits_{\xi_2}^{x_0} p(t)\left(\int\limits_{\xi_2}^{t} s_2(u)du\right) dt > y_0 \\ Z(\xi_2) \leq 0 \end{cases}$$

$$(7') \quad \begin{cases} Y(\xi_2) + Z(\xi_2) \int\limits_{\xi_2}^{x_0} q(t)dt + \int\limits_{\xi_2}^{x_0} r_1(t)dt + \int\limits_{\xi_2}^{x_0} p(t)\left(\int\limits_{\xi_2}^{t} s_2(u)du\right) dt > y_0 \\ Z(\xi_2) \geq 0. \end{cases}$$

Sotto queste ipotesi esiste almeno una soluzione [7]) $y = y(x)$, $z = z(x)$ *del sistema* (3) *la quale si appoggia alla retta* γ_1 *ed alla curva* γ_2 [8]).

Sia ξ un qualunque numero maggiore di x_0. Fissato l'intero n, si divida l'intervallo (x_0, ξ) in n parti uguali mediante i punti

$$x_0, \; x_0 + \frac{\xi - x_0}{n}, \; x_0 + 2\frac{\xi - x_0}{n}, \; \ldots, \; x_0 + n\frac{\xi - x_0}{n} = \xi .$$

In corrispondenza ad ogni coppia (ξ, n) si costruisca la curva

$$C_{\xi, n}: \qquad y = y_n(x), \quad z = z_n(x), \quad x_0 \leq x \leq \xi ,$$

---

7) Soluzione del sistema (3) è ogni coppia di funzioni $y(x)$, $z(x)$ assolutamente continue in un opportuno intervallo (x_0, x_1) ed ivi soddisfacente quasi dappertutto le (3).

8) Il fatto che la curva γ_2 sia considerata solo per valori di x maggiori di x_0 si giustifica osservando che se $y(x)$, $z(x)$ è una soluzione del problema potrà aversi

$$y(x_0) = Y(x_0) \quad , \quad z(x_0) = Z(x_0)$$

solo se è $Y(x_0) = y_0$, ma in tal caso le condizioni sono quelle di Cauchy. Pertanto ci potremo limitare a ricercare l'ascissa del punto di appoggio alla γ_2 tra le x maggiori di x_0 (o, simmetricamente, tra quelle minori di x_0).

definita ponendo

$$(T_1) \qquad \begin{cases} y_n(x) = Y(\xi) \\ z_n(x) = Z(\xi) \end{cases}$$

per $\xi - \dfrac{\xi - x_0}{n} \leq x \leq \xi$ e ponendo invece

$$(T_2) \qquad \begin{cases} y_n(x) = Y(\xi) + Z(\xi) \displaystyle\int_{\xi}^{x+\frac{\xi-x_0}{n}} F_n(t)dt + \int_{\xi}^{x+\frac{\xi-x_0}{n}} \varphi_{1,n}(t)dt + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\xi}^{x+\frac{\xi-x_0}{n}} \int_{\xi}^{t+\frac{\xi-x_0}{n}} F_n(t)\varphi_{2,n}(u)dudt \\ z_n(x) = Z(\xi) + \displaystyle\int_{\xi}^{x+\frac{\xi-x_0}{n}} \varphi_{2,n}(t)dt , \end{cases}$$

per

$$\xi - 2\frac{\xi - x_0}{n} \leq x \leq \xi - \frac{\xi - x_0}{n}, \quad \xi - 3\frac{\xi - x_0}{n} \leq x \leq \xi - \\ - 2\frac{\xi - x_0}{n}, \ \dots, \ x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\xi - x_0}{n},$$

avendo posto, per abbreviare

$$F_n(t) = F(t, \ y_n(t), \ z_n(t)),$$

e analogamente per $\varphi_{1,n}(t)$, $\varphi_{2,n}(t)$, $\varphi_{2,n}(u)$.

Ognuna delle $C_{\xi,n}$ si appoggia alla curva γ_2; vedremo ora che le (6) (o (6')) e (7) (o (7')) consentono per ogni n di determinare ξ in modo che $C_{\xi,n}$ si appoggi anche alla retta γ_1, e soddisfi quindi entrambe le condizioni del problema. Si ha infatti da (T_2)

$$(8) \qquad y_n(x_0) = Y(\xi) + Z(\xi) \int_{\xi}^{x_0+\frac{\xi-x_0}{n}} F_n(t)dt + \int_{\xi}^{x_0+\frac{\xi-x_0}{x}} \varphi_{1,n}(t)dt + \\ + \int_{\xi}^{x_0+\frac{\xi-x_0}{n}} \int_{\xi}^{t+\frac{\xi-x_0}{n}} F_n(t)\varphi_{2,n}(u)dudt .$$

Valgano allora le (6) e prendiamo ξ eguale alla ξ_1 che appare in esse; tenuto conto delle (4), (4') e (5) avremo

$$y_n(x_0) \leq Y(\xi_1) + Z(\xi_1) \int_{\xi_1}^{x_0+\frac{\xi_1-x_0}{n}} q(t)dt - \int_{\xi_1}^{x_0+\frac{\xi_1-x_0}{n}} r_1(t)dt + \int_{\xi_1}^{x_0+\frac{\xi_1-x_0}{n}} q(t)\left(\int_{\xi_1}^{t+\frac{\xi_1-x_0}{n}} s_2(u)du\right)dt =$$

$$= Y(\xi_1) + Z(\xi_1)\int_{\xi_1}^{x_0} q(t)dt - \int_{\xi_1}^{x_0} r_1(t)dt + \int_{\xi_1}^{x_0} q(t)\left(\int_{\xi}^{t} s_2(u)du\right)dt +$$

$$+ \left\{ Z(\xi_1)\int_{x_0}^{x_0+\frac{\xi_1-x_0}{n}} q(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+\frac{\xi_1-x_0}{n}} r_1(t)dt + \int_{\xi_1}^{x_0} q(t)\left(\int_{t}^{t+\frac{\xi_1-x_0}{n}} s_2(u)du\right)dt + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{x_0+\frac{\xi_1-x_0}{n}} q(t)\left(\int_{\xi_1}^{t+\frac{\xi_1-x_0}{n}} s_2(u)du\right)dt \right\} < y_0 - \rho + \left\{ \ldots \right\}.$$

essendo ρ un numero > 0 opportuno.

L'espressione contenuta nella $\{\ldots\}$ tende a zero con $1/n$, quindi esiste un intero n_0, dipendente solo da ξ_1, tale che per ogni $n > n_0$ risulti

$$y_n(x_0) - y_0 < 0 \tag{9}$$

ed alla stessa conclusione si giunge se invece della (6) sono verificate le (6').

In modo analogo, usando le (7) (o le (7')), resta accertato che se $\xi = \xi_2$ per ogni n maggiore di un certo intero (che dipende solo da ξ_2 e che possiamo ancora indicare con n_0) si ha

$$y_n(x_0) - y_0 > 0\,. \tag{9'}$$

Sia allora n un intero fissato, maggiore di n_0; la corrispondente differenza $y_n(x_0) - y_0$ è una funzione di ξ, continua (come appare dalla (8), per le ipotesi poste su Y, Z, F, φ_1, φ_2), la quale in virtù delle (9), (9') assume valori di segno opposto negli estremi ξ_1, ξ_2 di un certo intervallo; esisterà perciò almeno un punto ξ di tale intervallo in cui detta differenza si annulla. Ad ogni n associamo il minimo di tali punti ξ e indichiamolo con ξ_n

Al variare di $n > n_0$ si ottiene una successione $\{\xi_n\}$ di numeri compresi tra ξ_1 e ξ_2, dalla quale possiamo estrarre una sottosuccessione, che indichiamo ancora con $\{\xi_n\}$, convergente verso un valore limite ξ^*.

In corrispondenza a questa successione $\{\xi_n\}$ si ha una successione $\{C_n\}$ di curve

$$C_n: \qquad y = y_n(x), \quad z = z_n(x), \quad 0 \leq x \leq \xi_n,$$

che si appoggiano alla retta γ_1 ed alla curva γ_2, come desiderato.

Le $y_n(x)$ sono funzioni equilimitate in virtù delle ipotesi fatte sulle Y, Z, F, φ_1, φ_2 e del fatto che ξ_n varia entro un intervallo limitato, tra ξ_1 e ξ_2; sono anche equicontinue poichè detti x', x'' due punti qualunque di (x_0, ξ_n), con $x' \leq x''$, si ha dalla prima (T_2)

$$|y_n(x'') - y_n(x')| \leq \max |Z(\xi_n)| \int_{x'+\frac{\xi_n - x_0}{n}}^{x''+\frac{\xi_n - x_0}{n}} q(t)dt + \int_{x'+\frac{\xi_n - x_0}{n}}^{x''+\frac{\xi_n - x_0}{n}} r_1(t)dt + R\int_{x'+\frac{\xi_n - x_0}{n}}^{x''+\frac{\xi_n - x_0}{n}} q(t)dt,$$

(dove $R = \int_{x_0}^{\max(\xi_1, \xi_2)} s_2(t)dt$) e ciascun intervallo di integrazione ha ampiezza $= x'' - x'$.

Per il teorema di GIULIO ASCOLI [9]) dalla $\{y_n(x)\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente verso una funzione $y = y^*(x)$ definita in $x_0 \leq x \leq \xi^*$, ivi continua. Detta $\{y_\nu(x)\}$ tale successione convergente consideriamo la $\{z_\nu(x)\}$ dalla quale è pure possibile, con lo stesso ragionamento fatto ora, estrarre una sottosuccessione $\{z_\mu(x)\}$ uniformemente convergente verso una funzione $z = z^*(x)$, continua in $x_0 \leq x \leq \xi^*$.

La curva

$$C^*: \qquad y = y^*(x) \quad , \quad z = z^*(x) \quad , \quad x_0 \leq x \leq \xi^*$$

---

[9]) Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. 1°, (Bologna, 1921), pp. 78 e segg.

si appoggia, ovviamente, alla retta γ_1, ed alla curva γ_2 ed inoltre le sue coordinate $y^*(x)$, $z^*(x)$ sono soluzione del sistema (3), come è subito visto. Basta osservare per questo che si può scrivere per ogni x che appartenga al più piccolo dei due intervalli (x_0, ξ_μ), (x_0, ξ^*):

$$\left| y^*(x) - Y(\xi^*) - Z(\xi^*) \int_{\xi^*}^{x} F^*(t)dt - \int_{\xi^*}^{x} \varphi_1^*(t)dt - \right.$$

$$\left. - \int_{\xi^*}^{x} \int_{\xi^*}^{t} F^*(t)\varphi_2^*(u)dudt \right| \leq |y^*(x) - y_\mu(x)| + \left| Z(\xi_\mu) \int_{\xi_\mu}^{x+\frac{\xi_\mu - x_0}{\mu}} F_\mu(t)dt - \right.$$

$$\left. - Z(\xi^*) \int_{\xi^*}^{x} F^*(t)dt \right| + \left| \int_{\xi_\mu}^{x+\frac{\xi_\mu - x_0}{\mu}} \varphi_{1,\mu}(t)dt - \int_{\xi^*}^{x} \varphi_1^*(t)dt \right| +$$

$$+ \left| \int_{\xi_\mu}^{x+\frac{\xi_\mu - x_0}{\mu}} \int_{\xi_\mu}^{t+\frac{\xi_\mu - x_0}{\mu}} F_\mu(t)\varphi_{2,\mu}(u)dudt - \int_{\xi^*}^{x} \int_{\xi^*}^{t} F^*(t)\varphi_2^*(u)dudt \right|,$$

con evidente significato dei simboli $F^*(t)$, $\varphi_1^*(t)$, $\varphi_2^*(u)$. Poichè il 2° membro di questa disuguaglianza tende a zero con $1/\mu$ (in virtù del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale e della dipendenza continua di Z dall'argomento e degli integrali scritti dall'estremo di integrazione), mentre il 1° membro non dipende da μ, si ha per ogni x detto (e quindi per ogni x di (x_0, ξ^*)):

$$y^*(x) = Y(\xi^*) + Z(\xi^*) \int_{\xi^*}^{x} F^*(t)dt + \int_{\xi^*}^{x} \varphi_1^*(t)dt + \int_{\xi^*}^{x} \int_{\xi^*}^{t} F^*(t)\varphi_2^*(u)dudt.$$

Di qui, derivando rispetto ad x, si ha quasi dappertutto in (x_0, ξ^*):

$$y^{*\prime}(x) = F^*(x)\left[Z(\xi^*) + \int_{\xi^*}^{x} \varphi_2^*(t)dt \right] + \varphi_1^*(x),$$

e poichè, in modo del tutto analogo, si ha

$$z^*(x) = Z(\xi^*) + \int_{\xi^*}^{x} \varphi_2^*(t)dt\,,$$

l'asserto è dimostrato.

3. — Esaminiamo in questo n. due casi particolari del teorema.

a) Se è

$$F \equiv 0$$

il sistema diventa

$$(10) \qquad \begin{cases} y' = \varphi_1(x, y, z) \\ z' = \varphi_2(x, y, z) \end{cases}$$

e dal teorema precedente segue il

Corollario 1. - Se $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, $Y(x)$, $Z(x)$ soddisfano le ipotesi poste nell'enunciato del teorema, il sistema (10) ammette almeno una soluzione che si appoggia alla retta γ_1 ed alla curva γ_2 purchè esistano due numeri ξ_1 e ξ_2, entrambi maggiori di x_0, per i quali valgano le disuguaglianze

$$\begin{cases} Y(\xi_1) - y_0 < -\displaystyle\int_{x_0}^{\xi_2} r_1(t)dt\,, \\[2ex] Y(\xi_2) - y_0 > \displaystyle\int_{x_0}^{\xi_1} r_1(t)dt\,. \end{cases}$$

Come si vede, in questo caso le (6), (7) (o (6'), (7')) vengono notevolmente semplificate.

b) Se è

$$F \equiv 1\,, \quad \varphi_1 \equiv 0$$

e facciamo $\varphi_2 = g$, il sistema (3) equivale all'equazione (2) e il teorema del n. prec. dà luogo al

Corollario 2. - Sia data l'equazione

$$(2) \qquad y'' = g(x, y, y')$$

dove $g(x, y, y')$ *soddisfa in*

$$S': \qquad x_0 \leq x \quad , \quad |y| < \infty \quad , \quad |y'| < \infty ,$$

condizioni di CARATHÉODORY (*vale a dire è una funzione continua rispetto ad* (y, y') *per ogni* $x \geq x_0$, *misurabile rispetto ad* x *per ogni* (y, y') *tale che vi siano due funzioni* $r(x)$, $s(x)$ *sommabili in ogni intervallo finito del semiasse* $x \geq x_0$ *per cui sia in* S'

$$r(x) \leq g(x, y, y') \leq s(x) .$$

Siano poi $Y(x)$, $Z(x)$ *due funzioni assolutamente continue del semiasse* $x > x_0$ *ed esistano due numeri* ξ_1, ξ_2, *entrambi maggiori di* x_0, *tali che valgano le disuguaglianze*

$$(11) \qquad \begin{cases} Y(\xi_1) - Z(\xi_1)(\xi_1 - x_0) + \displaystyle\int_{\xi_1}^{x_0} \int_{\xi_1}^{t} s(u)dudt < y_0 , \\ \\ Y(\xi_2) - Z(\xi_2)(\xi_2 - x_0) + \displaystyle\int_{\xi_2}^{x_0} \int_{\xi_2}^{t} r(u)dudt > y_0 . \end{cases}$$

Allora esiste almeno una soluzione $y = y(x)$ *della* (2) (*vale a dire una funzione* $y(x)$ *con derivata prima assolutamente continua, soddisfacente la* (2) *quasi ovunque in un certo intervallo*) *che esce dal punto* $P \equiv (x_0, y_0)$ *e giunge sulla curva*

$$\Gamma: \qquad y = Y(x)$$

con direzione $Z(x)$ *assegnata.*

Oss. - Le disuguaglianze (11) in certi casi risultano assai precise.

Ad es. se $g \equiv 0$, $x_0 = y_0 = 0$ ed è $Y(x) = ax^2 + 1$, $(a > 0)$, $Z(x) = Y'(x)$, le (11) dànno $\xi_1 > 1/\sqrt{a}$, $\xi_2 < 1/\sqrt{a}$, ed è facile riscontrare che la retta per $(0, 0)$ tangente alla parabola $y = Y(x)$ (e giacente nel 1° e 3° quadrante degli assi coordinati) la tocca nel punto di ascissa $1/\sqrt{a}$.

Oppure, sempre nel caso $g \equiv 0$, $x_0 = y_0 = 0$, se $Y(x) = 1/z$, $Z(x) = -1/Y'(x) = x^2$ le (11) dànno $\xi_1 > 1$, $\xi_2 < 1$ e la retta per $(0, 0)$ ortogonale all'iperbole $y = Y(x)$ la incontra nel punto di ascissa 1.