RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 113-122

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__113_0>

CARATTERIZZAZIONE DEI GRUPPI RISOLUBILI D'ORDINE FINITO COMPLEMENTATI

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*)

Nella Nota presente studio i gruppi d'ordine finito risolubili complementati, chiamando complementato un gruppo G che goda della seguente proprietà: Se H è un sottogruppo qualsiasi di G, esiste sempre in G almeno un altro sottogruppo K (complemento di H) tale che l'unione $H \cup K$ coincida con G e l'intersezione $H \cap K$ coincida col sottogruppo identico di G.

Nei primi due numeri della Nota dimostro che:

Il gruppo finito e risolubile G è complementato, se e soltanto se il suo sottogruppo normale speciale massimo è prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G e possiede in G un complemento che sia esso stesso complementato.

Sia ora

$$N_0, \; N_1, \; N_2, \; \dots, \; N_{r-1}, \; N_r$$

la catena normale di G individuata dalle seguenti condizioni:

N_0 è il sottogruppo identico di G, $\dfrac{N_i}{N_{i-1}}$ è il sottogruppo normale speciale massimo di $\dfrac{G}{N_{i-1}}$ per $i = 1, 2, \dots, r$ e $\dfrac{G}{N_r}$ ha il sottogruppo normale speciale massimo identico; ebbene nel n. 3 dimostro questo teorema:

Il gruppo d'ordine finito G è un gruppo risolubile complementato quando e solo quando

1) $N_r = G$

(*) Pervenuta in Redazione il 25 febbraio 1953.

2) $\frac{N}{N_{i-1}}$ *unione di sottogruppi normali minimi di* $\frac{G}{N_{i-1}}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$

3) *Il sottogruppo di Frattini di* $\frac{G}{N_{i-1}}$ *è identico,*

ove $N_0, N_1, \dots, N_r$ *hanno il significato poco sopra precisato.*

1. - Indichiamo con G un gruppo d' ordine finito, risolubile, complementato. Per lo studio del gruppo G premettiamo alcune proposizioni che ci saranno utili nel seguito:

I: Se G è un gruppo d'ordine finito ed N un suo sottogruppo normale, se Φ_G e Φ_N indicano rispettivamente il sottogruppo di Frattini di G ed N, allora vale la seguente relazione

$$\Phi_N \subseteqq \Phi_G .$$

II: In un gruppo G d' ordine finito, complementato, il sottogruppo di Frattini Φ_G coincide col sottogruppo identico di G [1]).

III: Un gruppo finito speciale G con $\Phi_G = 1$ è un gruppo abeliano elementare [2]).

IV: Se G è un gruppo complementato, allora ogni gruppo fattoriale di G è pure un gruppo complementato.

Ritornando al nostro gruppo d' ordine finito G, risolubile, complementato, sia N_1 il suo sottogruppo normale speciale massimo. Essendo G risolubile, tale gruppo certamente non è identico e in virtù delle prime tre propos. precedenti esso risulta abeliano elementare.

Indichiamo con H un sottogruppo normale di G contenuto in N_1, e sia H' un complemento di H in G.

Il gruppo $H' \cap N_1$ risulta allora un sottogruppo normale di

---

[1]) O. ORE: *Contributions to the theory of groups of finite order.* Duke Math. Journ., vol. 5, p. 444.

[2]) G. ZACHER: *Determinazione dei gruppi d' ordine finito relativamente complementari.* Rend. dell'Accademia di Sc. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti in Napoli, vol. XIX, 1952.

H', ed essendo N_1 abeliano, esso è pure un sottogruppo normale di N_1 e quindi anche di $N_1 \cup H' \supseteqq H \cup H' = G$.

Poichè $H \subseteqq N_1$ ed H è permutabile con ogni sottogruppo di G essendo per ipotesi un sottogruppo normale di G, si ha per la relazione di Dedekind:

$$H \cup (H' \cap N_1) = (H \cup H') \cap N_1 = G \cap N_1 = N_1$$

ossia, avendosi $(H' \cap N_1) \cap H = 1$, $H' \cap N_1$ è un complemento di H in N_1.

Riassumendo abbiamo pertanto il

LEMMA: Se G è un gruppo d'ordine finito, risolubile, complementato, ogni sottogruppo normale H di G contenuto nel sottogruppo normale speciale massimo N_1 ammette un complemento $\overline{H}$ in N_1 che risulta normale in G.

COROLLARIO: In G il gruppo N_1 coincide col sottogruppo T di G unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G.

Invero, poichè il gruppo G è per ipotesi risolubile (sottinteso « d'ordine finito ») i suoi sottogruppi normali minimi sono p-gruppi abeliani (elementari). Pertanto risulta

$$T \subseteqq N_1$$

Sia $T \subset N_1$. Allora, essendo T un sottogruppo normale di G contenuto in N_1, pel lemma dimostrato poco fa, T deve avere un complemento T' in N_1 che risulta normale in G. Poichè $T \cap T' = 1$, T' conterrebbe un sottogruppo normale minimo di G non contenuto in T, il che è assurdo.

Diciamo C_1 un complemento di N_1 in G. Per un teorema generale sugli isomorfismi tra gruppi otteniamo la relazione

$$\frac{N_1}{G} = \frac{N_1 \cup C_1}{N_1} \cong \frac{C_1}{N_1 \cap C_1} \cong C_1 \tag{1}$$

essendo $N_1 \cap C_1 = 1$.

Poichè per la propos. IV, il gruppo $\dfrac{G}{N_1}$ è un gruppo complementato, tale risulterà per la (1) pure C_1.

Per quanto precede possiamo così enunciare il

TEOREMA: Condizione necessaria perchè un gruppo d'ordine finito risolubile G sia complementato è che il suo sottogruppo normale speciale massimo N sia il prodotto diretto di convenienti sottogruppi normali minimi di G e che N_1 abbia un complemento C_1 in G che sia a sua volta un gruppo complementato.

2. - Cerchiamo ora di invertire la condizione enunciata.

A tal fine facciamo anzitutto vedere che vale la seguente proposizione:

Se T è un sottogruppo unione di sottogruppi normali minimi di un gruppo finito G, ogni sottogruppo normale H di G contenuto in T, $H \subseteqq T$, ammette un complemento in T che risulta normale in G.

Invero sia M l' unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G contenuti in H e sia $M \subset H$, M non può contenere tutti i sottogruppi normali minimi di G, essendo $M \subset T$. Sia allora L_1 un sottogruppo normale minimo di G non contenuto in M. Sarà $M \cap L_1$, essendo L_1 sottogruppo normale minimo di G ed M pure un sottogruppo normale di G. Pertanto

$$M \cup L_1 = M \times L_1 .$$

Se $M \times L_1 \subset T$, esisterà un sottogruppo normale minimo L_2 di G non contenuto in $M \times L_1$, per cui sarà

$$(M \times L_1) \cup L_2 = M \times L_1 \times L_2 .$$

Così continuando si arriverà infine ad un sottogruppo normale minimo L_s di G per cui

$$M \times L_1 \times L_2 \ldots \times L_s = G .$$

Ma allora si ha pure $H \cup (L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_s) = G$ e sarà

$$\frac{G}{L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_s} \cong \frac{H}{(L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_s) \cap H} \cong M .$$

Quindi, avendo supposto $H \supset M$, dovrà essere $(L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_s) \cap H \neq 1$, il che non può essere perchè altrimenti $(L_1 \times \times L_2 \times \ldots \times L_s) \cap H$ conterrebbe un sottogruppo normale minimo contenuto in H e non in M.

Quindi $M = H$ ed $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_s$ è un complemento di H in T, normale in G. (c. v. d.).

Siamo ora in grado di dimostrare il

TEOREMA: Se G è un gruppo d'ordine finito, risolubile, tale che il suo sottogruppo speciale normale massimo N_1 sia unione di sottogruppi normali minimi di G, e ammette un complemento C_1 in G che risulta a sua volta un gruppo complementato, G risulta un gruppo complementato.

Sia H un generico sottogruppo di G. Posto $Q = H \cap C_1$, indichiamo con M un complemento di Q in C_1. In tali ipotesi si ha:

$$(2) \quad H \cap M = 1 \qquad H \cup M = H \cup [(H \cap C_1) \cup M] = H \cup C_1 \supseteqq C_1$$

Poniamo $H \cup M = F$ ed $R = N_1 \cap F$.

Il gruppo N_1 come unione di gruppi normali minimi di un gruppo risolubile risulta abeliano, per cui R risulta non solo un sottogruppo normale di F ma anche di N_1 e quindi pure di $N_1 \cup F$. Ma per la (2)

$$N_1 \cup F \supseteqq N_1 \cup C_1 = G$$

per cui R è un sottogruppo normale di G contenuto in N_1.

Per la proposizione dimostrata all'inizio di questo n.° possiamo allora affermare che esiste un complemento R' di R in N_1, che è normale in G. Risulta $R' \cap F = 1$ e $R' \cup F = R' \cup (R \cup F) = N_1 \cup F = G$ ossia

$$(R' \cup M) \cup H = G .$$

Se pertanto dimostriamo che $(R' \cup M) \cap H = 1$, il gruppo H ha un complemento in G.

Ragioniamo per assurdo, supponendo che $(R' \cup M) \cap H \neq 1$.

Detto h un elemento non identico di tale intersezione, si avrà

$$(3) \qquad h = r'm$$

con h in H, r' in R ed m in M. Dalla (3) ricaviamo

$$m^{-1}h = m^{-1}r'm = r''$$

dove r'' è ancora un elemento di R', essendo R' un sottogruppo normale di G. Pertanto $m^{-1}h$ è un elemento di R'; ma esso è pure un elemento di $F = H \cup M$. Però si è visto che $R' \cap F = 1$, per cui

$$m^{-1}h = 1 , \quad \text{ossia} \quad h = m .$$

Ora ciò implica che sia $h = m = 1$, perchè $H \cap M = 1$, il che contraddice l' ipotesi fatta su h. L' assurdo cui siamo pervenuti prova pertanto che $(R' \cup M) \cap H = 1$; per quanto si è detto, $R' \cup M$ risulta dunque un complemento di H in G. Data la genericità del sottogruppo H di G, concludiamo con la validità del nostro teorema.

Tenendo conto dei risultati finora raggiunti, abbiamo il

Teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d' ordine finito, risolubile G sia complementato è che il suo sottogruppo normale speciale massimo N_1 sia prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G e che N_1 abbia un complemento C_1 in G, con C_1 pure gruppo complementato.*

Corollario: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d' ordine finito risolubile G sia complementato è che G si possa rappresentare come prodotto di $t \geqq 1$ gruppi abeliani elementari a 2 a 2 permutabili*

$$G = N_1 N_1 \dots N_t$$

tali che

α) $N_i \cap (N_{i+1} N_{i+2} \dots N_t) = 1$ *per* $i = 1, 2, \dots t - 1$

β) N_i *coincide col sottogruppo speciale normale massimo di* $N_i N_{i+1} \dots N_t$ *e nello stesso tempo col gruppo unione di tutti i sottogruppi normali minimi di* $N_i N_{i+1} \dots N_t$.

Osservazione. — Se il gruppo G oltre ad essere d' ordine finito complementato risulta supersolubile, il corollario enunciato ci permette facilmente di dimostrare che in tal caso tutti i sottogruppi di Sylow di G devono essere gruppi abeliani elementari. Invero, giacchè N_t è un gruppo abeliano elementare, supporremo il teorema vero pel gruppo $N_2 N_3 \dots N_t$.

Poichè ogni sottogruppo di Sylow di N_1 è un sottogruppo normale di G, e quindi permutabile con ogni sottogruppo di G, se p è un numero primo divisore dell'ordine di G, se S_1 e S_2 sono due sottogruppi di Sylow relativi al numero primo p rispettivamente di N_1 ed $N_2 N_3 \dots N_t$, (S_1 od S_2 può anche ridursi al sottogruppo identico di G), allora $S_1 \cup S_2$ è un sottogruppo di Sylow di G. Ora S_1 risulta il prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G, che per l'ipotesi della supersolubilità di G risultano tutti d' ordine p. Pertanto sarà $S_1 = P_1 \times \times P_2 \times ... \times P_k$. Se diciamo ora s_2 un elemento generico di S_2, la trasformazione $s_2\ S_1\ s_2^{-1}$ dovrà subordinare un automorfismo su $P_i (i = 1, 2, ..., k)$ il cui ordine σ evidentemente è un divisore dell' ordine di s_2, e quindi sarà p od 1 essendo l' ordine di s_2 uguale a p od 1. Ma σ non può essere p, perchè l' ordine del gruppo d' automorfismi di P_i è $p-1$; quindi è 1, ossia s_2 è permutabile con ogni elemento di P_i, e pertanto anche di S_1. $S_1 \cup S_2$ è perciò abeliano elementare, e poichè in un gruppo d' ordine finito i sottogruppi di Sylow di dato ordine sono coniugati, concludo con quanto volevasi dimostrare.

Hall in una sua nota [3]) aveva caratterizzato i gruppi G d' ordine finito godenti della seguente proprietà:

Se H è un sottogruppo qualsiasi di G esiste almeno un sottogruppo K di G permutabile con H per cui $H \cup K = G$, $H \cap K = 1$.

Si tratta quindi di una particolare classe di gruppi complementati, che chiameremo gruppi complementati nel senso di Hall.

Nella citata Nota si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d' ordine finito G sia complementato nel senso di Hall è che G sia supersolubile e che i suoi sottogruppi di Sylow siano abeliani elementari.

Per quanto precede possiamo dunque dire che *condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d' ordine finito complementato sia complementato nel senso di Hall è che sia supersolubile.*

3. - Sia G un gruppo d' ordine finito e consideriamo in esso una catena di sottogruppi normali di G, ciascuno contenuto nel successivo, incominciante col sottogruppo identico $N_0 = 1$ e tale che se N_i e l' i-esimo elemento di tale catena, il gruppo fat-

---

[3]) P. HALL: *Complemented groups.* The Journal of the Math. Soc., vol. 12, pp. 201-204 (1937).

toriale $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ coincide col sottogruppo normale speciale massimo di $\frac{G}{N_{i-1}}$.

I gruppi di tale catena risultano evidentemente univocamente determinati dal gruppo G. Chiamata semplicemente catena α di G la catena di sottogruppi normali ora definita, poichè abbiamo supposto l' ordine di G finito, la catena α si arresterà dopo un numero finito di elementi, vale a dire esiste un primo indice $r \geqq 0$ per cui si ha che $N_r = N_{r+1} = \dots$. La catena α si dirà di lunghezza r.

Sussiste il teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d' ordine finito G sia risolubile è che $N_r = G$ se r indica la lunghezza della catena α.

La necessità della condizione segue dal fatto che ogni gruppo risolubile ammette sottogruppi normali speciali non identici.

Per la sufficienza si noti che

$$\frac{G}{N_{r-1}},\ \frac{N_{r-1}}{N_{r-2}},\ \dots\ \frac{N_2}{N_1},\ \frac{N_1}{N_0}$$

costituisce una successione di gruppi speciali con N_i sottogruppo normale di G, per cui la catena

$$G,\ N_{r-1},\ N_{r-2},\ \dots\ N_2,\ N_1,\ N_0 = 1$$

è suscettibile di venir raffinata ad una serie di composizione di G a indici tutti primi.

Esaminiamo ora la catena α in un gruppo G risolubile, complementato, d' ordine finito.

E' anzitutto $N_r = G$. Avendo poi supposto che G sia un gruppo complementato, tale sarà pure il gruppo fattoriale $\frac{G}{N_{i-1}}$ (propos. IV del n. 1) e quindi tenendo presente il significato del gruppo $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ e il teorema ultimo del n. 2, il gruppo $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ dovrà essere il prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di $\frac{G}{N_{i-1}}$. Inoltre, per la propos. II del n. 1, il gruppo di Frattini di $\frac{G}{N_{i-1}}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ è identico, $\Phi_{\frac{G}{N_{i-1}}} = 1$.

Supponiamo ora viceversa che G sia un gruppo finito per cui la catena α di lunghezza r termini col gruppo G, che $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ sia unione di sottogruppi normali minimi di $\frac{G}{N_{i-1}}$ e che $\Phi_{\frac{G}{N_{i-1}}} = 1$ per $i = 1, 2, \dots, r$; allora dimostriamo che C_1 è un gruppo complementato risolubile.

Il gruppo G risulta per quanto si è visto poco fa risolubile. Notiamo poi che se $r = 0$ il teorema è ovvio.

Supporremo quindi vero il teorema per un gruppo d' ordine finito G in cui la lunghezza della catena α sia $r - 1$, e faremo vedere che il teorema è pur vero per un gruppo G in cui la catena α ha lunghezza r.

Prendiamo in considerazione il gruppo $\frac{G}{N_1}$. In questo gruppo la catena α è data, come facilmente si vede ricorrendo al III teorema sugli isomorfismi tra gruppi, da:

$$\frac{N_1}{N_1}, \frac{N_2}{N_1}, \dots \frac{N_{r-1}}{N_1}, \frac{N_r}{N_1}$$

di lunghezza $r - 1$, se $N_0, N_1, \dots, N_r$ indica la catena α di G.

Ora:

$$\frac{\frac{N_i}{N_1}}{\frac{N_{i-1}}{N_1}} \cong \frac{N_i}{N_{i-1}} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{G}{N_1}}{\frac{N_{i-1}}{N_1}} \cong \frac{G}{N_{i-1}} \tag{4}$$

quindi per le ipotesi fatte $\frac{\frac{N_i}{N_1}}{\frac{N_{i-1}}{N_1}}$ è unione di sottogruppi normali minimi di $\frac{\frac{G}{N_1}}{\frac{N_{i-1}}{N_1}}$; inoltre $\Phi_{\frac{\frac{G}{N_1}}{\frac{N_{i-1}}{N_1}}} = 1$ in virtù della (4) e dell' ipotesi $\Phi_{\frac{G}{N_{i-1}}} = 1$.

Ma allora per l' ipotesi d' induzione, il gruppo $\frac{G}{N_1}$ risulta complementato. Per dimostrare che pure G è complementato ricordiamo il seguente teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sottogruppo di Frattini Φ di un gruppo finito G sia identico, è che il sottogruppo unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G abbia complemento in G.

Poichè abbiamo supposto $\Phi_{\overline{G}} = \Phi_G = 1$ ed N_1 unione di

N_0

sottogruppi normali minimi di G, dato il significato di N_1, esso coincide col sottogruppo unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G, essendo G risolubile, quindi N_1 deve avere complemento C_1 in G. Ma allora $\frac{G}{N_1} \cong C_1$ e quindi C_1 è pure complementato. Pel teorema ultimo del n. 2 possiamo perciò dire che il gruppo G risulta complementato.

Siamo così pervenuti alla seguente caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito G sia un gruppo risolubile complementato è che, se

$$N_0, N_1, N_2, \dots, N_{r-1}, N_r$$

è la catena α di G, risulti:

a) $N_r = G$

b) $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ *unione di sottogruppi normali minimi di* $\frac{G}{N_{i-1}}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$

c) $\Phi_{\frac{G}{Ni-1}} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$.

---

[4]) G. ZACHER: *Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico.* Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. 21 pag. 388 (1952).