RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

Sull'equazione del calore : teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone. Nota I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 99-123

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__99_0>

SULL' EQUAZIONE DEL CALORE: TEOREMI DI UNICITÀ E TEOREMI DI COMPLETEZZA CONNESSI COL METODO DI INTEGRAZIONE DI M. PICONE

Nota I (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Padova*)

E' noto come il metodo di M. PICONE per la risoluzione di una vasta classe di equazioni funzionali (in particolare dei problemi al contorno per le equazioni lineari alle derivate parziali), basato sul teorema di reciprocità (formula di GREEN) e consistente nella traduzione del problema in istudio in un sistema di equazioni del tipo di FISCHER-RIESZ, ha posto determinati problemi di analisi alla cui risoluzione la Scuola del PICONE si è intensamente dedicata con successo [1]).

Per le classiche equazioni lineari della Fisica Matematica di tipo ellittico questi problemi sono ormai stati definitivamente studiati: è merito di L. AMERIO [2]) l'aver determinato, mediante un *teorema d'inversione della formula di Green,* sistemi di funzioni che portano alla richiesta traduzione in sistemi di equazioni integrali di FISCHER-RIESZ; e di G. FICHERA l'aver dimostrato la completezza dei suddetti sistemi di funzioni ([7], [8], [9], [10]).

(*) Pervenuta in Redazione il 13 maggio 1952.

1) Per una significativa interpretazione funzionale del metodo del PICONE e per la numerosa bibliografia in merito rinvio alla memoria [6] di G. FICHERA (i numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia finale).

2) Mi limito a citare il lavoro [1], rinviando per l'ulteriore bibliografia sui teoremi di inversione, cui hanno portato contributi anche G. FICHERA, A. GHIZZETTI e G. AQUARO a [6].

Meno studiato è invece il metodo del PICONE per le equazioni lineari del tipo parabolico: solo per l'equazione del calore

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$$

L. AMERIO ha dimostrato il corrispondente *teorema d'inversione,* mentre non sono ancora stati dimostrati i relativi teoremi di completezza.

In questo lavoro verranno appunto studiati tali teoremi e certe questioni ad essi connesse. Il metodo seguito è quello che G. FICHERA ha ideato per le equazioni di tipo ellittico: esso si basa anzitutto sull'estensione di teoremi classici relativi agli integrali, che compaiono nello studio della (I), e che sono analoghi ai potenziali di semplice e di doppio strato, anche nel caso in cui le « distribuzioni » delle temperature siano solamente sommabili secondo LEBESGUE. Tale estensione si consegue qui facilmente (n. 2) sfruttando teoremi classici (dovuti soprattutto ad E. E. LEVI, [12] e [13]) e certi ragionamenti di AMERIO e di FICHERA.

Ne viene la possibilità di dimostrare (n. 3) i teoremi di unicità per varî problemi al contorno, tipici dell'equazione (I), nella classe delle soluzioni di (I) per cui vale il teorema d'inversione di AMERIO.

E di qui segue la chiusura rispetto alla totalità delle funzioni sommabili dei sistemi di funzioni occorrenti nell'applicazione del metodo del PICONE, quindi anche la loro completezza hilbertiana.

In particolare (n. 5) si ha la completezza hilbertiana del sistema dei cosidetti polinomi parabolici omogenei $\{v_r\}$ sulla varietà V a m dimensioni costituita da un dominio V_1 dell'iperpiano $y=0$, il cui complementare relativamente allo stesso iperpiano è connesso, e da un'altra parte V_2, i cui punti $(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ soddisfano alla $0 < y \leq y_0$, $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ appartenendo alla frontiera FV_1 di V_1; completezza che è valida anche su una varietà V' più generale, ottenuta da V mediante un'opportuna deformazione continua di V_2 (v. n. 6). Tale completezza mi risulta sia già stata dimostrata solo nel caso $m = 1$ da G. CIMMINO [3]). Si ha inoltre la completezza su V' del sistema di funzioni $\mathfrak{V}_r$ definite ponendole uguali a $-v_r$ su V_1' e uguali a $\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - hv_r$ su V_2' (ν essendo la conormale a V' e h una funzione quasi-continua e limitata).

Mi sono limitato a trattare il caso $m = 2$ per semplicità di forma, nessuna difficoltà incontrando l'estensione al caso m qualunque.

Altre questioni si presentano in questo genere di studî, in un ordine di idee analogo a quello sviluppato dal FICHERA per le equazioni di tipo ellittico: ad es. i teoremi di unicità e di completezza relativi ad un problema tipico con distribuzione « mista » delle temperature (se ne veda l'accenno nel n. 6), l'estensione della teoria degli integrali analoghi a quelli di semplice e di doppio strato al caso di distribuzioni anche non sommabili mediante l'integrale di LEBESGUE-STILTJES e i conseguenti teoremi di completezza nello spazio delle funzioni continue.

Di esse mi occuperò nella Nota II, che farà seguito a questa.

Voglio infine mettere in rilievo l' interesse che tutti questi problemi presentano non solo in sè e per l' applicazione del metodo del PICONE, ma anche per altre importanti questioni di Analisi, come l' applicazione del metodo dei minimi quadrati al calcolo delle soluzioni dell' equazione del calore e l' eventuale dimostrazione di nuovi teoremi di esistenza, sopratutto per il problema « misto », che è stato fino ad ora poco trattato.

1. Preliminari. — Sia D un dominio del piano (x_1, x_2) a $k + 1$ contorni di classe 2, cioè delimitato esternamente dalla curva chiusa C_0 e internamente dalle k curve chiuse $C_1, \ldots, C_k$, a due a due prive di punti comuni ed esterne l' una all' altra, $C_0, C_1, \ldots, C_k$ essendo inoltre di classe 2 in ogni loro punto [4]).

---

[3]) Si veda la successiva nota [19]).

[4]) Una varietà σ ad m dimensioni si dirà di classe 2 in un suo punto M, se risulta definita in un intorno di M da una rappresentazione parametrica con funzioni di m parametri continue, con le loro derivate prime e seconde, in un certo dominio e con matrice funzionale mai nulla.

Fissato $y_0 > 0$ indichiamo, per $0 \leq y' \leq y_0$, con $\tau(y')$ il dominio cilindrico dello spazio (x_1, x_2, y) costituito dai punti (x_1, x_2, y), tali che (x_1, x_2) appartenga a D e $0 \leq y \leq y'$; con $\sigma(y')$ la frontiera di $\tau(y')$, con $p(0)$ e $p(y')$ le basi inferiore e superiore di $\tau(y')$, con $s(y')$ la superficie laterale di $\tau(y')$ (sicchè risulta $\sigma(y') = p(0) + p(y') + s(y')$), con $c(y')$ la frontiera di $p(y')$. Poniamo poi più brevemente $\tau(y_0) = \tau$, $\sigma(y_0) = \sigma$, $s(y_0) = s$.

Si osservi che $p(y')$ è un dominio piano congruente a D.

La frontiera σ di τ è ovviamente di classe 2 in ogni suo punto che non stia su $c(0)$ o $c(y_0)$.

Consideriamo ora l'equazione parabolica

$$E(u) = \Delta_2(u) - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \left(\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \tag{1}$$

e indichiamo con $E^*(u)$ l'operatore aggiunto di $E(u)$

$$E^*(u) = \Delta_2(u) + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

Se u e w sono funzioni triregolari [5]) in τ, è applicabile la formula di GREEN

$$(3) \quad -\int_\tau [uE^*(w) - wE(u)]d\tau = \int_\sigma \left\{ u\left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \operatorname{sen}(ny) + w \cos(ny)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial u}{\partial \nu} w \operatorname{sen}(ny) \right\} d\sigma = \int_s \left(u\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds + \int_{p(0)} uw\,dp(0) - \int_{p(y_0)} uw\,dp(y_0)$$

dove n e ν indicano rispettivamente la normale e la conormale a σ orientate verso l'interno di τ. Si ricordi che indicato con $M \equiv (x_1, x_2, y)$ un punto di σ, la conormale ν_M a σ in M è indeterminata se M si trova su $p(0)$ o $p(y_0)$ e coincide invece con la normale n_M altrove.

---

[5]) Secondo la nomenclatura di PICONE [14] diremo che una funzione è regolare, biregolare, triregolare in un dominio τ, se è ivi continua, continua assieme alle sue derivate prime, continua insieme alle sue derivate prime e seconde.

Poniamo poi, per $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $M \equiv (x_1, x_2, y)$ e $N \equiv \equiv (x_1', x_2', y')$ essendo due punti dello spazio, tali che $y' > y$:

$$h_{\alpha,\beta}(M, N) = h_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, y; x_1', x_2', y') = \\ = \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}; \quad r = \sqrt{(x_1'-x_1)^2 + (x_2'-x_2)^2}.$$

E' noto che la soluzione fondamentale $F(M, N)$ delle equazioni $E(u) = 0$ e $E^*(u) = 0$ è definita per M ed N qualunque dalle uguaglianze

$$(4) \qquad \begin{cases} F(M, N) = h_{0,1}(M, N) & \text{per } y' > y \\ F(M, N) = 0 & \text{per } y' \leq y. \end{cases}$$

La funzione $F(M, N)$ risulta continua insieme alle sue derivate parziali di tutti gli ordini rispetto a x_1, x_2, y, x_1', x_2', y' per ogni coppia (M, N) escluso il caso in cui $M = N$ e, fissato N, è come funzione di M soluzione di $E^*(u) = 0$ in tutto lo spazio escluso il punto $M = N$ e, fissato M, è come funzione di N soluzione di $E(u) = 0$ in tutto lo spazio escluso il punto $N = M$.

E' noto anche che se $u(P)$ è una soluzione *biregolare* in τ della (1), dalla (3) si possono ricavare le due formule di GREEN:

$$(5) \qquad 0 = \int_s u(M) \frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu_M} d_M s + \int_\sigma u(M) F(M, Q) \cos(n_M y) d_M \sigma - \\ - \int_s \frac{\partial u(M)}{\partial \nu_M} F(M, Q) d_M s$$

se Q è esterno a τ e

$$(6) \qquad 4\pi u(P) = \int_s u(M) \frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_M} d_M s + \int_\sigma u(M) F(M, P) \cos(n_M y) d_M \sigma - \\ - \int_s \frac{\partial u(M)}{\partial \nu_M} F(M, P) d_M s = \int_s u(M) \frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_M} d_M s + \\ + \int_{p(0)} u(M) F(M, P) d_M p(0) - \int_s \frac{\partial u(M)}{\partial \nu_M} F(M, P) d_M s$$

se P è interno a τ.

Indicheremo con Γ l' insieme delle funzioni $u(P)$ che soddisfano alle seguenti proprietà:

a) è soddisfatta la (1) nei punti interni a τ;

b) preso quasi ovunque su σ un punto M esiste finito il limite

$$\lim_{P \to M} u(P) = A(M) \tag{7}$$

per $P \to M$ lungo la normale in M a σ, se M appartiene a $p(0)$ o a $p(y_0)$, lungo la conormale, se M appartiene a s [6]);

c) preso quasi ovunque su s un punto M esiste finito il limite

$$\lim_{P \to M} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_M} = B(M) \tag{8}$$

per $P \to M$ lungo la conormale in M a s;

d) $A(M)$ e $B(M)$ sono funzioni sommabili rispettivamente su σ e su s e risultano soddisfatte le equazioni:

$$0 \equiv \int_s A(M) \frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu_M} d_M s + \int_\sigma A(M) F(M, Q) \cos(n_M y) d_M \sigma - \int_s B(M) F(M, Q) d_M s \tag{9}$$

se Q è esterno a τ e

$$4\pi u(P) = \int_s A(M) \frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_M} d_M s + \int_{p(0)} A(M) F(M, P) d_M p(0) - \int_s B(M) F(M, P) d_M s \tag{10}$$

se P è interno a τ.

Ricordiamo che L. AMERIO [2; n. 2] ha dimostrato il seguente *Teorema di inversione*:

---

[6]) Ovviamente nelle ipotesi da noi fatte sul campo τ la distinzione tra normale e conormale in M se M appartiene a s è inutile; non così se la superficie s non fosse più cilindrica con generatrici parallele all' asse y.

Se $A(M)$, $B(M)$ sono due funzioni sommabili rispettivamente su σ e su s e soddisfacenti alla equazione (9) per ogni Q esterno a τ, allora la funzione $u(P)$, definita per P interno a τ dalla (10), appartiene alla classe Γ.

2. Estensione di alcune classiche formule integrali. — E' possibile estendere le classiche proprietà degli integrali che compaiono nella teoria della equazione del calore e che sono analoghi agli integrali di semplice e di doppio strato, anche nel caso di distribuzioni delle temperature solamente sommabili [7]).

TEOREMA I: *Data su s una funzione $B(M)$ ivi sommabile, per quasi-tutti gli N di s la funzione (di M) $B(M)F(M,N)$ è sommabile su s e risulta*

$$\lim_{P \to N (\text{su } \nu_N)} \int_s B(M)F(M, P)d_M s = \int_s B(M)F(M, N)d_M s. \tag{11}$$

La prima parte del teorema si dimostra immediatamente seguendo un' idea di FICHERA [8]). E' noto che [9]) l' integrale $\int_s F(M, N)d_N s$ esiste per ogni M ed è funzione di M continua in tutto lo spazio e in particolare su s e pertanto, essendo $F(M, N) \geq 0$, per un criterio di sommabilità di L. TONELLI, la funzione, di M ed N, $B(M)F(M, N)$ è sommabile nel prodotto topologico di s per se stesso. Il teorema di FUBINI di riduzione degli integrali multipli ci assicura allora che per quasi tutti gli N di s la funzione (di M) $B(M)F(M, N)$ è sommabile su s

7) Nel caso $m = 1$ l' estensione di talune proprietà di questi integrali è stata fatta da F. G. DRESSEL [5] mediante la teoria dell' integrale di LEBESGUE-STIELTJES, cosa che permette di considerare anche « distribuzioni » non sommabili; i teoremi II e IV del presente numero nel caso $m = 1$ sono dunque contenuti negli analoghi teoremi di DRESEL. Sul caso di « distribuzioni » anche non sommabili e per m qualunque torneremo nella Nota II. Sempre nel caso $m = 1$ e per il teorema I si veda anche il recente lavoro di B. PINI [15; n. 1, pag. 181].

8) v. ad es. [8, § 1].

9) v. ad es. LEVI [12; pag. 253] ed anche il successivo n. 4 del presente lavoro.

Per dimostrare la (11) si osservi che essa si riduce, dopo quanto si è visto, alla

$$\lim_{P\to N\ (\text{su }\nu_M)} \int_s B(M)[F(M,P)-F(M,N)]d_M s = 0$$

e questa è già stata in sostanza dimostrata dall'AMERIO [10]):

TEOREMA II: *Data su s una funzione $A(M)$ ivi sommabile, per quasi-tutti gli N di s la funzione (di M) $A(M)\dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M}$*

---

[10]) Si vedano le pag. 93-101 di [2]; la dimostrazione è contenuta in quella di una relazione più generale dimostrata dall'AMERIO, la (49) di pag. 101: basterà prendere nelle (16), (34) e (35) di [2] il punto P o il punto Q (secondo il simbolismo di AMERIO) sulla superficie s a seconda che si voglia dimostrare la (11) per $P\to N$ su ν_N dall'interno o dall'esterno di τ.

Del resto la (11) si può anche direttamente dimostrare nel seguente modo. Faremo la dimostrazione introducendo per semplicità di calcolo ipotesi che potrebbero però evitarsi; ci basta aver rilevato il tipo di ragionamento col quale si può arrivare direttamente alla (11). Sia N un punto di s; possiamo supporre senza ledere la generalità che le coordinate di N siano $(0, 0, y')$ e che la conormale a s in N sia parallela all'asse x_2, per modo che la superficie s in un intorno s_0 di N si possa rappresentare con l'equazione $x_2 = \varphi(x_1, y)$ per (x_1, y) variabile in un certo intorno ω di $(0, y')$ sul piano (x_1, y); le coordinate di P siano allora $(0, \xi_2, y')$ e siano $(x_1, \varphi(x_1, y), y)$ quelle del generico punto M di s_0. Risulterà evidentemente

$$\lim_{P\to N\ (\text{su }\nu_N)} \int_{s-s_0} B(M)F(M,P)d_M s = \int_{s-s_0} B(M)F(M,N)d_M s.$$

D'altra parte posto in ω: $\overline{B}(x_1, y) = B(M)$ risulta

$$\int_{s_0} B(M)F(M,P)d_M s =$$

$$= \iint_{\omega(y')} \overline{B}(x_1, y)\, \frac{e^{-\frac{x_1^2+[\xi_2-\varphi(x_1,y)]^2}{4(y'-y)}}}{(y'-y)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\, dx_1 dy$$

$\omega(y')$ essendo l'insieme dei punti (x_1, y) di ω tali che $y < y'$.

Con il ragionamento fatto più sopra per dimostrare che $B(M)F(M, N)$ è per quasi tutti gli N di s sommabile su s si può poi dimostrare analo-

è sommabile su s e risulta:

$$\lim_{P \to N (\text{su} \pm \nu_N)} \int_s A(M) \frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_M} d_M s = \pm 2\pi A(N) + \tag{13}$$

$$+ \int_s A(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M} d_M s \quad ^{11)}.$$

La sommabilità su s di $A(M) \dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M}$ per quasi-tutti gli N di s si dimostra col ragionamento di FICHERA già adoperato per il teorema I, tenendo presente che l'integrale $\int_s \left| \dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M} \right| d_N s$

---

gamente che $\overline{B}(x_1, y) \dfrac{e^{-\frac{(x_1^* - x_1)^2}{4(y^* - y)}}}{y^* - y}$ è sommabile in $\omega(y^*)$ per quasi-tutti gli (x_1^*, y^*) di ω; possiamo quindi supporre, per comodità, che $(0, y')$ sia tale che $\overline{B}(x_1, y) \dfrac{e^{-\frac{x_1^2}{4(y' - y)}}}{y' - y}$ sia sommabile in $\omega(y')$; e allora, poichè in $\omega(y')$ è

$$\left| \overline{B}(x_1, y) \frac{e^{-\frac{x_1^2 + [\xi_2 - \varphi(x_1, y)]^2}{4(y' - y)}}}{y' - y} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} \right| <$$

$$< H \, | \overline{B}(x_1, y) | \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4(y' - y)}}}{y' - y} \qquad (H \text{ costante opportuna})$$

ne viene

$$\lim_{P \to N (\text{su } \nu_N)} \iint_{\omega(y')} \overline{B}(x_1, y) \frac{e^{-\frac{x_1^2 + [\xi_2 - \varphi(x_1, y)]^2}{4(y' - y)}}}{y' - y} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} \, dx_1 dy =$$

$$= \iint_{\omega(y')} \overline{B}(x_1, y) \frac{e^{-\frac{x_1^2 + \varphi^2(x_1, y)}{4(y' - y)}}}{y' - y} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} \, dx_1 dy$$

cioè

$$\lim_{P \to N (\text{su } \nu_N)} \int_{s_0} B(M) F(M, P) d_M s = \int_{s_0} B(M) F(M, N) d_M s.$$

11) A primo e a secondo membro vanno presi contemporaneamente i segni superiore o inferiore.

è funzione continua di M su s [12]) (anche se non lo è su tutto lo spazio).

Per dimostrare poi la (13) incominciamo con l'osservare che essa è già nota (si veda ad es. [12; pag. 258]) per $A(M)$ funzione continua su s; sicchè in particolare si ha

$$\lim_{P \to N(\mathrm{su} \pm \nu_N)} \int_s A(N) \frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_M} d_M s = \pm 2\pi A(N) + \int_s A(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M} d_M s;$$

per arrivare alla (13) basterà dimostrare che

$$\lim_{P \to N(\mathrm{su} \pm \nu_N)} \int_s [A(M) - A(N)] \left[\frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M}\right] d_M s = 0 \tag{15}$$

e poi sommare le due relazioni.

Ma la (15) trovasi in sostanza già dimostrata in Amerio [13]).

Teorema III: *Data su s una funzione $B(M)$ ivi sommabile, per quasi-tutti gli N di s la funzione (di M) $B(M) \dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N}$ è sommabile su s e risulta*

$$\lim_{P \to N(\mathrm{su} \pm \nu_N)} \int_s B(M) \frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_N} d_M s = \mp 2\pi B(N) + \int_s B(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N} d_M s. \tag{16}$$

---

12) Si veda il lavoro di Levi [12, pag. 253-257]; ivi è dimostrata, anche se non è esplicitamente affermata, la continuità rispetto a N di $\int_s \left|\frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M}\right| d_M s$ per N variabile su s. Ma gli stessi ragionamenti servono anche a dimostrare la continuità rispetto a M di $\int_s \left|\frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M}\right| d_N s$ su s; si veda anche in proposito il succ. n. 4 del presente lavoro.

13) Si vedano il luogo e le pagine citate in [10]); valgono avvertenze analoghe a quelle riferite in [10]), per ottenere la (15) dalla relazione più generale dimostrata dall'Amerio; anche ora si potrebbe, volendo, dimostrare direttamente la (15).

Anche qui per dimostrare la sommabilità su s di $B(M)\dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N}$ per quasi-tutti gli N di s basterà ripetere il ragionamento già adoperato per i teoremi I e II, ricordando che l' integrale $\int\limits_s \left|\dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N}\right| d_N s$ è funzione continua per M variabile su s [14]).

Si osservi poi che la (16) è già stata dimostrata dal LEVI [13; n. 5 pag. 444-448] per $B(M)$ funzione continua su s, in particolare per $B(M)$ costante; sicchè basterà, per verificare la (16), dimostrare che risulta

$$(17) \qquad \lim_{P \to N (\text{su} \pm \nu_N)} \int\limits_s [B(M) - B(N)] \left[\frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_N} - \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N}\right] d_M s = 0.$$

I ragionamenti di AMERIO citati a proposito della (15) possono senz' altro ripetersi anche per dimostrare la (17) [15]).

TEOREMA IV: *Data su $p(0)$ una funzione $A(M)$ ivi sommabile, per quasi tutti gli N di $p(0)$ risulta*

$$(18) \qquad \lim_{P \to N (\text{su} + n_N)} \int\limits_{p(0)} A(M) F(M, P) d_M p(0) = 4\pi A(N).$$

La (18) è vera per ogni N interno a $p(0)$ se $A(M)$ è costante per un classico teorema; basta allora far vedere che per quasi

---

14) Si veda LEVI [13; n. 5 pag. 444-448]; anche ora vale un'avvertenza analoga a quella fatta nella nota 12); si veda anche il n. 4 nel presente lavoro.

15) Si osservi a tale proposito che nella dimostrazione di AMERIO si può senz'altro sostituire alla $\dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M}$ la $\dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N}$ e ciò perchè la funzione $F(M, N)$ è rispetto alle coppie di variabili (x_1, x_2) e (x_1', x_2') simmetrica e nel derivare lungo la conormale la variabile y (o y') rimane costante; sicchè anche per le $\dfrac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_N}$ e $\dfrac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N}$ varranno relazioni simili alla (30) di AMERIO e i successivi Suoi ragionamenti continueranno quindi a valere. Anche in questo caso del resto la (17) potrebbe dimostrarsi direttamente.

tutti gli N di $p(0)$ è

$$\lim_{P \to N\ (\text{su} + n_N)} \int_{p(0)} [A(M) - A(N)] F(M, P) d_M p(0) = 0 \quad .$$

e per questo sono validi i ragionamenti di pag. 91-92 del lavoro [2] di AMERIO.

3. Teoremi di unicità. — Stabiliremo ora alcuni teoremi di unicità per l'equazione $E(u) = 0$ nella classe Γ.

TEOREMA V: *Esiste in Γ solo la funzione $u \equiv 0$ che soddisfi alle*

(19) $\lim_{P \to N\ (\text{su} + n_N)} u(P) = 0$ *per quasi-tutti gli N di $p(0)$*

(19′) $\lim_{P \to N\ (\text{su} + \nu_N)} u(P) = 0$ » » » » » » s

Infatti sia $Q \equiv (x_1', x_2', y')$ un punto esterno a τ e con $y' \leq y_0$; allora, osservando che $F(M, Q) = 0$ se M trovasi su $p(y)$ con $y \geq y'$ e ricordando le (19), (19′) e la (9) si ha

$$0 = \int_s B(M) F(M, Q) d_M s \,. \tag{20}$$

Derivando la (20) rispetto a Q lungo ν_N e facendo tendere poi Q a N lungo $-\nu_N$ si ottiene dal teorema III che $B(M)$ verifica quasi-ovunque su s l'equazione

$$0 = 2\pi B(M) + \int_s B(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N} d_M s \tag{21}$$

cioè

$$B(N) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{y'} dy \int_{c(y)} B(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N} d_M c(y)$$

che è un'equazione omogenea di seconda specie del tipo misto di VOLTERRA-FREDHOLM.

Si può allora dedurre che $B(M)$ è quasi-ovunque nulla su s [16]) e perciò dalla (10) si ottiene che $u(P) \equiv 0$ in $\tau - \sigma$.

TEOREMA VI: *Esiste in* Γ *solo la funzione* $u \equiv 0$ *che soddisfi alle*

$$\lim_{P \to N\ (\mathrm{su}\ +n_N)} u(P) = 0 \quad per\ quasi\text{-}tutti\ gli\ N\ di\ p(0) \tag{22}$$

$$\lim_{P \to N\ (\mathrm{su}\ +\nu_N)} \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_N} - h(N)u(P) \right\} = 0 \quad per\ quasi\text{-}tutti\ gli\ N\ di\ s \tag{22'}$$

$h(N)$ essendo una funzione quasi-continua e limitata in s.

Se $Q \equiv (x_1', x_2', y)(y' \leq y_0)$ è esterno a τ, per le (22), (22') e la (9) si ha

$$0 = \int_s A(M) \frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu_M} d_M s - \int_s h(M)A(M)F(M, Q) d_M s$$

e quindi per i teoremi I e II si ha quasi-ovunque su s

$$0 = -2\pi A(N) + \int_s A(M) \left\{ \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M} - h(M)F(M, N) \right\} d_M s$$

$A(N)$ soddisfa quindi ad un' equazione integrale omogenea del tipo misto e perciò (v. LEVI [13, pag. 448-450; 12, pag. 260-263]; valgono anche in questo caso osservazioni analoghe a quelle della nota [16])) $A(N)$ è quasi-ovunque nulla su s; quindi la (10) ci dà $u(P) \equiv 0$ in $\tau - \sigma$.

---

[16]) Il LEVI in [13; n. 6 pp. 448-450] ha studiato l' equazione non omogenea

$$B(N) + \frac{1}{2\pi} \int_s B(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N} d_M s = \varphi(N) \tag{γ}$$

nel caso che $\varphi(N)$ fosse continua su s, dimostrandone il teorema di esistenza e di unicità, mediante lo studio diretto della relativa serie di NEUMANN; il teorema vale senz'altro anche nella ipotesi della sola sommabilità della $\varphi(M)$ (la (γ) essendo allora verificata quasi-ovunque su s) e vale quindi anche il teorema di unicità per l'equazione omogenea corrispondente nella forma che ci interessa per l'affermazione del testo. Ciò sarà dimostrato, insieme a uno studio più particolareggiato del nucleo risolvente della (γ), nella Nota II.

I teoremi di unicità ora dimostrati permettono di caratterizzare la classe Γ mediante il seguente

TEOREMA VII: *Condizione necessaria e sufficiente perchè $u(P)$ appartenga alla classe Γ è che esista una funzione $\varphi(M)$ sommabile su $s + p(0)$ tale che si abbia in $\tau - \sigma$*

$$u(P) = \int_s \varphi(M)F(M, P)d_M s + \int_{p(0)} \varphi(M)F(M, P)d_M p(0)$$

La condizione è sufficiente. Infatti i teoremi I, III e IV e ovvi passaggi al limite sotto il segno d' integrale ci assicurano che risulta, col solito significato dei simboli,

$A(N) = 4\pi\varphi(N)$ per quasi-tutti gli N di $p(0)$

$$A(N) = \int_s \varphi(M)F(M, N)d_M s + \int_{p(0)} \varphi(M)F(M, N)d_M p(0)$$

per quasi-tutti gli N di s

$$A(N) = \int_s \varphi(M)F(M, N)d_M s + \int_{p(0)} \varphi(M)F(M, N)d_M p(0)$$

per tutti gli N interni a $p(y_0)$

$$B(N) = -2\pi\varphi(N) + \int_s \varphi(M)\frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N} d_M s + \int_{p(0)} \varphi(M)\frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N} d_M p(0)$$

per quasi-tutti gli N di s.

Verifichiamo ora che $u(P)$, $A(N)$ e $B(M)$ soddisfano alle (9) e (10).

Sia $Q \equiv (x_1', x_2', y')$ un punto esterno a τ e con $y' > 0$. Si ha, le inversioni nell' ordine di integrazione essendo lecite:

$$(23)\quad \int_s A(M)\frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu_M} d_M s + \int_\sigma A(M)F(M, Q)\cos(n_M y)d_M \sigma -$$

$$-\int_s B(M)F(M, Q)d_M s = \int_s \frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu_M} d_M s \left\{ \int_s \varphi(R)F(R, M)d_R s + \right.$$

$$+\int\limits_{p(0)}\varphi(R)F(R,\ M)d_R p(0)\Big\}+4\pi\int\limits_{p(0)}\varphi(M)F(M,\ Q)d_M p(0)-$$

$$-\int\limits_{p(y_0)}F(M,\ Q)d_M p(y_0)\Big\{\int\limits_{s}\varphi(R)F(R,\ M)d_R s+\int\limits_{p(0)}\varphi(R)F(R,\ M)d_R p(0)\Big\}-$$

$$-\int\limits_{s}F(M,\ Q)d_M s\Big\{-2\pi\varphi(M)+\int\limits_{s}\varphi(R)\frac{\partial F(R,\ M)}{\partial\nu_M}d_R s+$$

$$+\int\limits_{p(0)}\varphi(R)\frac{\partial F(R,\ M)}{\partial\nu_M}d_M p(0)\Big\}=4\pi\int\limits_{p(0)}\varphi(M)F(M,\ Q)d_M p(0)+$$

$$+2\pi\int\limits_{s}\varphi(M)F(M,\ Q)d_M s+\int\limits_{s}\varphi(R)d_R s\Big\{\int\limits_{s}\Big[\frac{\partial F(M,\ Q)}{\partial\nu_M}F(R,\ M)-$$

$$-F(M,\ Q)\frac{\partial F(R,\ M)}{\partial\nu_M}\Big]d_M s-\int\limits_{p(y_0)}F(M,\ Q)F(R,\ M)d_M p(y_0)\Big\}+$$

$$+\int\limits_{p(0)}\varphi(R)d_R p(0)\Big\{\int\limits_{s}\Big[\frac{\partial F(M,\ Q)}{\partial\nu_M}F(R,\ M)-F(M,\ Q)\frac{\partial F(R,\ M)}{\partial\nu_M}\Big]d_M s-$$

$$-\int\limits_{p(y_0)}F(M,\ Q)F(R,\ M)d_M p(y_0)\Big\}.$$

Si osservi ora che fissato $\overline{R}\equiv(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{y})$ esterno a τ e tale che $0\leq\overline{y}\leq y'$, per la prima formula di GREEN, la (5), applicata alla funzione di P $F(\overline{R},\ P)$, soluzione biregolare in τ della $E(u)=0$, si ha:

$$(24)\qquad 0=\int\limits_{s}F(\overline{R},\ M)\frac{\partial F(M,\ Q)}{\partial\nu_M}d_M s+$$

$$+\int\limits_{\sigma}F(\overline{R},\ M)F(M,\ Q)\cos(n_M y)d_M\sigma-\int\limits_{s}\frac{\partial F(\overline{R},\ M)}{\partial\nu_M}F(M,\ Q)d_M s$$

e perciò se si tien conto che per M su $p(0)$ è $F(\overline{R},M)=0$, si suppone R appartenente a s e si fa tendere $\overline{R}$ a R lungo

$-\nu_R$, si ottiene [17])

$$(25)\quad 0=\int_s F(R,M)\frac{\partial F(M,Q)}{\partial\nu_M}d_Ms-\int_{p(y_0)}F(R,M)F(M,Q)d_Mp(y_0)-$$
$$-\int_s\frac{\partial F(R,M)}{\partial\nu_M}F(M,Q)d_Ms+2\pi F(R,Q).$$

Se invece si prende $\overline{R}\equiv(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{y})$ esterno a τ e tale che $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ sia interno a D e $\overline{y}$ sia negativo, si potrà ancora scrivere la (24) e poi, supposto R interno a $p(0)$, e fatto tendere $\overline{R}$ a R lungo $-n_R$, si ottiene [18])

$$(26)\quad 0=\int_s F(R,M)\frac{\partial F(M,Q)}{\partial\nu_M}d_Ms-\int_{p(y_0)}F(R,M)F(M,Q)d_Mp(y_0)+$$
$$+4\pi F(R,Q)-\int_s\frac{\partial F(R,M)}{\partial\nu_M}F(M,Q)d_Ms.$$

Le (25) e (26) assicurano perciò l'annullarsi dell'ultimo membro della (23). Ovviamente poi il primo membro della (23) è nullo se il punto Q è tale che $y'\leq 0$, poichè allora $F(M,Q)$ e $\dfrac{\partial F(M,Q)}{\partial\nu_M}$ sono nulle su σ. Dunque è soddisfatta la (9).

In modo del tutto analogo si dimostra che è soddisfatta anche la (10); basterà sostituire la (24) con la II formula di GREEN, la (6), applicata sempre alla funzione $F(\overline{R},P)$. Si otterrà che l'ultimo membro di (23), supposto ora Q interno a τ, sarà uguale a $4\pi u(Q)$.

La condizione è necessaria. Supposto infatti che $u(P)$ appartenga a Γ, costruiamo la funzione $\varphi(N)$ in questo modo: su $p(0)$ la poniamo uguale ad $\dfrac{A(N)}{4\pi}$. Per determinare poi $\varphi(N)$

---

[17]) Si fa uso qui di una ovvia modifica (scambio delle variabili M e P) dei casi classici dei teoremi I e II, più precisamente degli analoghi dei teor. I e II per l'equazione aggiunta $E^*(u)=0$; si veda anche il successivo n. 4.

[18]) Per un'ovvia modifica del caso classico del teorema IV, più precisamente per l'analogo del teor. IV relativo all'equazione $E^*(u)=0$: si veda il n. 4.

su s consideriamo la seguente equazione integrale nell' incognita $\varphi(N)$

$$(27)\qquad \varphi(N)-\frac{1}{2\pi}\int_s \varphi(M)\frac{\partial F(M,N)}{\partial \nu_N}d_M s=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{p(0)} A(M)\frac{\partial F(M,N)}{\partial \nu_N}d_M p(0)-\frac{B(N)}{2\pi}.$$

Essa è un'equazione del tipo della (γ) della nota [16]) e dunque, per quanto si è ivi detto, ammette una e una sola soluzione $\varphi(N)$ sommabile su s.

Si costruisca allora in $\tau-\sigma$ mediante la $\varphi(N)$ la funzione

$$\overline{u}(P)=\int_s \varphi(M)F(M,P)d_M s+\int_{p(0)}\varphi(M)F(M,P)d_M p(0).$$

Per i teoremi I, III e IV e per la (27) essa soddisfa alle

$$\lim_{P\to N\,(\text{su}\,+n_N)}\overline{u}(P)=4\pi\varphi(N)=A(N)\ \text{per quasi-tutti gli}\ N\ \text{di}\ p(0).$$

$$\lim_{P\to N\,(\text{su}\,+\nu_N)}\frac{\partial\overline{u}(P)}{\partial\nu_N}=B(N)\qquad \text{per quasi-tutti gli}\ N\ \text{di}\ s$$

e quindi per il teorema VI (nel caso $h(N)=0$) deve essere $u(P)\equiv\overline{u}(P)$.

4. L'equazione aggiunta. — Sarà bene osservare che i risultati dei numeri precedenti valgono anche per l' equazione aggiunta $E^*(w)=0$.

Le formule di GREEN (5) e (6) diventano allora, essendo $w(P)$ una soluzione biregolare di τ di $E^*(w)=0$

$$(5')\quad 0=\int_s w(M)\frac{\partial F(Q,M)}{\partial\nu_M}d_M s-\int_\sigma w(M)F(Q,M)\cos(n_M y)d_M\sigma-$$

$$-\int_s\frac{\partial w(M)}{\partial\nu_M}F(Q,M)d_M s$$

per Q esterno a τ e

$$(6') \qquad 4\pi w(P) = \int_s w(M) \frac{\partial F(Q, M)}{\partial \nu_M} d_M s + \int_{p(y_0)} w(M) F(Q, M) d_M p(y_0) - \\ - \int_s \frac{\partial w(M)}{\partial \nu_M} F(Q, M) d_M s$$

per P interno a τ.

In base ad esse si potrà definire una classe Δ di funzioni $w(P)$ analoga alla Γ, per cui varrà anche un *teorema d'inversione*; si osservi solo che la

$$\lim_{P \to N\,(su + n_N)} u(P) = A(N) \quad \text{per quasi-tutti gli } N \text{ di } p(0)$$

andrà sostituita con la

$$\lim_{P \to N\,(su + n_N)} w(P) = A(N) \quad \text{per quasi-tutti gli } N \text{ di } p(y_0).$$

Dopo di che i risultati dei nn. 2 e 3 si estendono senz'altro anche all'equazione $E^*(w) = 0$; abbiamo del resto già avuto occasione di osservare la cosa, almeno nelle ipotesi classiche, nelle note [9]), [12]), [14]), [17]), [18]).

5. Teoremi di completezza per alcuni sistemi di funzioni. — Come è noto, il teorema d'inversione di AMERIO permette di tradurre i problemi di valore al contorno per l'equazione (1) e per l'equazione non omogenea ad essa corrispondente in certi sistemi integrali di FISCHER-RIESZ (si veda [2; n. 3, pag. 106; n. 5, pag. 113; n. 6, pag. 115; n. 8, pag. 120]). Orbene, i teoremi di unicità stabiliti nel n. 3 permettono senz'altro di dedurre da questi sistemi di FISCHER-RIESZ la completezza hilbertiana dei sistemi di funzioni ad essi connessi e quindi la determinazione della soluzione dei relativi problemi al contorno. Mi limito a richiamarne alcuni.

Sia τ' un dominio limitato contenente τ nel suo interno e sia $\{g_\nu(Q)\}$ una successione di funzioni continue del dominio $\overline{\tau} = \tau' - \tau + \sigma$ chiusa rispetto alla totalità delle funzioni continue nei punti interni di τ, per es. sia

$$g_\nu(Q) = x_1^{\mu_1}\, x_2^{\mu_2}\, y^{\mu_3} \qquad (\mu_k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Posto

$$f_r(M) = \int_{\bar{\tau}} g_r(Q) F(M, Q) d_Q \bar{\tau}$$

si vede subito [2, n. 3, pag. 106] che l'equazione (9) equivale al sistema di equazioni di FISCHER-RIESZ:

$$(28) \quad \int_s A(M) \frac{\partial f_r(M)}{\partial \nu_M} ds + \int_{p(0)} A(M) f_r(M) dp(0) - \int_{p(y_0)} A(M) f_r(M)\, dp(y_0) - $$
$$- \int_s B(M) f_r(M) ds = 0.$$

Supponiamo che nel problema al contorno da studiare sia dato il valore di A su $p(0)$ e su s.

Si ricava allora dalle (28) per le incognite A su $p(y_0)$ e B su s il sistema

$$(29) \qquad \int_{p(y_0)} A(M) f_r(M) dp(y_0) + \int_s B(M) f_r(M) ds = c_r.$$

con c_r costanti note. Seguendo il metodo di PICONE [14, pag. 632-34] per la risoluzione dei sistemi del tipo (29), indichiamo con G un vettore dello spazio S_2 di componenti A in $p(y_0)$, B in s e con $\{\Omega_r\}$ una successione di vettori dello S_2 di componenti f_r in $p(y_0)$ e f_r in s; il sistema (29) ci dà i coefficienti di Fourier del vettore incognito G rispetto al sistema $\{\Omega_r\}$. E il teorema V di unicità ci assicura senz'altro la completezza del sistema $\{\Omega_r\}$ nella totalità dei vettori G di componenti A e B di quadrato sommabile rispettivamente in $p(y_0)$ e s, anzi ci dà di più la chiusura di tale sistema rispetto alla totalità dei vettori di componenti solamente sommabili.

Un altro sistema la cui completezza è assai utile rilevare è il seguente. Posto ancora

$$g_r = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} y^{\mu_3} \qquad (\mu_k = 0, 1, 2, \ldots)$$

il sistema di equazioni

$$-\int_\tau u E^*(g_r) d\tau = \int_s \left(A \frac{\partial g_r}{\partial \nu} - g_r B\right) ds + \int_{p(0)} A g_r dp(0) - \int_{p(y_0)} A g_r dp(y_0)$$

caratterizza, insieme alla (10), gli integrali della (1) appartenenti alla classe Γ [2, pag. 113, n. 5].

Ne segue per es., in virtù del teorema V, in modo analogo a quello visto per il sistema $\{\Omega_r\}$, che il sistema $\{\Omega_r^*\}$ di vettori dello spazio S_3 di componenti g_r in $p(y_0)$, g_r in s e $-E^*(g_r)$ in τ è completo nella totalità dei vettori dell' S_3 di componenti di quadrato sommabile rispettivamente in $p(y_0)$, s e τ.

In modo analogo si può studiare la completezza del sistema dei cosiddetti polinomi parabolici omogenei sul quale è utile soffermarsi più a lungo.

Si considerino le due funzioni

$$f = e^{p_1x_1 + p_2x_2 - (p_1^2 + p_2^2)y}$$

$$f^* = e^{p_1x_1 + p_2x_2 + (p_1^2 + p_2^2)y}$$

p_1 e p_2 essendo parametri arbitrari. E' noto che i polinomi parabolici omogenei w_r e v_r sono definiti dalle

$$w_r(M) = w_r(x_1, x_2, y) = \left(\frac{\partial^\mu f}{\partial p_1^{\mu_1} \partial p_2^{\mu_2}}\right)_{\substack{p_1=0\\p_2=0}}$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu \quad (\mu_k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$v_r(M) = v_r(x_1, x_2, y) = \left(\frac{\partial^\mu f^*}{\partial p_1^{\mu_1} \partial p_2^{\mu_2}}\right)_{\substack{p_1=0\\p_2=0}}$$

e che i polinomi w_r sono soluzione della $E^*(w) = 0$ e i polinomi v_r della $E(u) = 0$. Supponiamo ora che il dominio D sia semplicemente connesso, la sua frontiera riducendosi ad una sola curva C_0 di classe 2. In questa ipotesi AMERIO [2, n. 5] ha dimostrato che l'equazione (9) è equivalente al sistema

$$(30) \qquad \int_s A(M)\frac{\partial w_r(M)}{\partial \nu_M} ds + \int_{p(0)} A(M) w_r(M) dp(0) - \\ - \int_{p(y_0)} A(M) w_r(M) dp(y_0) - \int_s B(M) w_r(M) ds = 0$$

il quale può dunque servire insieme alla (10) a caratterizzare gli integrali di (1) appartenenti a Γ. E in modo analogo si ottiene un analogo sistema per i polinomi v_r

$$\int_s A(M)\frac{\partial v_r(M)}{\partial \nu_M}ds - \int_{p(0)} A(M)v_r(M)dp(0) + \tag{30'}$$

$$+ \int_{p(y_0)} A(M)v_r(M)dp(y_0) - \int_s B(M)v_r(M)ds = 0.$$

Si considerino ora nello spazio S_2 i sistemi di vettori

ω_r di componenti w_r su $p(y_0)$ e w_r su s;

ω_r' di componenti $-w_r$ su $p(y_0)$ e $\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - hw_r$ su s;

$\overline{\omega}_r$ di componenti v_r su $p(0)$ e v_r su s;

$\overline{\omega}_r'$ di componenti $-v_r$ su $p(0)$ e $\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - hv_r$ su s;

h essendo una funzione quasi-continua e limitata su s.

I teoremi di unicità V e VI e i corrispondenti per l' equazione $E^*(w) = 0$ (v. n. 4) permettono dunque, in virtù delle (30) e (30') di enunciare il seguente

TEOREMA VIII: *Nell'ipotesi che D sia semplicemente connesso, i sistemi* $\{\omega_r\}$ e $\{\omega_r'\}$ [$\{\overline{\omega}_r\}$ e $\{\overline{\omega}_r'\}$] *sono completi nella totalità dei vettori G dello spazio S_2 di componenti g_1 e g_2 di quadrato sommabile rispettivamente su $p(y_0)$ e su s (su $p(0)$ e su s)* [19]).

Si ha anzi di più la chiusura dei suddetti sistemi anche rispetto ai vettori G di componenti g_1 e g_2 solamente sommabili.

6. Osservazioni finali. — Lo studio dei teoremi di unicità e di completezza corrispondenti al problema di valori al

---

[19]) Per $m = 1$ la completezza hilbertiana di $\{\omega_r\}$ e $\{\overline{\omega}_r\}$ è già stata dimostrata da G. CIMMINO [4]. Sempre per $m = 1$ e per i sistemi $\{\omega_r\}$ e $\{\overline{\omega}_r\}$ essa trovasi anche in sostanza contenuta nel lavoro [3] di C. CILIBERTO. Non mi risulta invece dimostrata prima d' ora la proprietà per i sistemi $\{\omega'_r\}$ e $\{\overline{\omega}'_r\}$.

contorno, in cui è assegnata la A su $p(0)$ e su una parte s' di s e una combinazione del tipo $B - hA$ sulla rimanente parte s'' di s, appare più complesso dei precedenti casi. Torneremo su di esso nella Nota II; per ora ci limiteremo ad esaminare un caso particolare.

Si indichino con $s_0, s_1, \dots, s_k$ le superfici cilindriche componenti la superficie s e proiettanti rispettivamente le curve $C_0, C_1, \dots, C_k$; sceltone un numero $r \leq k$, $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_r}$ si ponga $s' = s_{i_1} + s_{i_2} + \dots + s_{i_r}$ e $s'' = s - s'$. Allora si dimostra facilmente il

TEOREMA IX: *Esiste solo la funzione $u \equiv 0$ in Γ che soddisfi alle:*

$$(31) \qquad \lim_{P \to N \,(\text{su} \, + n_N)} u(P) = 0 \qquad \textit{per quasi-tutti gli } N \textit{ di } p(0)$$

$$(31') \qquad \lim_{P \to N \,(\text{su} \, + \nu_N)} u(P) = 0 \qquad \textit{per quasi-tutti gli } N \textit{ di } s'$$

$$(31'') \qquad \lim_{P \to N \,(\text{su} \, + \nu_N)} \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_N} - h(N) u(P) \right\} = 0 \qquad \textit{per quasi-tutti gli } N \textit{ di } s''$$

$h(N)$ essendo una funzione quasi-continua limitata in s''.

Infatti si scriva la (9) per Q esterno a τ ($y' \leq y_0$), tenendo conto della (31); facendo tendere Q a un punto N di s'' lungo $-\nu_N$, si ottiene per le (31') e (31'')

$$(32) \qquad 2\pi A(N) = \int_{s''} A(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M} d_M s - \int_{s'} B(M) F(M, N) d_M s - \int_{s''} h(M) A(M) F(M, N) d_M s \quad \text{per quasi-tutti gli } N \text{ di } s''.$$

In modo analogo, derivando però prima la (9) rispetto a Q lungo ν_N, si ottiene

$$(32') \qquad 2\pi B(N) = \int_{s''} A(M) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial \nu_M \partial \nu_N} d_M s - \int_{s'} B(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N} d_M s - \int_{s'} h(M) A(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_N} d_M s \quad \text{per quasi-tutti gli } N \text{ di } s'.$$

Le (32), (32') costituiscono un sistema di equazioni integrali omogenee nelle incognite $A(N)$ su s'' e $B(N)$ su s', cui è facilmente applicabile il metodo di LEVI completato con osservazioni analoghe a quelle svolte nella nota [16]) e perciò ne viene che è $A(N)=0$ e $B(N)=0$, quasi-ovunque su s; da cui il teorema.

Si osservi che il sistema (32) (32') si può scrivere anche se s' e s' sono dominî qualunque di s senza punti interni comuni e tali che $s'+s''=s$; ma l'eventuale singolarità del nucleo $\dfrac{\partial^2 F(M, N)}{\partial\nu_M \partial\nu_N}$ non permette di applicare senz'altro il procedimento del LEVI.

Ovviamente dal teorema ora visto si possono ricavare proprietà di completezza analogamente a quanto si è fatto nel n. 5.

E' utile infine fare anche la seguente osservazione. Ci siamo limitati a considerare domini τ la cui superficie «laterale» s è cilindrica e a generatrici parallele all'asse delle y, perchè l'esposizione dei risultati precedenti diventa più semplice e perchè in sostanza è questo il solo caso che ha un significato fisico relativamente al problema della propagazione del calore.

Ma tutto quanto abbiamo detto si estende senz'altro al caso in cui la frontiera di τ sia più generale; e precisamente supponiamo che, mantenendo fisso il dominio D (base inferiore τ) e il piano $y=y_0$ le superficie $s_0, s_1, \dots, s_k$ delimitanti τ si deformino con continuità in modo tale però da riuscire ancora superficie di classe 2 in ogni loro punto, senza punti a comune a due a due, con piano tangente che formi con i piani caratteristici $y=$ costante un angolo maggiore di un numero $\theta>0$ e aventi il contorno sui piani $y=0$ e $y=y_0$.

I ragionamenti fatti e i risultati cui ci siamo riferiti valgono anche in queste ipotesi più generali su τ.

Si osservi solo che le due formule di GREEN (5) e (6) diventano ora

$$0=\int_s u(M)\frac{\partial F(M, Q)}{\partial\nu_M}\operatorname{sen}(n_M y)d_M s+\int_\sigma u(M)F(M, Q)\cos(n_M y)d_M\sigma-$$
$$-\int_s \frac{\partial u(M)}{\partial\nu_M}F(M, Q)\operatorname{sen}(n_M y)d_M s.$$

$$4\pi u(P) = \int_s u(M) \frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu_M} \operatorname{sen}(n_M y) d_M s +$$

$$+ \int_\sigma u(M) F(M, P) \cos(n_M y) d_M \sigma - \int_s \frac{\partial u(M)}{\partial \nu_M} F(M, P) \operatorname{sen}(n_M y) d_M s.$$

e conseguentemente andranno modificate le (9), (10) e gli integrali del n. 2; sarà anche necessario dimostrare con gli stessi ragionamenti ivi adoperati un teorema analogo al teorema I per l' integrale

$$\int_s A(M) F(M, P) \cos(n_M y) d_M s.$$

BIBLIOGRAFIA

1. L. AMERIO, *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* (Amer. Journal of Math., vol. LXIX-1947, pp. 447-489).
2. — — *Sull'equazione di propagazione del calore.* (Rend. di Mat. e delle sue appl. (5), vol. 5, 1946, pp. 84-120).
3. C. CILIBERTO, *Sul problema di Holmgren-Levi per l'equazione del calore.* (Giorn. di Mat. di Battaglini (4), vol. 80, 1950-51, pp. 1-13).
4. G. CIMMINO, *Nuovo metodo di approssimazione per la soluzione di problemi dei valori al contorno relativi all'equazione del calore.* (Giorn. di Mat. di Battaglini (3), vol. 66, 1928, pp. 75-98).
5. F. G. DRESSEL, *A boundary value problem for the heat equation,* (Amer. Journal of Math., vol. LV, 1933, pp. 641-653).
6. G. FICHERA, *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Naz. per le applicazioni del Calcolo,* (Memorie Acc. Naz. Lincei (Classe di scienze fis. ecc.), (8), vol. III, 1950).
7. — — *Teoremi di completezza connessi all'integrazione della equazione* $\Delta_4 u = f$, Giorn. di Mat. di Battaglini (4), vol. 77, 1947, pp. 184-199).
8. — — *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* (Ann. di Mat. pura e applicata (4), t. XXVII, 1948, pp. 1-28).
9. — — *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico.* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), vol. IV, 1950, pp. 1-66).

10. — — *Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare.* (Giorn. di Mat. di Battaglini (4), vol. 78, 1948, pp. 71-80).
11. M. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique.* (Journal de Math. (6), t. 9, 1913, pp. 305-471; (6) t. 10, 1914, pp. 105-148).
12. E. E. LEVI, *Sull'equazione al calore,* (Ann. di Mat. pura e appl. (3), t. 14, 1908, pp. 187-264).
13. — — *Sul problema di Fourier.* (Atti Acc. scienze di Torino, vol. 43, 1908, pp. 435-453).
14. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore,* (Rondinella, Napoli, 1940).
15. B. PINI, *Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico.* (Ann. di Mat. pura e appl. (4), t. XXXII, 1951, pp. 179-204).