

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sopra un sistema non-lineare in due gradi di libertà

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 64-98

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__64_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UN SISTEMA NON-LINEARE IN DUE GRADI DI LIBERTÀ

Memoria () di GIUSEPPE COLOMBO (a Padova)*

In un mio precedente lavoro ¹⁾ ho cominciato a studiare, da un punto di vista qualitativo sistemi non-lineari in due gradi di libertà del tipo

$$1) \quad \begin{cases} \ddot{x} - \alpha \dot{x} + 3\gamma^2 x^2 \dot{x} + \omega_1^2 x + m_1 y = 0, \\ \ddot{y} - \beta \dot{y} + 3\delta^2 y^2 \dot{y} + \omega_2^2 y + m_2 x = 0, \end{cases}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ costanti positive)

ovvero del tipo, sostanzialmente diverso, che si ottiene da questo ponendo $\delta = 0$, $\beta = -B < 0$. Con considerazioni di carattere geometrico-topologico sono pervenuto a dimostrare l'esistenza di soluzioni periodiche mettendomi in ipotesi abbastanza generali per ciò che riguarda i coefficienti.

Qui riprendo lo studio di questi sistemi dal punto di vista quantitativo supponendoli però debolmente non-lineari. Precisamente, detti S_1, S_2 i due sistemi in un grado di libertà che si ottengono da (1) ponendovi $m_1 = 0$ ed $m_2 = 0$, ho supposto che siano preponderanti sui rimanenti termini quelli relativi all'inerzia e alle forze di richiamo proprie di S_1 ed S_2 . Inoltre si è fatta l'ipotesi che le frequenze proprie degli oscillatori armonici, che si ottengono da S_1, S_2 eliminando i termini sulle velocità, siano prossime. Sotto queste ipotesi, pre-

*) Pervenuta in Redazione il 20 marzo 1952.

¹⁾ G. COLOMBO, *Sulle oscillazioni non-lineari in due gradi di libertà*. Rend. Sem. Mat. Padova, anno XIX, 1950, p. 413-441.

scindendo dalle quali è ben difficile riuscire a fare una analisi quantitativa rigorosa del fenomeno, ho potuto determinare, in prima approssimazione, le soluzioni periodiche del sistema (1) e di quelli che si ottengono da questo particularizzando le costanti e discuterne la stabilità approssimata. È notevole la molteplicità dei casi che si possono presentare: la possibilità dell'esistenza di più soluzioni periodiche tutte stabili ovvero l'assenza completa di tali soluzioni. Tale varietà di casi, almeno nella forma in cui si presenta, non mi sembra facilmente prevedibile.

Per quanto riguarda le restrizioni introdotte sui coefficienti voglio far notare che oltre a semplificare enormemente il problema analitico, l'aver trattato come infinitesimi dello stesso ordine, i termini di accoppiamento, i termini lineari e non lineari nelle velocità ed un termine nella differenza di pulsazione dei due oscillatori armonici fondamentali, può avere il pregio di far risaltare il rapporto tra l'influenza dei termini lineari e quella dei termini non-lineari.

Il metodo che ho seguito è in sostanza quello usato da Cartwright-Littlewood²⁾ nei loro studi sulle vibrazioni forzate e riduce la ricerca di soluzioni periodiche di 1) allo studio di un sistema alle differenze e della trasformazione topologica ad essa associata.

In sostanza, per verità, tale sistema alle differenze non differisce dal sistema differenziale della prima approssimazione che si ottiene col metodo di Kryloff e Bogoliuboff³⁾, però, sebbene più laborioso, quello qui usato ha il notevole vantaggio di dare un'idea esatta dell'approssimazione passo per passo conseguita.

La discussione, che nel caso generale non si riesce a portare completamente a termine, per le difficoltà specialmente algoritmiche è invece completa ed interessante in qualche caso

²⁾ M. L. CARTWRIGHT, *Forced oscillations in non-linear systems*, della raccolta: « Contribution to the theorie of non-linear oscillations » editore S. Lefschetz, Princeton University Press, 1950, p. 202 e segg.

³⁾ N. KRILOFF and N. BOGOLIUBOFF, *Introduction to Non-linear Mechanics*, trans. by S. Lefschetz, Annals f. Math. Studies No. 11 (Princeton, 1943).

particolare come per esempio nel caso di linearità della seconda equazione.

Vogliamo da ultimo ricordare che sistemi del tipo qui considerato, si incontrano in elettrotecnica, nella teoria dei circuiti oscillanti.

Volendo restare nell'ambito della meccanica propriamente detta, aggiungo qui sotto un esempio che mi pare espressivo

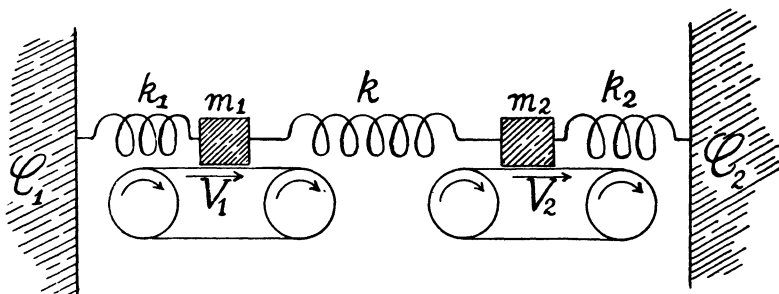


Fig. 1

di sistema meccanico in due gradi di libertà il cui moto è retto da un sistema differenziale del tipo 1).

Due masse m_1, m_2 sono collegate tra di loro con una molla K e fissate a due supporti C_1, C_2 rispettivamente con due molle K_1, K_2 come appare in fig. 1. Le masse sono appoggiate su due cinghie che si muovono uniformemente con velocità rispettive v_1, v_2 .

Denotiamo con x ed y rispettivamente le ascisse di m_1, m_2 , con l_1, l_2, l, a le lunghezze naturali delle molle e la distanza di C_1 da C_2 , con c_1, c_2, C le loro costanti elastiche. Siano inoltre b_1, b_2 i coefficienti di attrito viscoso ed $F_1(u), F_2(u)$ le funzioni caratteristiche dell'attrito dinamico di strisciamento, ove con u si è denotata la velocità relativa. Come è noto l'andamento delle funzioni caratteristiche suddette è quello segnato in fig. 2.

Le equazioni dinamiche si scrivono subito:

$$m_1 \ddot{x} + c_1(x - l_1) - C(y - x - l) = -b_1 \dot{x} + F_1(v_1 - \dot{x})$$

$$m_2 \ddot{y} - c_2(a - y - l_2) + C(y - x - l) = -b_2 \dot{y} + F_2(v_2 - \dot{y}).$$

Se si suppone che v_1 e v_2 appartengono al tratto discendente

delle caratteristiche e si sviluppano in serie le F_1, F_2 fino al termine di terzo grado, trascurando il secondo che non ha

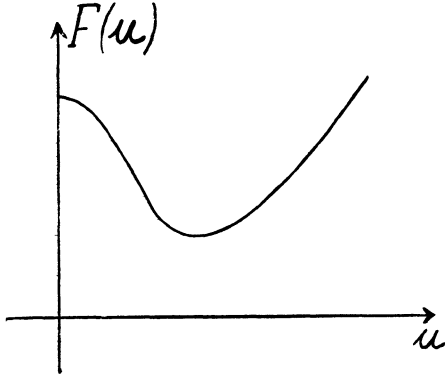


Fig. 2

influenza essenziale, si perviene al sistema

$$m_1 \ddot{x} + c_1(x - C_1) - C(y - x - l) = -b_1 \dot{x} + F_1(v_1) - \dot{x} F_1'(v_1) - \frac{\dot{x}^3}{3} F_1^{(3)}(v_1)$$

$$m_2 \ddot{y} - c_2(a - y - l_2) + c(y - x - l) = -b_2 \dot{y} + F_2(v_2) - \dot{y} F_2'(v_2) - \frac{\dot{y}^3}{3} F_2^{(3)}(v_2).$$

Se supponiamo che sia $-F_1'(v_1) > b_1, -F_2'(v_2) > b_2$, ciò che rende instabile la posizione di equilibrio del sistema, con una semplice derivazione si perviene ad un sistema del tipo 1).

1. La prima approssimazione. — Consideriamo dunque il sistema non-lineare in due gradi di libertà ⁴⁾

$$1_1) \quad \begin{cases} \ddot{x} - \alpha \dot{x} + 3\gamma x^2 \dot{x} + x + m_1 y = 0 \\ \ddot{y} - \beta \dot{y} + 3\delta y^2 \dot{y} + (1 + \rho)y + m_2 x = 0 \end{cases}$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta, m_1, m_2$ sono costanti tali che γ e δ sono positive o nulle mentre il prodotto $m_1 m_2$ è positivo e α, β sono

⁴⁾ Si suppone di aver adimensionalizzate le variabili nella usuale maniera, in modo che anche le costanti sono numeri puri.

positive se lo sono γ e δ rispettivamente, altrimenti sono nulle o negative. Inoltre supporremo, e ciò non diminuirà la generalità delle nostre considerazioni, che ρ sia positivo. Queste ipotesi si sono poste soltanto per essere aderenti ai casi concreti più interessanti e per semplificare la discussione che non è pur tuttavia semplice per il numero notevole di parametri che compaiono essenzialmente.

Si suppongano α , γ , m_1 , β , δ , m_2 , ρ infinitesimi dello stesso ordine e si scriva perciò, introducendo un parametro positivo ε , e con ovvio cambiamento di simboli,

$$2_1) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + x &= \varepsilon(\alpha\dot{x} - 3\gamma x^2\dot{x} - m_1 y) \\ \ddot{y} + y &= \varepsilon(\beta\dot{y} - 3\delta y^2\dot{y} - m_2 - \rho y). \end{aligned}$$

Usiamo il metodo di approssimazione di Cartwright e Littlewood⁵⁾, cerchiamo cioè una soluzione periodica soddisfacente alle condizioni

$$3_1) \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = a \geq 0, \quad y(0) = b \operatorname{sen} \varphi, \quad \dot{y}(0) = b \operatorname{cos} \varphi,$$

ove φ soddisfi alla

$$4_1) \quad 0 \leq \varphi < \pi,$$

ponendo

$$5_1) \quad x = a \operatorname{sen} t + \varepsilon \xi_1, \quad y = b \operatorname{sen}(t + \varphi) + \varepsilon \xi_2.$$

Tenute presenti le 3), le 5) comportano

$$6_1) \quad \xi_1(0) = \dot{\xi}_1(0) = \eta_1(0) = \dot{\eta}_1(0) = 0,$$

ed inoltre perchè la soluzione sia periodica di periodo $2\pi + \varepsilon\tau$, dovrà essere

$$7_1) \quad \begin{cases} a \operatorname{sen} \varepsilon\tau + \varepsilon \xi_1(2\pi + \varepsilon\tau) = 0, & a \operatorname{cos} \varepsilon\tau + \varepsilon \dot{\xi}_1(2\pi + \varepsilon\tau) = a \\ b \operatorname{sen}(\varepsilon\tau + \varphi) + \varepsilon \xi_2(2\pi + \varepsilon\tau) = b \operatorname{sen} \varphi, & b \operatorname{cos}(\varepsilon\tau + \varphi) + \varepsilon \dot{\xi}_2 = b \operatorname{cos} \varphi. \end{cases}$$

⁵⁾ Vedi loco citato in 2).

Sostituendo le 5₁) nelle 2₁) si ottiene

$$8_1) \left\{ \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \xi_1 &= a \cos t(\alpha - 3\gamma a^2 \text{sen}^2 t) - m_1 b \text{sen}(t + \varphi) + \\ &\quad + \varepsilon \varphi_1(\xi_1, \dot{\xi}_1, \eta_1, t, \varepsilon, a, \varphi), \\ \ddot{\eta}_1 + \eta_1 &= b \cos(t + \varphi)[\beta - 3\delta b^2 \text{sen}^2(t + \varphi)] - m_2 a \text{sen} t - \\ &\quad - \rho b \text{sen}(t + \varphi) + \varepsilon \psi_1(\xi_1, \eta_1, \dot{\xi}_1, \dot{\eta}_1, t, \varepsilon, a, b, \varphi). \end{aligned} \right.$$

ovvero

$$9_1) \left\{ \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \xi_1 &= f_1(t, a, b, \varphi) + \varepsilon \varphi_1, \\ \ddot{\eta}_1 + \eta_1 &= F_1(t, a, b, \varphi) + \varepsilon \psi_1. \end{aligned} \right.$$

Si riconosce facilmente ora, osservando la struttura delle quattro funzioni che compaiono a secondo membro di 9₁), (quella di φ_1 e ψ_1 , che non sono scritte esplicitamente, sono rapidamente deducibili) che per ogni scelta di h, k, a, b, φ si possono certamente determinare dei numeri M_1', N_1', M_1'', N_1'' tali che per ogni t e per $\varepsilon < 1$ risultino soddisfatte le

$$10_1) \left\{ \begin{aligned} |f_1(t, a, b, \varphi)| &< M_1'(a, b), \quad |F_1(t, a, b, \varphi)| < M_1''(a, b), \\ \varphi_1(\xi_1, \dot{\xi}_1, \eta_1, t, \varepsilon, a, b, \varphi) &\leq N_1'(h, k, a, b)(|\xi_1| + |\dot{\xi}_1|), \\ \psi_1(\xi_1, \dot{\xi}_1, \eta_1, \dot{\eta}_1, t, \varepsilon, a, b, \varphi) &\leq N_1''(h, k, a, b)(|\eta_1| + |\dot{\eta}_1|), \end{aligned} \right.$$

tutte le volte che $\xi_1, \dot{\xi}_1, \eta_1, \dot{\eta}_1$ soddisfano alle

$$11_1) \quad |\xi_1| < h, \quad |\dot{\xi}_1| < h, \quad |\eta_1| < k, \quad |\dot{\eta}_1| < k.$$

Se scegliamo quindi h e k in maniera che sia

$$h = M_1'(a, b)(e^{\varepsilon\pi} - 1) \quad k = M_1''(a, b)(e^{\varepsilon\pi} - 1)$$

restano di conseguenza ben determinati $N_1'(h, k, a, b)$ ed $N_1''(h, k, a, b)$ e per $\varepsilon < \frac{1}{N_1'}$, ed inoltre $\varepsilon < \frac{1}{N_1''}$ risulta subito che i secondi membri di 9₁) sono rispettivamente maggiorati in valore assoluto da $M_1' + |\xi| + |\dot{\xi}|$ e da $M_1'' + |\eta| + |\dot{\eta}|$ per ogni t .

Se ora si pone

$$15_1) \quad \xi_1 = \xi_1^* + \varepsilon \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_1^* + \varepsilon \eta_2,$$

dalle S_1 si ha che ξ_2, η_2 devono soddisfare ad equazioni del tipo:

$$16_1) \quad \begin{cases} \ddot{\xi}_2 + \xi_2 = f_2(t, a, b, \varphi) + \varepsilon \varphi_2(\xi_2, \dot{\xi}_2, \eta_2, \dot{\eta}_2, t, \varepsilon, a, b, \varphi), \\ \ddot{\eta}_2 + \eta_2 = F_2(t, a, b, \varphi) + \varepsilon \psi_2(\xi_2, \dot{\xi}_2, \eta_2, \dot{\eta}_2, t, \varepsilon, a, b, \varphi). \end{cases}$$

e ripetendo il ragionamento di più sopra si vede che per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0(a, b, \varphi, m_1, m_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho)$ e per ogni $0 \leq t \leq 3\pi$ si ha

$$17_1) \quad \begin{cases} |\xi_2| < \frac{1}{2} M_2'(e^{2t} - 1), & |\dot{\xi}_2| < \frac{1}{2} M_2'(e^{2t} - 1) \\ |\eta_2| < \frac{1}{2} M_2''(e^{2t} - 1), & |\dot{\eta}_2| < \frac{1}{2} M_2''(e^{2t} - 1). \end{cases}$$

In definitiva si può scrivere

$$18_1) \quad \begin{cases} x = a \sin t + \varepsilon \xi_1^* + 0(\varepsilon^2), \\ y = b \sin(t + \varphi) + \varepsilon \eta_1^* + 0(\varepsilon^2), \end{cases}$$

per ogni $0 \leq t \leq 3\pi$ e per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$ 7).

2. Il sistema alle differenze relativo al sistema 1).
Alcuni tipi di moti stabili parzialmente o completamente.
 — Imponiamo ora alle soluzioni 18₁) trovate nel precedente paragrafo di soddisfare alle 7₁). Dalla prima di queste ultime si ottiene

$$1_2) \quad \tau = -m_1 \frac{b}{a} \pi \cos \varphi + 0(\varepsilon).$$

x, y, t, ε . Allora la soluzione della equazione $\ddot{x} + x = F$ che soddisfi alle condizioni $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$, soddisfa alle $|x| < \frac{1}{2} M(e^{2t} - 1), |\dot{x}| < \frac{1}{2} M(e^{2t} - 1)$ purchè sia $\varepsilon < \varepsilon_0, M(e^{6\pi} - 1) < 2a, 0 \leq t < 3\pi$.

Vedi testo citato in 1), p. 203.

7) Nel seguito intendiamo ovviamente considerare sempre e solo soluzioni del tipo 18₁), per valori di ε piccoli anche rispetto ad a e b .

Denotiamo con apici i valori a , $b \cos \varphi$, $b \sin \varphi$, b , φ , all'istante $2\pi + \varepsilon\tau$.

Dalle altre tre relazioni delle 7₁) sempre tenendo conto delle 18₁) e ponendo $a_0^2 = \frac{4\alpha}{3\gamma}$, $b_0^2 = \frac{4\beta}{3\delta}$, si ottiene

$$2_2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a' - a}{\varepsilon\pi} = \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) - m_1 b \sin \varphi + 0(\varepsilon) \\ \frac{(b \sin \varphi)' - b \sin \varphi}{\varepsilon\pi} = -m_1 \frac{b^2}{a} \cos \varphi + \beta b \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2}\right) \sin \varphi + \\ \quad + m_2 a + \varphi b \cos \varphi + 0(\varepsilon) \\ \frac{(b \cos \varphi)' - b \cos \varphi}{\varepsilon\pi} = m_1 \frac{b^2}{a} \cos \varphi \sin \varphi + \beta b \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2}\right) \cos \varphi - \\ \quad - \rho b \sin \varphi + 0(\varepsilon) \end{array} \right.$$

ovvero

$$3_2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a' - a}{\varepsilon\pi} = \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) - m_1 b \sin \varphi + 0(\varepsilon) \\ \frac{b' - b}{\varepsilon\pi} = \beta b \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2}\right) + m_2 a \sin \varphi + 0(\varepsilon) \\ \frac{\varphi' - \varphi}{\varepsilon\pi} = \cos \varphi \left(m_2 \frac{a}{b} - m_1 \frac{b}{a}\right) + \rho + 0(\varepsilon) \end{array} \right.$$

Se a , b , φ sono coordinate rettangolari, le 3₂) definiscono una trasformazione \mathcal{T} che porta il punto $P \equiv (a, b, \varphi)$ nel punto $P' \equiv (a', b', \varphi')$. Poichè i secondi membri delle 3₂) sono periodici di periodo 2π in φ , basta studiare la trasformazione nello strato $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, poichè essa si ripete identica in ogni strato $2n\pi \leq \varphi \leq 2(n+1)\pi$.

Si può senz'altro studiare qualche tipo di movimento stabile anche se non necessariamente periodico.

Cominciamo col caso $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$. Supponendo che m_1 ed m_2 siano sufficientemente piccoli, nel modo che sarà precisato nel seguito, si hanno moti stabili rispetto ad a ed a b , cioè moti che godono della proprietà che la relativa x non dif-

ferisce in modo notevole da una $a(t)$ sen t ove $a(t)$ è una funzione oscillante intorno al valore a_0 mentre y non differisce notevolmente da una $b(t)$ sen $(t + \varphi(t))$ ove $b(t)$ oscilla intorno al valore b_0 . Se m_1, m_2 sono ancora sufficientemente piccoli rispetto a ρ , la fase φ è crescente indefinitamente. Se invece ρ è sufficientemente piccolo rispetto ad m_1, m_2 , si hanno moti del tipo predetto per quanto riguarda a e b ma per i quali la fase φ è essa pure oscillante intorno ad un valore prossimo a $\frac{\pi}{2}$ o a $-\frac{\pi}{2}$.

Intanto è facile vedere che se l'accoppiamento è tanto lasco da aversi

$$4_2) \quad \frac{3}{2} m_1 b_0 = 2\alpha a_0^3 \frac{\sqrt{3}}{3} - A^2, \quad \frac{3}{2} m_2 a_0 = 2\beta b_0^3 \frac{\sqrt{3}}{3} - B^2,$$

allora, per $\epsilon < \epsilon_0(A^2, B^2)$ (con ϵ_0 tanto più piccolo quanto più piccoli sono A^2 e B^2 , certamente a e b soddisfano per ogni n alle

$$5_2) \quad a_0 \frac{\sqrt{3}}{3} < \mathcal{C}^n(a) < \frac{3}{2} a_0, \quad b_0 \frac{\sqrt{3}}{3} < \mathcal{C}^n(b) < \frac{3}{2} b_0$$

appena le stesse 5₂) risultano verificate per $n = 0$. Inoltre l'ampiezza della oscillazione di a e b intorno ad a_0 , rispettivamente ed a b_0 è tanto più piccola quanto più piccoli risultano A^2 e B^2 .

Siano infatti $a_0 - h_1, a_0 + h_2$ le due delle radici delle equazioni

$$6_2) \quad \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = \pm \frac{3}{2} m_1 b^0$$

che sono più prossime ad a_0 . Queste certamente soddisfano alle

$$7_2) \quad a_0 - h_1 > a_0 \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad a_0 + h_2 < \frac{3}{2} a_0.$$

Si ha senz'altro che: se $b < \frac{3}{2} b_0$ ed $a_0 - h_1 < a < a_0 + h_2$,

saranno certamente, almeno per $\varepsilon < \varepsilon_0$, soddisfatte le relazioni

$$8_2) \quad a - 3\varepsilon\pi m_1 b_0 \leq a' = a + \varepsilon\pi \left[\alpha a \left(\alpha - \frac{a^2}{a_0^2} \right) - m_1 b \operatorname{sen} \varphi \right] + \\ + \varepsilon O(\varepsilon) < a + 3\varepsilon\pi m_1 b_0.$$

Se invece $a_0 \frac{\sqrt{3}}{3} < a < a_0 - h_1$, è certamente $a' > a$, perchè per tali valori è $\alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \geq \frac{3}{2} m_1 b_0$. Analogamente quando $a_0 + h_2 < \frac{3}{2} a_0$ si ha $a' < a$, perchè ancora $\alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) < \frac{3}{2} m_1 b_0$.

Basta allora che sia $\varepsilon < \varepsilon_0$ con ε_0 tale che

$$9_2) \quad \begin{cases} 3\varepsilon_0 m_1 b_0 < a_0 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - h_1, \\ 3\varepsilon_0 m_1 b_0 < \frac{a_0}{2} - h_2, \end{cases}$$

perchè di conseguenza il trasformato a' di a , con a soddisfacente alle 5₂), ove si ponga $n = 0$, soddisfi alla prima delle stesse 5₂), almeno fino a quando b soddisfa alla $b_0 \frac{\sqrt{3}}{3} < b < \frac{3}{2} b_0$.

Analogamente denotiamo con $b_0 - k_1$, $b_0 + k_2$ le due delle quattro radici delle due equazioni

$$\beta b \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2} \right) = \pm \frac{3}{2} m_2 a_0,$$

che sono più prossime a b_0 .

Se $\varepsilon < \varepsilon_0$ con ε_0 tale che risultino soddisfatte le

$$10_2) \quad \begin{cases} 3\varepsilon_0 \pi m_2 a_0 < b_0 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - k_1 \\ 3\varepsilon_0 \pi m_2 \varphi_0 < \frac{1}{2} b_0 - k_2 \end{cases}$$

per condizioni iniziali soddisfacenti alle 5₂) per $n = 0$, il trasformato b' di b soddisfa alla seconda delle stesse 5₂) per ogni n .

Concludendo si può senz'altro asserire che per $\varepsilon < \varepsilon_0^*$ con ε_0^* tale da verificare simultaneamente 9₂) 10₂), la trasformata (a' b'), mediante le 3₂), della coppia (a , b), soddisfacente alla 5₂) per $n = 0$, soddisfa alla stessa per ogni n .

Per quanto riguarda la terza delle 3₂) sempre restando fisse le ipotesi 4₂) si possono distinguere due casi.

Se sono verificate le relazioni

$$11_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{27m_2a_0^2 - 4m_1b_0^2 + A'^2}{4a_0b_0}, \\ \rho = \frac{27m_1b_0^2 - 4m_2a_0^2 + B'^2}{4a_0b_0}, \end{array} \right.$$

certamente $\varphi' - \varphi$ risulta sempre positivo, (almeno per $\varepsilon < \varepsilon_0(A', B'^2)$) come si vede immediatamente dalla terza delle 3₂) qualora si tenga conto delle 4₂). In questo caso si hanno quindi, corrispondentemente a condizioni iniziali verificanti le 5₂), moti in cui la φ è sempre crescente.

Si supponga invece dapprima che sia

$$12_2) \quad m^2 \frac{a_0^2}{3} > \frac{9}{4} m_1 b_0^2 \quad \rho = \frac{2k}{a_0 b_0 \sqrt{3}} \left(m_2 \frac{a_0^2}{3} - \frac{9}{4} m_1 b_0^2 \right) \quad (0 \leq k < 1).$$

Si dimostra allora che per $\varepsilon < \varepsilon_0$ esiste un certo ψ_0 tale che per condizioni iniziali soddisfacenti, oltre che alle 5₂) anche alla

$$13_2) \quad \frac{\pi}{2} - \psi_0 < \mathcal{C}^n(\varphi) < \frac{\pi}{2} + \psi_0,$$

per $n = 0$, nel moto che ne consegue $\mathcal{C}^n(\varphi)$ continua a soddisfare alle 13₂) per ogni n .

Infatti scegliamo φ_0 in modo che risulti

$$14_2) \quad \psi_0 = \arcsen k + \vartheta_0 = \sigma + \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

ed ε_0 in modo che sia

$$\vartheta_0 \geq \frac{2\varepsilon_0\pi}{\sqrt{3}a_0b_0} \left[\frac{9}{4} a_0^2 - \frac{1}{3} m_1 b_0^2 + \rho \right].$$

Allora se è

$$\frac{\pi}{2} - \sigma < \varphi < \frac{\pi}{2} + \sigma,$$

il trasformato φ' soddisfa alla

$$\frac{\pi}{2} - \psi_0 < \varphi' < \frac{\pi}{2} + \psi_0.$$

Si supponga invece

$$\frac{\pi}{2} - \sigma - \vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \psi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2} - \sigma$$

sarà ora certamente $\varphi' > \varphi$, poichè risulta

$$15_2) \quad \cos \varphi \left(m_2 \frac{a}{b} - m_1 \frac{b}{a} \right) + \rho > 0;$$

mentre se $\frac{\pi}{2} + \sigma_0 < \varphi < \frac{\pi}{2} + \psi_0 = \frac{\pi}{2} + \sigma + \vartheta_0$ risulta di conseguenza $\varphi' < \varphi$ perchè allora sarà verificata la disuguaglianza contraria della 15₂).

Possiamo quindi concludere che se valgono le 12₂) esiste certamente un ε_0 tale che per $\varepsilon < \varepsilon_0$ la φ non può che oscillare, per opportune condizioni iniziali soddisfacenti a 13₂), intorno a $\frac{\pi}{2}$.

In modo analogo si ragiona qualora siano, anzichè le 12₂), verificate le

$$12_2') \quad m_1 \frac{b_0^2}{3} > \frac{9}{4} m_2 a_0^2, \quad \rho = \frac{2k}{a_0 b_0 \sqrt{3}} \left(m_1 \frac{b_0^2}{3} - \frac{1}{4} m_2 a_0^2 \right).$$

Nel caso $\beta < 0$, $\delta = 0$ (ovvero $\gamma = 0$, $\alpha < 0$) con analogo ragionamento si dimostra sotto ipotesi che assicurino che m_1 , m_2 siano sufficientemente piccoli, che, per opportune condizioni iniziali, il sistema si muove in modo che a oscilla intorno ad a_0 e b non si scosta da 0 di più di una certa quantità finita. Non si riesce in generale a dire nulla per quanto riguarda la φ .

3. Le soluzioni periodiche in prima approssimazione. —

Per determinare, con la solita approssimazione, le soluzioni periodiche basta risolvere il sistema che si ottiene annullando i secondi membri delle 3₁); ovvero

$$1_s) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) - m_1 b \operatorname{sen} \varphi = 0, \\ \beta b \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2}\right) - m_2 a \operatorname{sen} \varphi = 0, \\ \cos \varphi \left(m_2 \frac{a}{b} - m_1 \frac{b}{a}\right) + \rho = 0. \end{array} \right.$$

Eliminando la φ si ha il sistema in a e b

$$2_s) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 + \left[\alpha \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) + \beta \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2}\right) \right]^2 = \left(m_2 \frac{a}{b} - m_1 \frac{b}{a}\right)^2, \\ \frac{m_1}{\alpha} a^2 \left(1 - \frac{a}{a_0}\right) + \frac{m_2}{\beta} b^2 \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Poniamoci dapprima nel caso generale. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano $x = a^2$, $y = b^2$ ed il sistema polare associato r , ϑ . La seconda delle 2₃) rappresenta, per ogni scelta di a_0 , b_0 , un fascio di ellissi. E con i punti base nei quattro punti $(0, 0)$, $(a_0^2, 0)$, (a_0^2, b_0^2) , $(0, b_0^2)$. La prima delle 2₃) rappresenta un sistema ∞^6 di quartiche con un punto doppio fisso nell'origine. L'equazione polare delle quartiche è

$$3_s) \quad r = \left(\frac{\alpha}{a_0^2} \cos \vartheta - \frac{\beta}{b_0^2} \operatorname{sen} \vartheta \right)^{-1} \left\{ \alpha + \beta \mp \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} \vartheta \cos^{\frac{1}{2}} \vartheta \left[(m_1 \operatorname{sen} \vartheta - m_2 \cos \vartheta)^2 - \rho^2 m \vartheta \cos \vartheta \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Interessa studiare l'andamento delle 3_s) nel primo quadrante. Intanto la generica curva Γ è tutta interna agli angoli $(0, \theta_1)$, $(\theta_2, \frac{\pi}{2})$ ove θ_1 e θ_2 sono definiti dalla

$$4_s) \quad \operatorname{tg} \vartheta_{1,2} = \frac{1}{2m^2} \left\{ m_1 m_2 + \rho^2 \mp (\rho^4 + 4m_1 m_2 \rho)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Denoteremo nel seguito con r_1, r_2 le semirette uscenti dall'origine e contenute nel primo quadrante e formanti con l'asse x gli angoli θ_1, θ_2 . Le tangenti nell'origine a Γ sono distinte, e se denotiamo con θ'_1, θ'_2 le loro ascisse angolari, queste sono definite dalla

$$5_s) \quad \operatorname{tg} \vartheta'_{1,2} = \frac{1}{2m^2} \left\{ 2m_1m_2 + \rho^2 + (\alpha + \beta)^2 \mp (\rho^2 + (\alpha + \beta)^2)[\rho^2 + (\alpha + \beta)^2 + 4m_1m_2] \right\}.$$

Possiamo intanto concludere sull'esistenza di almeno due soluzioni reali e positive del sistema 2₃) nelle incognite $x = a^2, y = b^2$ poichè la curva Γ si spezza in due rami Γ_1, Γ_2 pas-

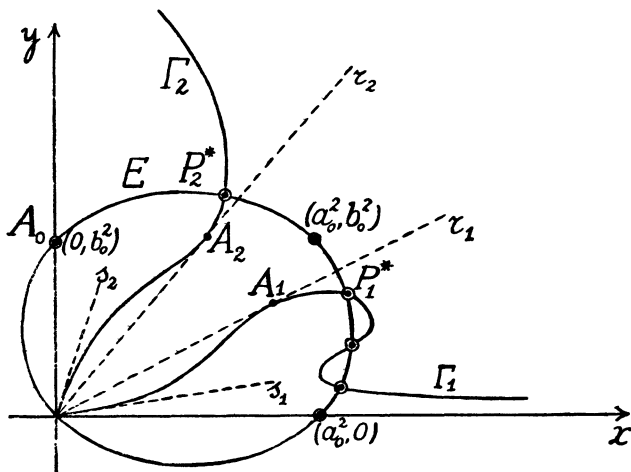


Fig. 3

santi per l'origine. Di questi due rami le parti contenute nel primo quadrante hanno l'andamento segnato in fig. 3. Il primo ramo Γ_1 esce dalla origine tangenzialmente alla retta s_1 , tocca la r_1 nel punto A_1 e tende per $\vartheta \rightarrow 0$ al punto improprio dell'asse x e quindi esso ha con l'ellisse E almeno un punto a comune P_1 . Analogamente il ramo Γ_2 esce dall'origine O tangenzialmente alla retta s_2 e dopo aver toccato la retta r_2 nel punto A_2 , tende per $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ al punto improprio

dell'asse y , onde Ω_2 avrà certamente un punto P_2 almeno a comune con E . Le soluzioni reali contenute nel primo quadrante possono essere per opportuni valori dei parametri. Tenendo conto del punto doppio nell'origine che è comune alle due curve, addirittura 6, sarebbe molto complicato se non proibitivo dare le condizioni alle quali devono soddisfare i parametri, applicando per es. il teorema di Sturm, affinché le soluzioni reali siano 2, 4, oppure 6. Noi perciò non lo faremo accontentandoci di mettere in evidenza tale eventualità. Invece cominciamo con l'osservare che dette x^* , y^* le coordinate di un generico punto P^* di intersezione delle due curve, a questo punto vengono a corrispondere soluzioni periodiche in prima approssimazione apparentemente distinte, ma in realtà coincidenti. Infatti i valori di a^* , b^* , φ^* corrispondenti a questo punto P^* sono dati da $a^* = \pm x^{*\frac{1}{2}}$, $b^* = \pm y^{*\frac{1}{2}}$, e φ^* è completamente individuato a meno di multipli insensibili di 2π delle 1_3). Se alle soluzioni $a = a^*$, $b = b^*$ corrisponde un valore $\varphi = \varphi^*$, alla soluzione $a = -a^*$, $b = -b^*$ comprende ancora il valore $\varphi = \varphi^*$; mentre alla soluzione $a = -a^*$, $b = +b^*$ ovvero $a = +a^*$, $b = -b^*$ corrisponde sempre il valore $\varphi = \varphi^* + \pi$. Inoltre i relativi periodi sono tutti coincidenti poichè tenendo presenti le 1_2) e le 1_3) basta osservare che quando cambia, solo di segno, il quoziente $\frac{a^*}{b^*}$ cambia, solo di segno, anche il $\cos \varphi^*$ ed il relativo valore $2\pi + \varepsilon\tau^*$, che dà il periodo approssimato della soluzione periodica, non muta.

Una notevole osservazione è la seguente. Se si considera il caso che sia nullo m_1 , è ben noto che l'equazione di Liénard a cui si riduce la prima delle due 2_1), ha una sola soluzione periodica stabile del tipo $x = a_0 \sin t$; così se si considera il caso che $m_2 = 0$ si ha una soluzione periodica per la seconda delle 2_1) del tipo $y = b_0 \sin t$. Chiameremo $S_1(S_2)$ il sistema ad un grado di libertà descritto dalle 2_1) $m_1 = 0$ ($m_2 = 0$). Poichè P^* è un punto di E è facile riconoscere che se $a^* > a_0$, $b^* < b_0$ e viceversa se $a^* < a_0$, $b^* > b_0$. Ciò esprime che se l'ampiezza di oscillazione della prima coordinata x supera l'ampiezza di oscillazione di S_1 , per la seconda coordinata succede il contrario e viceversa.

Un'altra osservazione di carattere generale si può fare al riguardo del periodo. Il periodo della soluzione periodica relativa a P^* è dato (vedi 1₂), 1₃) da

$$\begin{aligned} 6_2) \quad T &= 2\pi + \varepsilon\tau^* = \varepsilon\pi \left(1 - \frac{3m_1 b^*}{2 a^*} \cos \varphi^* \right) = \\ &= 2\pi \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \left(\rho + m_2 \frac{a^*}{b^*} \cos \varphi^* \right) \right\}. \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che S_1 ha periodo 2π ed S_2 ha periodo $2\pi \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \rho \right) + O(\varepsilon^2)$. Poichè per ipotesi m_1 ed m_2 sono positivi, osservato che il segno di $\frac{b^*}{a^*} \cos \varphi^*$ e quella di $\frac{a^*}{b^*} \cos \varphi^*$ sono uguali, da 6₃) discende che il periodo della soluzione periodica è più piccolo del minore, o più grande del maggiore dei due periodi a seconda che $m_1 \frac{b^*}{a^*} \cos \varphi \leq 0$.

Ora poichè da 1₃) si ha

$$7_2) \quad m_1 \frac{b^*}{a^*} \cos \varphi^* = \rho \frac{m_1 b^{*2}}{m_1 b^{*2} - m_2 a^{*2}},$$

tutto dipende dal segno di $m_1 b^{*2} - m_2 a^{*2}$. Si può vedere senz'altro che una delle due soluzioni rende positivo questo binomio (precisamente quella relativa all'intersezione di E con Γ_2), l'altra (quella relativa all'intersezione di E con Γ_1) lo rende negativo. Infatti la retta $m_1 y - m_2 x = 0$ è interna all'angolo (θ_1, θ_2) ⁹⁾.

4. Stabilità approssimata. — Premetto che nel seguito, quando parleremo di soluzioni periodiche e di stabilità, sarà sempre sottinteso che si tratta di soluzioni periodiche e di stabilità in prima approssimazione.

⁹⁾ Per quanto riguarda i periodi, una notevole limitazione è stata data dal prof. DARIO GRAFFI in una memoria in corso di pubblicazione presso l'Accademia delle Scienze di Bologna. Secondo questo criterio, gentilmente comunicatomi, il periodo delle oscillazioni non è superiore a

$$2\pi \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{4} \left[\rho + \left(\rho^2 + (m_1 + m_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

Ha essenziale interesse riconoscere se le soluzioni periodiche di cui nel numero precedente abbiamo riconosciuto l'esistenza sono stabili perchè solo allora esse hanno reale consistenza fisica e sono realizzabili praticamente.

Per studiare dunque la stabilità in prima approssimazione consideriamo una generica soluzione periodica corrispondenti ai valori $a = a^*$, $b = b^*$, $\varphi = \varphi^*$ e poniamo al solito

$$1_4) \quad \begin{cases} a = a^* + a_1, & b = b^* + b_1, & \varphi = \varphi^* + \varphi_1, \\ a' = a^* + a_1', & b' = b^* + b_1', & \varphi' = \varphi^* + \varphi_1'. \end{cases}$$

La 3₂) porge allora in conseguenza

$$2_4) \quad \begin{cases} a_1' - a_1 = \varepsilon\pi(a_{11}a_1 + a_{12}b_1 + a_{13}\varphi_1) + 0(\varepsilon^2) + 0[\varepsilon(|a_1| + |b_1| + |\varphi_1|)], \\ b_1' - b_1 = \varepsilon\pi(a_{21}a_1 + a_{22}b_1 + a_{23}\varphi_1) + 0(\varepsilon^2) + 0[\varepsilon(|a_1| + |b_1| + |\varphi_1|)], \\ \varphi_1' - \varphi_1 = \varepsilon\pi(a_{31}a_1 + a_{32}b_1 + a_{33}\varphi_1) + 0(\varepsilon^2) + 0[\varepsilon(|a_1| + |b_1| + |\varphi_1|)], \end{cases}$$

ove si è posto

$$3_4) \quad \begin{cases} a_{11} = \alpha \left(1 - \frac{3a^{*2}}{a_0^2}\right), & a_{12} = -m_1 \operatorname{sen} \varphi^*, & a_{13} = -m_1 b^* \cos \varphi^*, \\ a_{21} = m_2 \operatorname{sen} \varphi^*, & a_{22} = \beta \left(1 - \frac{3b^{*2}}{b_0^2}\right), & a_{23} = m_2 a^* \cos \varphi^*, \\ a_{31} = \frac{\cos \varphi^*}{a^* b^*} (m_2 a^{*2} + m_1 b^{*2}), & a_{32} = -\frac{\cos \varphi^*}{a^* b^*} (m_2 a^* + m_1 b^{*2}), \\ & & a_{33} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi^*}{a^* b^*} (m_2 a^{*2} - m_1 b^{*2}). \end{cases}$$

Perchè la generica soluzione considerata sia stabile occorre e basta che siano verificate le

$$4_4) \quad \Sigma_r a_{rr} < 0, \quad A < 0, \quad A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr} > 0.$$

Dato l'elevato numero di parametri una discussione generale delle 4₄) riesce molto complicata se non addirittura proi-

bitiva. Cominceremo quindi nel prossimo numero a considerare qualche caso particolare di notevole interesse e via via passeremo a casi sempre più generali fino a stabilire qualche risultato, interessante, anche se non completo, relativamente al caso generale.

5. Alcuni casi particolari.

I CASO: $\beta = 0$, $\delta = 0$.

Il sistema 1₃) assume ora la forma

$$1_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) - m_1 b \operatorname{sen} \varphi = 0, \\ m_2 a \operatorname{sen} \varphi = 0, \\ \rho + \left(m_2 \frac{a}{b} - m_1 \frac{b}{a} \right) \cos \varphi = 0. \end{array} \right.$$

Le soluzioni significative di questo sistema sono

$$2_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \varphi^* = 0, \quad a^* = a_0, \quad b^* = \cos \varphi^* a_0 \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4m_1 m_2}}{2m_1}, \\ \varphi^* = < \frac{0}{\pi}, \quad T = 2\pi \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{4} (\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4m_1 m_2}) \right\}. \end{array} \right. \quad *)$$

Si hanno due soluzioni distinte perchè le quattro soluzioni 2₃) sono poi sostanzialmente equivalenti a due sole. *Esse sono ambedue stabili.* Infatti in corrispondenza alle 2₃) le 3₄) diventano

$$3_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = -2\alpha, \quad a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{33} = 0, \quad a_{13} = -m_1 b^* \cos \varphi^* \\ a_{23} = m_2 a_0 \cos \varphi^*, \quad a_{31} = \frac{\cos \varphi^*}{a_0^2 b^*} (m_2 a_0^2 + m_1 b^{*2}), \\ a_{32} = -\frac{1}{a_0 b^{*2}} (m_2 a_0^2 + m_1 b^{*2}), \end{array} \right.$$

*) Il periodo è in accordo con la disuguaglianza stabilità dal professor GRAFFI di cui è stato detto nella nota *).

ed in conseguenza le 4.) porgono come condizioni di stabilità le

$$4_s) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_r a_{rr} = -2\alpha < 0 \\ A = -2m_2 \frac{\cos^2 \varphi^*}{b^{*2}} \alpha (m_2 a_0^2 + m_1 b^{*2}) > 0 \\ A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr} = \frac{2\alpha m_1}{a_0^2} (m_2 a_0^2 + m_1 b^{*2}) \cos^2 \varphi^* > 0 \end{array} \right.$$

che sono sempre verificate, attese le condizioni imposte sui coefficienti.

II CASO: $\frac{1}{b_0^2} = 0$, $\rho = 0$, $\beta = -B < 0$.

Il sistema 1.) assume la forma

$$5_s) \left\{ \begin{array}{l} \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) - m_1 b \operatorname{sen} \varphi = 0, \\ -Bb + m_2 a \operatorname{sen} \varphi = 0, \\ \left(m_2 \frac{a}{b} - m_1 \frac{b}{a}\right) \cos \varphi = 0. \end{array} \right.$$

Le soluzioni sono

$$s_1) \cos \varphi^* = 0, \quad a^{*2} = a_0^2 \left(1 - \frac{m_1 m_2}{B\alpha}\right), \quad b^* = \frac{m_2}{B} a^* \operatorname{sen} \varphi^*,$$

$$\varphi^* = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \tau = 0,$$

$$s_2) \operatorname{sen}^2 \varphi^* = \frac{B^2}{m_1 m_2}, \quad a^{*2} = a_0^2 \frac{\alpha - B}{\alpha}, \quad b^* = \frac{m_2}{B} a^* \operatorname{sen} \varphi^*,$$

$$T = 2\pi \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{m_1 m_2 - B^2}\right). \quad ^{10)}$$

¹⁰⁾ Anche qui si può ripetere l'osservazione fatta in nota ⁹⁾.

Per la stabilità di s_1 si deve avere

$$6_s) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_r a_{rr} = -2(\alpha + B) + \frac{4m_1 m_2}{B} < 0 \\ A = \left(-B + \frac{m_1 m_2}{B}\right) 2\alpha B - 2m_1 m_2 < 0 \\ A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr} = 2\left(\alpha + B - \frac{2m_1 m_2}{B}\right) \left\{ 4\alpha B - 6m_1 m_2 + B - \right. \\ \left. - \frac{2\alpha m_1 m_2}{B} + \frac{3m_1^2 m_2^2}{B^2} \right\} + \left(-B + \frac{m_1 m_2}{B}\right) (2\alpha B - 2m_1 m_2) > 0. \end{array} \right.$$

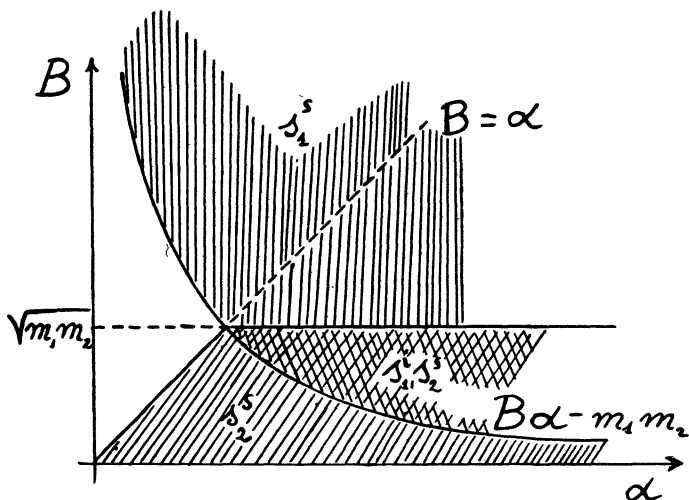


Fig. 4

Si noti ora che la terza espressione può anche scriversi, posto per un momento $u = \alpha B$, $v = B^2$, $z = m_1 m_2$,

$$A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr} = \frac{2}{B^3} ((u - z) + (v - z)) \{ (v - z)^2 + 2v(u - z) + 2(u - z)v - z \} - \frac{2}{B^3} v(u - z)(v - z) > 0$$

condizione che è certamente soddisfatta se $u > z$, $v > z$.

Quindi concludendo se $\alpha B > m_1 m_2$, s_1 esiste, essa è stabile se inoltre $B^2 > m_1 m_2$.

Per quanto riguarda s_2 si ha invece

$$7_5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_r a_{rr} = -2\alpha < 0, \\ A = -4m_1m_2 \cos^2 \varphi^* < 0, \\ A - \sum_r a_{rr} \sum_r A_{rr} = 4\alpha(\alpha B + m_1m_2 \cos \varphi^*) > 0. \end{array} \right.$$

Qui possiamo concludere dicendo che se s_2 esiste essa è certamente stabile e ciò succede se $B^2 < m_1m_2$, $B < \alpha$.

Possiamo rappresentare le varie eventualità graficamente come è fatto in fig. 4, dove abbiamo, per esempio, indicato con s_1^s la prima soluzione s_1 quando è stabile.

III caso: $\frac{1}{b_0^2} = 0$, $\beta = -B < 0$ ¹¹⁾.

Il sistema 1₃) diventa

$$8_5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) - m_1 b \sin \varphi = 0 \\ -Bb + m_2 a \sin \varphi = 0 \\ \rho + \left(m_2 \frac{a}{b} - m_1 \frac{b}{a}\right) \cos \varphi = 0 \end{array} \right.$$

Si ha senz'altro

$$9_5) \quad b^* = m_2 \frac{a^*}{B} \sin \varphi^*, \quad a^{*2} = a_0^2 \left(1 - \frac{m_1 m_2}{\alpha B} \sin^2 \varphi^*\right)$$

ove φ^* è soluzione della equazione cubica in $\text{tg } \varphi^*$

$$10_5) \quad B(\rho \text{tg } \varphi^* + B) (\text{tg}^2 \varphi^* + 1) = -m_1 m_2 \text{tg}^2 \varphi^*,$$

ed è da tener presente che tale φ^* deve ancora soddisfare alla

$$11_5) \quad \rho \text{tg } \varphi^* + B < \alpha,$$

come risulta dalla seconda delle 9₅).

L'equazione cubica 10₅) in $\text{tg } \varphi^*$ ha sempre una soluzione rea-

¹¹⁾ È da notare che nel seguito quando parleremo di relazioni tra i parametri, nel loro confronto e nel confronto con a^* , b^* resterà sempre sottinteso che essi non devono diventare paragonabili con ϵ nel qual caso la discussione almeno in generale cade ovviamente in difetto.

le, ne ammette poi 3 se ρ è sufficientemente piccolo e se inoltre si ha

$$12_5) \quad B^2 < m_1 m_2.$$

Si potrebbero trovare le condizioni atte ad assicurare che l'equazione cubica 10₅) ammetta 1, 2, o 3 soluzioni soddisfacenti alla condizione 11₅) ma non mi pare sia il caso di addentrarci in calcoli se non impossibili certamente laboriosissimi.

Consideriamo, per avere un'idea geometrica della dipen-

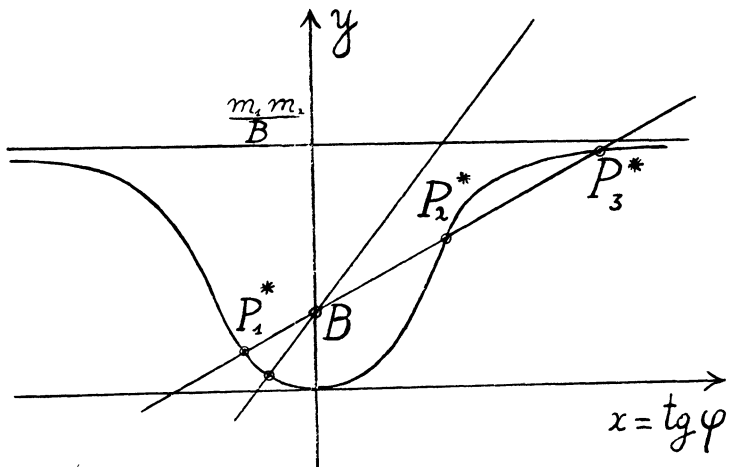


Fig. 5

denza delle soluzioni dei parametri, in un piano cartesiano ($x = \text{tg } \varphi$, y) la cubica (fig. 5)

$$13_5) \quad y = \frac{m_1 m_2}{B} \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Le soluzioni φ^* si ottengono dalle intersezioni della cubica 13₅) con la retta $r \equiv (y = \rho x + B)$.

Poichè nè la retta r , nè la cubica 13₅) dipendono dal parametro α , per valori di α sufficientemente piccoli rispetto a B , ρ ed $m_1 m_2$, le soluzioni di 10₅) non soddisfano certamente alle 11₅) e quindi il sistema non ha soluzioni approssimativamente periodiche. Siamo nel caso che il sistema dissipa più energia nella seconda coordinata di quanta non ne rientri nella prima.

Vediamo ora cosa si può dire al riguardo della stabilità. In corrispondenza alle soluzioni di 8₅) si ha:

$$A = \begin{vmatrix} -2\alpha + \frac{3m_1m_2}{B} \text{sen}^2 \varphi^* & -m_1 \text{sen} \varphi^* & -m_1 b^* \cos \varphi^* \\ m_2 \text{sen} \varphi^* & -B & m_2 a^* \cos \varphi^* \\ \left(\frac{m_2}{b^*} + \frac{m_1 b^*}{a^{*2}}\right) \cos \varphi^*, & -\left(m_2 \frac{a^*}{b^{*2}} + \frac{m_1}{a^*}\right) \cos \varphi^*, & -B + \frac{m_1m_2}{B} \text{sen}^2 \varphi^* \end{vmatrix}$$

Perciò si hanno come condizioni di stabilità le seguenti:

$$14_8) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_r a_{rr} = -2(\alpha + B) + 4 \frac{m_1m_2}{B} \text{sen}^2 \varphi^* < 0, \\ A = 2m_1m_2(\alpha + B) - 2m_1m_2 \left(2\alpha - \frac{m_1m_2}{B}\right) \text{sen}^2 \varphi^* - 2\alpha B^2 - \\ \quad - 4 \frac{m_1^2m_2^2}{B} \text{sen}^4 \varphi^* < 0. \\ A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr} = 8\alpha B(\alpha + B) + 2m_1m_2(3\alpha + B) - \\ \quad - 4m_1m_2 \text{sen}^2 \varphi^* \left\{ 10\alpha + 4B + \frac{\alpha^2}{B} - m_1m_2 \frac{\alpha}{B^2} + \frac{m_1m_2}{B} \right\} + \\ \quad + \text{sen}^4 \varphi^* \frac{m_1^2m_2^2}{B} \left(8 + \frac{3\alpha}{B} - \frac{m_1m_2}{B^2} \right) + \frac{2B^3}{\text{sen}^2 \varphi^*} - \\ \quad - \frac{4m_1^3m_2^3}{B_3} \text{sen}^6 \varphi^* \geq 0. \end{array} \right.$$

In base a queste relazioni possiamo subito trarre qualche conclusione di carattere generale, anche se una discussione generale è certamente malagevole per l'elevato numero dei parametri essenziali.

Si possono dare parecchie eventualità. Faremo vedere che *si possono avere o nessuna soluzione periodica, o una soluzione periodica stabile, o tre soluzioni periodiche tutte e tre stabili.*

Non si ha nessuna soluzione periodica se è,

$$15_5) \quad B > \alpha, \quad \alpha B(\alpha^2 + B^2) - \alpha^2 B^2 - m_1 m_2 (\alpha - B)^2 + B \rho^2 \alpha < 0$$

come si riconosce agevolmente dalle 10₅) e 11₅). Le 15₅) sono certamente soddisfatte se α è, come dicevamo più sopra, sufficientemente piccolo rispetto agli altri parametri.

Si ha una soluzione periodica stabile se è

$$16_5) \quad \alpha > B, \quad \frac{\alpha B}{4} > m_1 m_2, \quad \frac{B^2}{8} > m_1 m_2.$$

Infatti in questo caso l'unica soluzione reale $\operatorname{tg} \varphi^*$ della 10₅) è negativa e soddisfa certamente alle 11₅), inoltre le 14₅) risultano ovviamente soddisfatte come si prova con semplici osservazioni.

Il periodo di questa soluzione periodica stabile è

$$17_5) \quad T = 2\pi \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{m_1 b^*}{a^*} \cos \varphi^* \right) = 2\pi \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{m_1 m_2}{B} \operatorname{tg} \varphi^* \right).$$

Da ultimo facciamo vedere che quando i parametri soddisfano a certe condizioni si hanno addirittura 3 soluzioni periodiche stabili.

Infatti supponiamo dapprima che valgano le disuguaglianze

$$18_5) \quad B^2 < m_1 m_2 < \alpha B.$$

Allora poichè $B^2 < m_1 m_2$ se ρ è sufficientemente piccolo la 10₅) ha 3 soluzioni reali (come si riconosce da fig. 5 quando si tenga conto che ρ è il coefficiente angolare di r); inoltre siccome $m_1 m_2 < \alpha B$, a queste 3 soluzioni corrispondono 3 soluzioni periodiche, come si vede dalla terza nelle 9₅).

Vogliamo ora provare che per α sufficientemente elevato queste 3 soluzioni periodiche sono stabili.

Infatti osserviamo che il coefficiente di α nelle $\Sigma_r a_r$ è -2 , che nella espressione $A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr}$ il coefficiente di α^2 è $8B - 4m_1 m_2 / B$ e che questo è positivo se $2B^2 > m_1 m_2$. Quindi poichè $\operatorname{sen}^2 \varphi^*$ non dipende da α resta dimostrato che

per α sufficientemente elevato risultano soddisfatte la prima e la terza delle 14₅).

Per quanto riguarda la seconda delle stesse occorre fare un ragionamento meno semplice. Si supponga dapprima che $\text{sen}^2 \varphi^* < \frac{1}{2}$ allora dalla seconda delle 14₅) risulta

$$A < 2 m_1 m_2 (\alpha + B) - 4 \alpha B$$

ed il secondo membro di queste disuguaglianze può essere reso negativo per α sufficientemente elevato qualora sia $2B^2 > m_1 m_2$ come è già stato supposto. Se invece è $\text{sen}^2 \varphi^* > \frac{1}{2}$ allora

$$A < 2m_1 m_2 (\alpha + B) - m_1 m_2 \left(2\alpha - \frac{m_1 m_2}{B} \right) - 2\alpha B^2 - \frac{m_1^2 m_2^2}{B}$$

ed il coefficiente di α nel secondo membro di quest'ultima espressione risulta $-2B^2$. Possiamo concludere che, in ogni caso, per α sufficientemente elevato anche la seconda delle 14₅) risulta soddisfatta.

In definitiva se *oltre alle 18₅) è soddisfatta la*

$$19_5) \quad 2B^2 > m_1 m_2$$

ρ è sufficientemente piccolo ed α è sufficientemente elevato, si hanno 3 soluzioni periodiche stabili.

IV. CASO: $\rho = 0$.

Il sistema 1₃) diventa

$$20_5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) - m_1 b \text{sen } \varphi = 0, \\ \beta b \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2} \right) + m_2 a \text{sen } \varphi = 0, \\ \left(m_2 \frac{a}{b} - m_1 \frac{b}{a} \right) \cos \varphi = 0. \end{array} \right.$$

Anche in questo caso le molteplicità dei parametri essenziali non permette una discussione completa. Faremo vedere,

anche qui, *la possibilità che il sistema sia privo di soluzioni periodiche* (caso di instabilità o risonanza) *o come possa avere 2 soluzioni periodiche stabili o addirittura 6.*

Alla terza delle 20_s) si può soddisfare ponendo $\cos \varphi^* = 0$. Si troveranno allora le soluzioni di periodo 2π . Esse corrispondono alle intersezioni reali delle due cubiche del piano (a, b) .

$$21_s) \quad \begin{cases} \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{b_0^2}\right) - m_1 b = 0 \\ \beta b \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2}\right) + m_2 a = 0. \end{cases}$$

che si ottengono dalle 20_s) ponendo $\sin \varphi^* = 1$. Le soluzioni corrispondenti al valore -1 di $\sin \varphi^*$ non differiscono da queste, come abbiamo osservato per il caso generale.

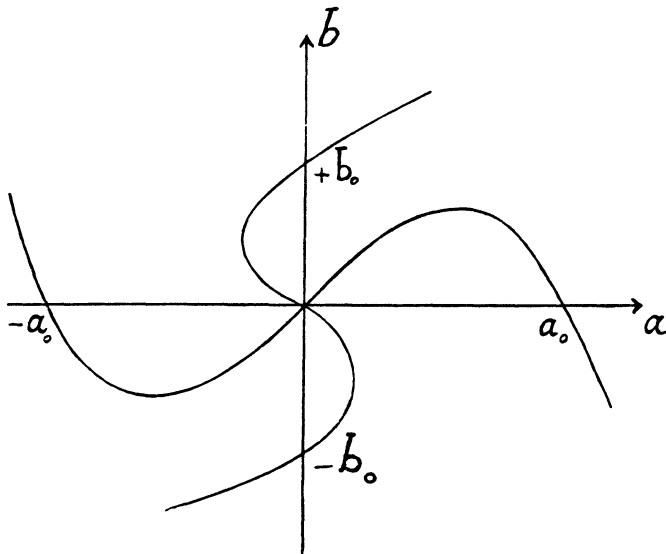


Fig. 6

Le due cubiche 21_s) possono non avere intersezioni reali fuori dell'origine: è il caso (vedi fig. 6) in cui per esempio siano soddisfatte le condizioni

$$22_s) \quad \frac{2B}{3\sqrt{3}m_2} < \frac{a_0}{b_0} < \frac{3\sqrt{3}m_1}{2\alpha}$$

e quindi anche necessariamente

$$23_s) \quad \alpha B < \frac{27}{4} m_1 m_2$$

Aggiungendo alle condizioni 22_s), 23_s) anche qualche altra limitazione per i parametri possiamo dimostrare che può darsi che il sistema non oscilli punto, ovvero che abbia due soluzioni periodiche stabili di uguale ampiezza ma di diverso periodo.

Infatti si può soddisfare la terza delle 20_s) oltre che ponendo $\cos \varphi^* = 0$, anche ponendo

$$24_s) \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{m_1}{m_2}$$

e quindi dalle prime due si ottiene

$$25_s) \quad a^{*2} = \frac{m_1(\alpha + \beta)a_0^2 b_0^2}{\alpha m_1 b_0^2 + \beta m_2 a_0^2}, \quad b^{*2} = \frac{m_2(\alpha + \beta)a_0^2 b_0^2}{\alpha m_1 b_0^2 + \beta m_2 a_0^2},$$

$$\text{sen}^2 \varphi^* = \frac{\alpha^2 \beta^2}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1 b_0^2 - m_1 a_0^2}{m_1 b_0^2 + m_2 a_0^2} \right)^2.$$

Osservando l'ultima di queste si vede che, perchè esse diano soluzioni reali, occorre e basta che sia verificato qualcuno di questi gruppi di disuguaglianze

$$26_s^{I)} \quad \alpha > \sqrt{m_1 m_2}, \quad \beta > \sqrt{m_1 m_2}, \quad \frac{m_1 \alpha \beta - \sqrt{m_1 m_2}}{m_2 \beta \alpha - \sqrt{m_1 m_2}} < \frac{a_0^2}{b_0^2} < \frac{m_1 \alpha \beta + \sqrt{m_1 m_2}}{m_2 \beta \alpha - \sqrt{m_1 m_2}},$$

$$26_s^{II)} \quad \alpha > \sqrt{m_1 m_2}, \quad \beta < \sqrt{m_1 m_2}, \quad \frac{a_0^2}{b_0^2} < \frac{m_1 \alpha \beta + \sqrt{m_1 m_2}}{m_2 \beta \alpha - \sqrt{m_1 m_2}},$$

$$26_s^{III)} \quad \alpha < \sqrt{m_1 m_2}, \quad \beta > \sqrt{m_1 m_2}, \quad \frac{m_1 \alpha \beta - \sqrt{m_1 m_2}}{m_2 \beta \alpha + \sqrt{m_1 m_2}} < \frac{a_0^2}{b_0^2},$$

$$26_s^{IV)} \quad \alpha < \sqrt{m_1 m_2}, \quad \beta < \sqrt{m_1 m_2}.$$

Se sono verificate le 22₅), 23₅), ma nessuna delle 26₅), il sistema non oscilla. Se invece è soddisfatta qualcuna delle 26₅) il sistema ha due soluzioni periodiche corrispondenti agli stessi valori di a e b ma a diversi valori del periodo che vale

$$27_5) \quad T = 2\pi \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2} (m_1 m_2)^{\frac{1}{2}} \right) \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1 b_0^2 - m_2 a_0^2}{\alpha m_1 b_0^2 + \beta m_2 b_0^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

a seconda che si scelga $\cos \varphi \geq 0$.

Anche la discussione sulla stabilità riesce malagevole, sebbene invece sia facile trovare qualche condizione sufficiente.

In corrispondenza alle soluzioni periodiche 25₅), per la stabilità si richiede che sia

$$28_5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_r a_{rr} = -2(\alpha + \beta) < 0, \\ A = -4m_1 m_2 \cos^2 \varphi^* (\alpha + \beta) < 0, \\ A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr} = 2(\alpha + \beta) \left\{ \alpha \beta \left(1 - 3 \frac{a^{*2}}{a_0^2} \right) \left(1 - 3 \frac{b^{*2}}{a_0^2} \right) + \right. \\ \left. + m_1 m_2 (2 - \sin^2 \varphi^*) \right\} > 0. \end{array} \right.$$

Le prime due sono certamente soddisfatte. Non resta quindi che vedere quando è soddisfatta anche la terza compatibilmente con qualcuna delle 26₅) e, se si vuole che non vi siano altre soluzioni periodiche, compatibilmente con le 22₅), 23₅).

Ora la terza delle 28₅) è certamente soddisfatta se

$$\frac{\alpha \beta}{m_1 m_2} \left(1 - 3 \frac{a^{*2}}{a_0^2} \right) \left(1 - 3 \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right) > -1,$$

e questa è certamente verificata se, per esempio, è $a^{*2} > \frac{a_0^2}{3}$, $b^{*2} > \frac{b_0^2}{3}$ e quindi, tenute presenti le 25₅), se è

$$29_5) \quad \frac{m_2}{m_1} \frac{\beta}{2\alpha + 3\beta} < \frac{b_0^2}{a_0^2} < \frac{m_2}{m_1} \frac{2\beta + 3\alpha}{\alpha}.$$

Supponiamo ora che non siano soddisfatte le 22_s), 23_s); il sistema allora può avere altre soluzioni periodiche. Per esempio altre 2, nel caso di fig. 7, ed altre 4 nel caso di fig. 8.

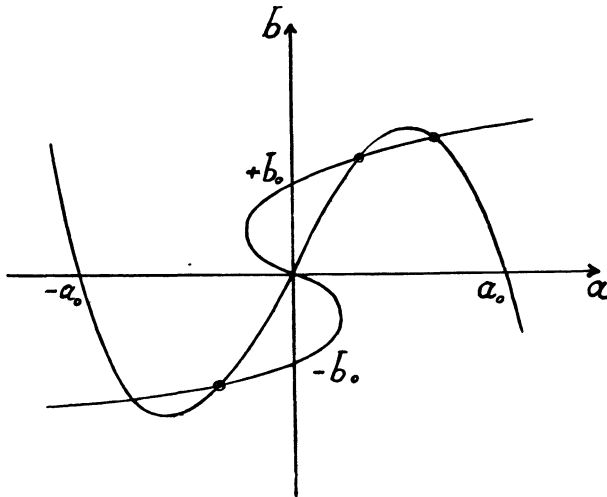


Fig. 7

Per discutere la stabilità di queste soluzioni si osservi che, in tal caso, si ha

$$A = \begin{vmatrix} \alpha \left(1 - 3 \frac{a^{*2}}{a_0^2}\right) & -m_1 \text{sen } \varphi^* & 0 \\ m_1 \text{sen } \varphi_* & \beta \left(1 - 3 \frac{b^*}{b_0^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \left(1 \frac{a^{*2}}{a_0^2}\right) + \beta \left(1 - \frac{b^{*2}}{a_0^2}\right) \end{vmatrix}$$

e che quindi, intanto, perchè tali soluzioni siano stabili occorre che sia

$$30_s) \quad \alpha + \beta < 2 \left(\alpha \frac{a^{*2}}{a_0^2} + \beta \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right).$$

Se il prodotto $m_1 m_2$ è sufficientemente piccolo allora le condizioni necessarie e sufficienti affinché le soluzioni siano sta-

bili sono, oltre alla 30_s), le

$$31_s) \quad a^{*2} > \frac{a_0^2}{3}, \quad b^{*2} > \frac{b_0^2}{3}.$$

La 30_s) esprime che il punto (a^*, b^*) deve essere esterno all'ellisse

$$32_s) \quad \frac{a^2}{\frac{a_0^2}{2} \frac{\alpha + \beta}{\alpha}} + \frac{b^2}{\frac{b_0^2}{2} \frac{\alpha + \beta}{\beta}} = 1.$$

Se m_2 è tanto piccolo rispetto ad m_1 , allora ricadiamo in un particolare caso di oscillazioni forzate in un grado di libertà, come sarà precisato sul seguito. Se invece sono piccoli sia

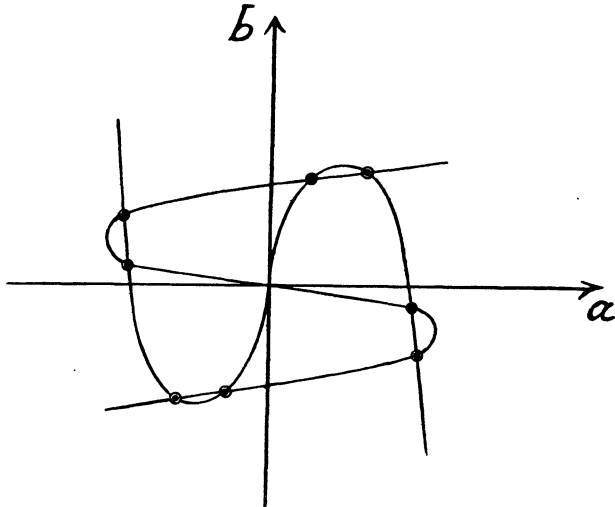


Fig. 8

m_1 che m_2 le eventuali soluzioni del sistema 21_s) sono molto prossime ai punti $(0, b)$, $(a_0 b_0)$, $(a_0, 0)$. Di queste (l'unica che soddisfa alle 31_s) è certamente la seconda la quale soddisfa anche alle 30_s), perchè il punto (a_0, b_0) è certamente esterno all'ellisse 32_s).

Poichè per m_1, m_2 sufficientemente piccoli nessuna delle 26_s) risulta soddisfatta resta provato che *per m_1, m_2 sufficiente-*

mente piccoli si ha una unica soluzione periodica stabile di periodo 2π e di ampiezza a^* , b^* rispettivamente prossimi ad a_0 , b_0 .

6. Qualche considerazione sul caso generale. — Ritornando al caso generale cominciamo a supporre che m_1 sia molto piccolo. Se $m_1 = 0$ ricadiamo (come già osservato più sopra) nel caso, già tanto approfondito, delle oscillazioni non lineari forzate in un grado di libertà ¹²⁾. Il sistema S_1 oscilla autonomamente e forza S_2 senza risentirne. Richiamo qui brevemente i risultati noti, relativi a questo tipo di oscillazioni forzate, che interessano per una discussione del caso generale.

Per $m_1 = 0$ si ha la soluzione $a^* = a_0$ e b^* , φ^* soddisfacenti al sistema

$$1_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta b^* \left(1 - \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right) + m_2 a \operatorname{sen} \varphi^* = 0 \\ \rho + m_2 \frac{a_0}{b^*} \cos \varphi^* = 0 \end{array} \right.$$

ovvero $\cos \varphi^* = -\rho \frac{b^*}{m_2 a_0}$ ove b^* è soluzione dell'equazione (cubica in b^2)

$$2_0) \quad \frac{b^2}{b_0^2} \left(1 - \frac{b^2}{b_0^2} \right) + \rho \frac{b}{\beta^2 b_0^2} = \frac{m_2^2 a_0^2}{m_1^2 a_0^2}.$$

Per la stabilità di queste soluzioni occorre e basta che sia

$$3_0) \quad \left(1 - 3 \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right) \left(1 - \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right) + \frac{\rho^2}{\beta^2} > 0, \quad 1 - 2 \frac{b^{*2}}{b_0^2} < 0.$$

E' noto che di soluzioni periodiche in questo caso se ne possono avere 1, 2 (caso limite), o 3 e che una sola eventualmente è stabile, potendo presentarsi il caso che nessuna sia stabile ed allora si hanno oscillazioni di combinazione.

¹²⁾ Confronta per esempio loco citato in 2).

Supponiamo $m_1 \rightarrow 0$. In tale eventualità dei due rami Γ_1 , Γ_2 di cui è composta la quartica (seconda delle 2₁) nel primo quadrante (vedi fig. 3), Γ_2 è contenuta in un angolo $(\theta_2, \frac{\pi}{2})$ sempre più piccolo mentre l'angolo $(0, \theta_1)$ che contiene Γ_1 tende all'angolo $(0, \theta^*_1)$ ove $\text{tg } \theta^*_1 = \frac{m_2}{\rho^2}$.

L'ellisse E invece, fissi restando gli altri coefficienti, tende per $m_1 \rightarrow 0$ a spezzarsi nelle 2 rette $x = 0$, $x = a^*_0$. Le soluzioni che danno origine, per $m_1 \rightarrow 0$, alle soluzioni del sistema 1₁) sono proprio quelle relative all'intersezione di Γ_1 con l'ellisse E . Le altre soluzioni, che possono essere 1, 2, o 3, corrispondenti alle intersezioni del secondo ramo Γ_2 , sono certamente instabili se m_1 è sufficientemente piccolo e se $\alpha < 4\beta$.

Infatti si consideri la tangente all'ellisse E nel punto $A_0 = (0, b^*_0)$. La sua equazione è

$$y = b^*_0 + \frac{\alpha m_2}{2\beta m_1} x.$$

La retta r^2 d'altra parte è di equazione

$$y = \frac{x}{2m_1} \left[2m_1 m_2 + \rho^2 + \rho(\rho^2 + 4m_1 m_2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

L'intersezione P_0 di queste due rette ha ordinata y_0 soddisfacente alla

$$\lim_{m_1 \rightarrow 0} y_0 = \frac{b^*_0}{1 - \frac{\alpha}{4\beta}} = \bar{y}_0.$$

Supponiamo ora $\alpha < 4\beta$ e denotiamo con \bar{P}_0 il punto di coordinate $(0, \bar{y}_0)$. Consideriamo le soluzioni del sistema 1₁) che sono contenute in quell'arco dell'ellisse E che ha per estremi $A_0 P_0$, soluzioni il cui punto rappresentativo tende certamente per $m_1 \rightarrow 0$ ad un punto del segmento $A_0 \bar{P}_0$.

Si osservi ora che per $m_1 \rightarrow 0$ anche $\alpha^* \rightarrow 0$ e che si ha perciò da 3₄)

$$4_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow 0} \Sigma_r A_{rr} = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + \rho^2, \\ \lim_{m \rightarrow 0} A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{22}\rho^2 \end{array} \right.$$

come si riconosce con facili calcoli.

Poichè per qualunque valore di ρ è sempre $\lim_{m_1 \rightarrow 0} a^* = 0$, per ρ sufficientemente piccolo i segni delle tre espressioni 4_a) coincidono con quelli delle espressioni $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{22}a_{33} - (a_{11} + a_{22} + a_{33})(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33})$.

Ma allora perchè siano verificati 4_a) occorre e basta che sia $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0$ e queste manifestamente non sono verificate dalle soluzioni in discorso perchè è $a_{22} > 0$ per $a^* < a_0 \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Queste soluzioni quindi non sono stabili in accordo col fatto che allora c'è almeno una soluzione stabile in corrispondenza all'intersezione con E dell'altro ramo Γ_1 della quartica.

Per ρ sufficientemente elevato i segni delle tre espressioni 4_a) coincidono con quelli di $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $a_{22}\rho^2$, $-(a_{11} + a_{22})\rho^2$, onde per la stabilità è richiesto che sia

$$5_a) \quad a_{22} < 0, \quad a_{11} + a_{22} < 0, \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} < 0.$$

All'uopo basta che sia β sufficientemente elevato rispetto ad α . Infatti si ha allora

$$a_{22} = \beta \left(1 - 3 \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right) < 0, \quad a_{11} + a_{22} = \alpha \left(1 - 3 \frac{a^{*2}}{a_0^2} \right) + \beta \left(1 - 3 \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right) < 0,$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2\alpha \left(1 - 2 \frac{a^{*2}}{a_0^2} \right) + 2\beta \left(1 - 2 \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right) < 0,$$

come si riconosce pensando che $a^* \rightarrow 0$ e $b^* \rightarrow b_0^* > b_0$ per $m_1 \rightarrow 0$ e supponendo β sufficientemente elevato rispetto ad α . Ciò prova che nel caso che ρ sia molto elevato mentre le soluzioni relative alle intersezioni di Γ_1 con E diventano instabili se ne ha qualcuna di stabile in corrispondenza all'intersezione di Γ_1 con E , soluzioni relativamente alle quali a^* è piccolo.

Consideriamo per ultimo il caso che m_1 ed m_2 tendano ambedue a zero ma in maniera che il loro rapporto tenda ad un numero finito K e non nullo. Porremo $m_2 = Km_1$ e quindi per $m_1 \rightarrow 0$ anche $m_2 \rightarrow 0$. Allora $\theta_1 \rightarrow 0$ e $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, come si riconosce con semplici passaggi al limite, ed i due rami Γ_1 e Γ_2 si schiacciano rispettivamente contro gli assi x ed y poichè le rette r_1, r_2 tendono anch'esse rispettivamente all'asse x ed y .

Possiamo anche qui, con considerazioni analoghe a quelle fatte più sopra, stabilire le proprietà che seguono.

Per ρ piccolo rispetto ad α e β ma grande rispetto ad m_1, m_2 non si hanno soluzioni stabili. Infatti si vede allora che nessuna delle due relazioni

$$\alpha \left(1 - 3 \frac{a^{*2}}{a_0^2} \right) < 0, \quad \beta \left(1 - 3 \frac{b^{*2}}{b_0^2} \right) < 0,$$

è soddisfatta.

Se ρ è poi sufficientemente elevato rispetto ad α e β allora: se $\alpha(\beta)$ è sufficientemente elevato rispetto a $\beta(\alpha)$, è stabile una soluzione periodica, corrispondente all'intersezione di E con $\Gamma_1(\Gamma_2)$.