Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Federico Cafiero

Sull’inversione dell’ordine d’integrazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 58-63
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__58_0>

SULL'INVERSIONE DELL'ORDINE D'INTEGRAZIONE

Nota (*) *di* FEDERICO CAFIERO (*a Napoli*)

Sia $f(x, y)$ sommabile nel rettangolo $R = I_1 \times I_2$ [1]), dove:

$$I_1 : a \leq x \leq b, \quad I_2 : c \leq y \leq d.$$

Per un classico teorema di FUBINI [2]), $f(x, y)$ risulta allora sommabile rispetto alle variabili separatamente [3]) e, detti G ed H due insiemi misurabili rispettivamente di I_1 ed I_2, esistono gli integrali iterati di $f(x, y)$:

$$(1) \qquad \int_G dx \int_H f(x, y) dy, \quad \int_H dy \int_G f(x, y) dx$$

e risultano eguali all'integrale doppio:

$$\iint_{G \times H} f(x, y) dx dy.$$

Che cosa può dirsi per una funzione misurabile in R e sommabile rispetto alle variabili separatamente, nell'ipotesi che esista, per ogni coppia di insiemi misurabili $G \subset I_1$ ed $H \subset I_2$, uno dei due integrali iterati (1)?

Se $f(x, y)$ è in R di segno costante, un teorema di L. TONEL-

(*) Pervenuta in Redazione il 10 aprile 1952.

1) Il simbolo $I_1 \times I_2$, prodotto cartesiano o combinatorio dei due insiemi I_1 ed I_2, denota l'insieme dei punti del piano che hanno ambedue le coordinate rispettivamente in I_1 ed I_2.

2) Cfr. ad es. S. SAKS, *Théorie de l'intégrale.* Pag. 74.

3) Cioé sommabile in I_1 rispetto ad x, per quasi tutti gli y di I_2 e sommabile in I_2 rispetto ad y, per quasi tutti gli x di I_1.

LI[4]) ci assicura la sommabilità superficiale di $f(x, y)$ e quindi anche l'esistenza e l'eguaglianza di ambedue gli integrali iterati (1); ma nel caso generale, un interessante esempio di G. FICHTENHOLZ[5]) dimostra che nulla può dirsi circa la sommabilità superficiale di $f(x, y)$.

Il citato Autore costruisce infatti una funzione misurabile superficialmente, ma non superficialmente sommabile, malgrado ambedue gli integrali iterati (1) esistano sempre e siano per di più eguali.

Scopo di questa Nota è di fare osservare che, per una funzione $f(x, y)$ superficialmente misurabile e sommabile rispetto alle variabili separatamente, l'ipotesi dell'esistenza, per ogni $G \subset I_1$ ed ogni $H \subset I_2$, di uno dei due integrali iterati (1), porta sempre all'esistenza dell'altro e all'eguaglianza di essi.

In altri termini dimostro il seguente:

TEOREMA. - *Sia $f(x, y)$ misurabile nel rettangolo $R = I_1 \times I_2$ e sommabile rispetto alle variabili separatamente. Allora, se esiste uno dei due integrali iterati:*

$$\int_G dx \int_H f(x, y)dy, \quad \int_H dy \int_G f(x, y)dx$$

per ogni coppia di insiemi misurabili $G \subset I_1$ ed *$H \subset I_2$, esiste anche l'altro e risulta:*

$$\int_G dx \int_H f(x, y)dy = \int_H dy \int_G f(x, y)dx.$$

È lecita cioè l'inversione dell'ordine d'integrazione.

1. - Dimostriamo il teorema enunciato. A tale scopo supponiamo, per fissare le idee, che per ogni $G \subset I_1$ ed ogni $H \subset I_2$ esista il primo dei due integrali iterati (1).

---

[4]) L. TONELLI, *Sull'integrazione per parti.* « Atti Accad. Naz. Lincei » (5), *18*, 246-253 (1909).

[5]) G. FICHTENHOLZ, *Sur une fonction de deux variables sans intégrale double.* « Fundam. Math. » *6*, 30-36 (1924).

Poichè $f(x, y)$ è sommabile in I_2 rispetto ad y per quasi tutti gli x di I_1, la funzione:

$$F_1(x) = \int_{I_2} | f(x, y) | dy$$

è definita quasi ovunque in I_1 e, in virtù della supposta misurabilità superficiale di $f(x, y)$, risulta ivi misurabile [6]). Si può quindi determinare un sotto-insieme chiuso $\overline{G}$ di I_2, di misura prossima quanto si vuole a quella di I_1, in modo tale che $F_1(x)$ sia continua in $\overline{G}$. In tale insieme $F_1(x)$ è sommabile, ciò che porta, per il citato teorema di TONELLI, alla sommabilità superficiale di $f(x, y)$ nell'insieme $\overline{G} \times I_2$.

In altri termini, fissato un numero $\varepsilon > 0$, si può determinare un insieme misurabile $\overline{\Delta}$ di I_1, di misura minore di ε, in modo tale che $f(x, y)$ sia sommabile in R privato dei punti, le cui proiezioni appartengono a $\overline{\Delta}$.

Orbene, sia $\{\Delta_n\}$ una successione monotona di insiemi di I_1, di misura infinitesima al divergere di n, e determinati in modo tale che $f(x, y)$ sia sommabile nel rettangolo R privato dei punti, le cui proiezioni appartengono a Δ_n $(n = 1, 2, ...)$.

Posto:

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_n = \Delta, \quad G_n = \Delta_n - \Delta_{n+1} \qquad (n = 1, 2, ...),$$

risulta:

$$\Delta_1 - \Delta = \sum_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{2}$$

---

[6]) Per ogni intero positivo n, sia $f_n(x, y)$ uguale ad $|f(x, y)|$ nei punti di R in cui $|f(x, y)| \leq n$ ed eguale ad n nei rimanenti. Essendo $f_n(x, y)$ sommabile in R, esiste, per quasi tutti gli x di I_1, l'integrale:

$$F_1^{(n)}(x) = \int_{I_2} f_n(x, y) dy$$

e la funzione $F_1^{(n)}(x)$ é, per ogni n, addirittura sommabile in I_1. D'altro canto è:

$$\lim_{n \to \infty} F_1^{(n)}(x) = \int_{I_2} | f(x, y) | dy$$

quasi ovunque in I_1. Ciò che ovviamente dimostra quanto asserito.

dove Δ è di misura nulla e gli insiemi della successione $\{G_n\}$ sono a due a due privi di punti comuni.

Ciò posto, notiamo che, essendo:

$$\int_G dx \int_H f(x, y)dy = \int_{G-G\Delta_1} dx \int_H f(x, y)dy + \int_{G\Delta_1} dx \int_H f(x, y)dy$$

ed essendo $f(x, y)$ sommabile in $(G - G\Delta_1) \times H$, per dimostrare il nostro asserto basta far vedere che esiste l' integrale iterato:

$$\int_H dy \int_{G\Delta_1} f(x, y)dx$$

e che risulta:

$$\int_{G\Delta_1} dx \int_H f(x, y)dy = \int_H dy \int_{G\Delta_1} f(x, y)dx. \tag{3}$$

A tale scopo osserviamo che, essendo per ipotesi $f(x, y)$ sommabile rispetto alle variabili separatamente, l' integrale:

$$\int_{G\Delta_1} f(x, y)dx$$

esiste per quasi tutti gli y di H e che, essendo Δ di misura nulla, per la (2) si ha:

$$\int_{G\Delta_1} f(x, y)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{GG_n} f(x, y)dx.$$

Posto allora:

$$g_i(y) = \sum_{n=1}^{i} \int_{GG_n} f(x, y)dx, \tag{4}$$

le funzioni della successione $\{g_i(y)\}$ risultano sommabili in H e la successione stessa è ivi quasi ovunque convergente avendosi:

$$\lim_{i \to \infty} g_i(y) = \int_{G\Delta_1} f(x, y)dx. \tag{5}$$

Orbene, consideriamo gli integrali:

$$(6) \qquad \int_I g_i(y)dy \qquad (I \subset H;\ i = 1,\ 2,\ \ldots)$$

e dimostriamo che sono equi-assolutamente continui nella famiglia degli insiemi misurabili contenuti in H.

Per un noto teorema [7]) di S. SAKS, basta, a tale scopo, far vedere che esiste finito il limite:

$$(7) \qquad \lim_{i \to \infty} \int_I g_i(y)\, dy$$

per ogni insieme I misurabile contenuto in H.

Per la (4) si ha:

$$\lim_{i \to \infty} \int_I g_i(y)dy = \lim_{i \to \infty} \sum_{n=1}^{i} \int_I dy \int_{GG_n} f(x,\ y)dx$$

ed osservando che $f(x,\ y)$ è sommabile in $I \times GG_n$, risulta in definitiva:

$$(8) \quad \lim_{i \to \infty} \int_I g_i(y)dy = \lim_{i \to \infty} \sum_{n=1}^{i} \int_{GG_n} dx \int_I f(x,\ y)dy = \int_{G\Delta_1} dx \int_I f(x,\ y)dy.$$

La convergenza della successione di integrali (6) è quindi assicurata su ogni insieme misurabile I contenuto in H e però gli integrali (6) risultano iiv equi-assolutamente continui. Per un classico teorema [8]) di VITALI, la funzione (5) è allora sommabile in H e nella (7) è lecito il passaggio al limite sotto il

---

[7]) S. SAKS, *Addition to the note on some functionals.* « Transactions of the American Mathematical Society » *35*, 4, 965-970 (1933). Cfr. anche F. CAFIERO, *Sulle famiglie di funzioni additive d' insieme, uniformemente continue.* « Rend. Accad. Naz. Lincei » s. VIII, vol. XII, fasc. II (1952).

[8]) G. VITALI, *Sull'integrazione per serie.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo XXIII, 137-155 (1907).

segno d' integrale per ogni insieme I misurabile di H. Ciò porta, per la (5) e (8) all' eguaglianza:

$$\int_I dy \int_{G\Delta_1} f(x, y) dx = \int_{G\Delta_1} dx \int_I f(x, y) dy$$

per ogni insieme I misurabile contenuto in H.

La (3) è così in particolare dimostrata e quindi anche l' enunciata proposizione.