UGO MORIN

Sull'unirazionalità' dell'ipersuperficie del quarto ordine dell'S_6

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 406-409
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__406_0>

SULL'UNIRAZIONALITA' DELL'IPERSUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE DELL' S_6.

Nota (*) *di* Ugo Morin (*a Padova*)

1. - E' noto che un' ipersuperficie algebrica generale V_{r-1}^n dello spazio lineare S_r, rappresentata dunque da un' equazione

(1) $$f(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0,$$

in cui f è una forma dell' ordine $n \geq 3$ è *unirazionale*; cioè che la (1) è risolubile mediante equazioni parametriche razionali, non razionalmente invertibili:

(2) $$x_i = \varphi_i(t_0, t_1, \dots, t_{r-1})$$

di r parametri omogenei *se la dimensione r dello spazio ambiente è sufficientemente grande rispetto all' ordine n*, [1]).

Si è potuto cioè rimostrare che per la unirazionalità della V_{r-1}^n è *sufficiente* che r sia maggiore od uguale di un certo intero r_n, dipendente da n; dove, per $n = 3$ è $r_3 = 3$, per $n = 4$ è $r_4 = 7$, per $n = 5$ è $r_5 = 17$ e per $n \geq 6$ r_n si determina in modo ricorrente.

Ma da quelle dimostrazioni non risulta che la condizione $r \geq r_n$ sia anche *necessaria* per l' unirazionalità della V_{r-1}^n. Sussiste dunque la possibilità di abbassare questa limitazione inferiore di r e rimane aperto il difficile problema di fissarne, per ogni n, il *minimo*. Solo per $n = 3$ si sa che questo minimo è $r = 3$.

(*) Pervenuta in Redazione il 26 giugno 1952.

[1]) Segre B., *Questions arithmetiques sur les variétés algebriques* [Colloques internationaux. Algèbre et theorie des nombres. Paris 25 Sett. 1949, Centre Nat. de la recherches scientifiques] ove trovansi citati lavori di Morin, Roth, Predonzan.

In questa nota verifico l' unirazionalità dell'ipersuperficie generale del quarto ordine anche per $r = 6$. Poichè, come noto, una curva del quarto ordine dell' S_2 ed una superficie del quarto ordine dell' S_3 non sono (in generale) uni-razionali, rimane (per $n = 4$) soltanto di riconoscere se l' ipersuperficie generale del quarto ordine dell' S_4 o dell' S_5 sono unirazionali oppure no.

Ricordiamo infine che FANO ha da tempo dimostrato che la V_3^4 generale dell' S_4 *non* è birazionale, [2]).

2. - Ricordiamo i seguenti due teoremi, dei quali avremo bisogno nel corso della nostra dimostrazione:

TEOREMA I. - Un' ipersuperficie generale del quarto ordine dell' S_r ammette, se è $r \geq 5$, degli S_3 che la segano in superficie F_2^4 con un punto triplo (monoidi), dunque *razionali,* [3]).

TEOREMA II. - Una V_{r-1}^m dell' S_r, $r \geq 6$, con un S_{r-3} multiplo dell' ordine $m - 2$, cioè segata dagli ∞^2 S_{r-2} per l' S_{r-3} (oltre che in questo spazio multiplo) in quadriche Q_{r-3}, è *birazionale.*

Ciò dipende dal fatto che queste ∞^2 Q_{r-3} ammettono una superficie unisecante, [4]).

3. - Consideriamo un' ipersuperficie algebrica generale V_5^4, del quarto ordine, dello spazio lineare S_6; rappresentata da un' equazione del tipo della (1), con $r = 6$. Sia F_2^4 una superficie *razionale* della V_5^4, sua sezione con un opportuno S_3, (n. 2).

L' S_5 tangente alla V_5^4 in un punto generico Y della F_2^4 sega la V_5^4 secondo una V_4^4 col punto doppio Y. Una generatrice generica g del cono quadrico K tangente alla V_4^4 in Y taglia ulteriormente la V_4^4 (e quindi la V_5^4) in un solo punto P. Que-

---

[2]) FANO G., *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli* [Atti dell'Acc. delle Sc. di Torino, t. 44 (1909)].

[3]) PREDONZAN A., *Sui monoidi V_{k-1}^n di S_k che appartengono alla forma generale F_{r-1}^n di S_r* [questi « Rendiconti », questo volume].

[4]) BALDASSARRI M., *Su un criterio di riduzione per un sistema algebrico di varietà* [Rend. Padova t. 19 (1950)].

sti punti P generano al variare della g in K, una V_3^8 sezione di K, con la V_4^4.

L' insieme delle generatrici g del cono K, e quindi la varietà V_3^8, possono riferirsi prospettivamente alla quadrica $\overline{Q}_3$ sezione di K con un iperpiano generico *fisso* $\overline{S}_5$ dell' S_6. Variando Y sulla F_2^4 otteniamo in questo modo un *sistema razionale* Σ_2, ∞^2, di quadriche $\overline{Q}_3$.

Fissiamo inoltre un S_3^* generico dell' S_6 e consideriamo la stella Σ_2^* degli ∞^2 S_4^* passanti per questo S_3^*. Stabiliamo ora una corrispondenza birazionale Ω tra il sistema razionale Σ_2 e la stella Σ_2^*; in cui dunque ad una $\overline{Q}_3$ di Σ_2, interpretata come elemento, corrisponde uno spazio S_4^* della stella Σ_2^*.

Introduciamo inoltre una retta S_1^* dell' S_6 da cui proiettiamo, punto per punto, una $\overline{Q}_3$ di Σ_2 sopra l' S_4^* ad essa corrispondente nella Ω. Otteniamo così dentro a questo S_4^* una quadrica Q_3^*, in corrispondenza birazionale colla $\overline{Q}_2$ (e quindi anche con la rispettiva V_3^8).

Al variare del punto Y sulla F_2^4, quindi della V_3^8 nella V_5^4. quindi della $\overline{Q}_3$ in Σ_2, quindi della corrispondente Q_3^* insieme all' S_4^* di Σ_2^* cui essa appartiene, questa Q_3^* descrive un' ipersuperficie V_5^{m*} dell' S_6 d'un certo ordine m. L' S_3^*, centro della stella Σ_2^*, è per la V_5^{m*} multiplo dell'ordine $m-2$ in quanto un S_4^* generico di Σ_2^* sega la V_5^{m*}, oltre che nell'S_3^*, soltanto in una quadrica Q_3^*.

Dunque (n. 2) la V_5^{m*} ora ottenuta è birazionale; cioè i suoi punti P^* si possono porre in corrispondenza birazionale coi punti $P'(t_0, t_1, \dots, t_5)$ d' uno spazio lineare S'_5.

Ad un punto generico P' dell' S'_5 corrisponde dunque birazionalmente un punto P^* della V_5^{m*}. A questo punto P^*, appartenente ad una determinata Q_3^*, corrisponde mediante la proiezione dalla retta S_1^* un determinato punto P sulla quadrica $\overline{Q}_3$ che è associata alla Q_3^* mediante la Ω.

A questo punto $\overline{P}$ corrisponde prospettivamente una generatrice g del cono K (dal quale la $\overline{Q}_3$ proviene) il cui vertice è un punto Y della F_2^4. Questa retta g incontra la V_5^4, fuori di Y, in un solo punto P.

Il punto P della V_5^4 così ottenuto è individuato dal punto P' mediante una catena di operazioni algebriche, perciò le sue coordinate $P(x_0, x_1, \ldots, x_6)$ sono funzioni razionali del tipo delle (2), delle coordinate di $P'(t_0, t_1, \ldots, t_5)$.

4. - D'altra parte, il punto P ora determinato è un punto *generico* della V_5^4.

Infatti, se una retta g passa per un punto generico $P(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ della V_5^4 (di equazione (1)) ed ha con essa un contatto tripunto in un altro punto $Y(y_0, y_1, \ldots, y_r)$; le coordinate di questi due punti P ed Y soddisfano al sistema delle due equazioni:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_0} x_0 + \dfrac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial y_r} x_r = 0 \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y_0} x_0 + \dfrac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial y_r} x_r\right)^{(2)} = 0 \end{cases}$$

che rappresentano, se consideriamo P fisso ed Y variabile, le ipersuperficie polari prima e seconda di P rispetto alla V_5^4. Esse sono degli ordini $4 - 1 = 3$ e $4 - 2 = 2$.

Segando queste due ipersuperficie coll' S_3 della F_2^4 inizialmente fissato (n. 3) si ottengono due superficie dell' S_3 che hanno in comune una curva dell'ordine $2 . 3 = 6$. Questa curva sega a sua volta la F_2^4 in $6 . 4 = 24$ punti Y_i $(i = 1, 2, \ldots, 24)$.

Ciascuno di questi 24 punti Y_i è dunque vertice d' un cono K (n. 3) di cui una generatrice g passa per il punto P.

Dunque, mediante le equazioni parametriche (2), ottenute col procedimento del n. 3, un punto generico P, della V_5^4 proviene da 24 punti P dell'S'_5; cioè queste equazioni danno una rappresentazione unirazionale della V_5^4.