RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 383-394

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__383_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COSTRUZIONE DEI GRUPPI FINITI A SOTTOGRUPPO DI FRATTINI IDENTICO

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Napoli*)

Nella presente nota dimostriamo in quale modo si può costruire un generico gruppo d'ordine finito col sottogruppo di FRATTINI [1]) identico. Per la dimostrazione partiamo da un teorema dimostrato da ORE [1] [2]) che dà una condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo d'ordine finito G abbia il sottogruppo di FRATTINI identico. Da esso si deduce la seguente altra caratterizzazione espressa dal seguente teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito G abbia il sottogruppo di* FRATTINI *identico è che G sia privo di sottogruppi normali abeliani, oppure, in caso contrario, il gruppo N unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di G abbia un complemento in G, vale a dire che esista un sottogruppo C di G per cui risulti*

$$N \cup C = G \qquad N \cap C = 1 .$$

Usando tale teorema, mediante la teoria dell'ampliamento, risolviamo il problema enunciato.

1. - Sia G un gruppo ed H un suo sottogruppo. Diremo che H è un sottogruppo complementato di G, se in G esiste

---

(*) Pervenuta in Redazione il settembre 1952.

1) Dicesi sottogruppo di FRATTINI Φ di un gruppo G, il gruppo intersezione di tutti i sottogruppi massimi di G.

2) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia riportata in fondo alla nota.

almeno un sottogruppo K per cui valgono le due relazioni

$$G = H \cup K \qquad H \cap K = 1$$

ove 1 indica il sottogruppo identico di G.

K si dirà un complemento di H, (e viceversa H un complemento di K) in G.

Dimostriamo ora due lemmi che ci saranno utili in seguito.

Lemma I: *Se H_1, H_2 sono due sottogruppi permutabili tra loro di G, con H_2 complemento di H_1 in G, se K_2 è un sottogruppo di H_2 permutabile con H_1, se K_1 è un complemento di K_2 permutabile con K_2 stesso, allora il gruppo $H_2 \cap K_1$ è un complemento di $K_2 \cup H_1$ in G, ossia si ha*

$$(1) \qquad (H_1 \cup K_2) \cup (H_2 \cap K_1) = G$$

$$(2) \qquad (H_1 \cup K_2) \cap (H_2 \cap K_1) = 1$$

Dimostriamo anzitutto la (1).

Abbiamo

$$(3) \quad (H_1 \cup K_2) \cup (H_2 \cap K_1) = [H_1 \cup (H_2 \cap K_1)] \cup [K_2 \cup (H_2 \cap K_1)]$$

Ora per ipotesi $H_2 \supset K_2$, e K_2 è permutabile con K_1.

All' espressione $K_2 \cup (H_2 \cap K_1)$ si può quindi applicare la relazione di Dedekind, sicchè si ha

$$K_2 \cup (K_1 \cap H_2) = (K_2 \cup K_1) \cap H_2 .$$

Pertanto la (3) ci dà

$$\begin{aligned}(H_1 \cup K_2) \cup (H_2 \cap K_1) &= [H_1 \cup (H_2 \cap K_1)] \cup [K_1 \cup K_2) \cap H_2] = \\ &= [H_1 \cup (H_2 \cap K_1)] \cup [(G \cap H_2)] = H_1 \cup (H_2 \cap K_1) \cup H_2 = \\ &= G \cup (K_1 \cap H_2) = G\end{aligned}$$

il che dimostra la (1).

Per provare la (2) ragioniamo per assurdo. Supponiamo che l' intersezione $(H_1 \cup K_2) \cap (H_2 \cap K_1) = I$ non si riduca al sottogruppo identico. Sia allora x un elemento di I diverso dall'identità. Poichè K_2 è per ipotesi permutabile con H_1, sarà $x = h_1 k_2$ con h_1 elemento di H_1, k_2 elemento di K_2, ed $h_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, essendo $K_1 \cap K_2 = H_1 \cap H_2 = 1$.

Ora da $x = h_1 k_2$ si ricava $h_1 = x k_2^{-1}$. Ma x sta in H_2, perchè sta in $K_1 \cap H_2$, k_2 sta in H_2 essendo $K_2 \subseteq H_2$. Quindi h_1

è un elemento di H_1 e di H_2 non identico, il che contraddice alla relazione $H_1 \cap H_2 = 1$. L'assurdo cui siamo pervenuti dimostra così anche la (2); il lemma I è con ciò dimostrato.

COROLLARIO: *Se C è il complemento di un sottogruppo normale N di G, se K è un sottogruppo normale di G contenuto in C e se C' è un complemento di K in G, allora $C \cap C'$ è un complemento di $N \cup K$ in G.*

Invero un sottogruppo normale di un gruppo G essendo permutabile con ogni elemento di G, è permutabile pure con ogni sottogruppo di G, per cui sono soddisfatte tutte le condizioni del lemma I.

LEMMA II: *Se N è un sottogruppo unione di sottogruppi normali minimi abeliani di un gruppo G, se C è un complemento di N in G, privo di sottogruppi normali abeliani in G, allora N è l'unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di G.*

Dimostrazione: Procediamo per assurdo. Sia H un sottogruppo normale minimo abeliano di G non contenuto in N. Detto h un elemento di H non identico, consideriamo in G il sistema completo T di elementi coniugati individuato da h. Gli elementi di T appartengono tutti ad H, essendo H normale in G, e si ha $H = \{T\}$ perchè H è un sottogruppo normale minimo di G. Ogni elemento g di G trasforma gli elementi di T tra di loro subordinando una permutazione. Essendo $N \cap H = 1$, perchè H è un sottogruppo normale minimo in G, è $N \cup H = N \times H$, per cui $N \cup H$ è un gruppo abeliano. Inoltre è $G = N \cup C = NC$, sicchè un elemento generico h_i di T si potrà rappresentare come prodotto di un elemento n_i di N ed uno c_i di C:

$$h_i = n_i c_i$$

dove gli elementi n_i, c_i sono univocamente determinati da h_i, essendo $N \cap C = 1$.

Sia ora n un elemento qualsiasi di N. Poichè $h_i n = n h_i$ si ha

$$(n_i c_i) n = n(n_i c_i) \tag{4}$$

Ma $nn_i = n_i n$, essendo N abeliano, e quindi la (4) ci dà:

$$n_i(c_i n) = (n_i c_i) n = n(n_i c_i) = n_i(n c_i)$$

ossia

$$c_i n = n c_i \tag{5}$$

vale a dire ogni elemento di N è permutabile con c_i.

Indichiamo con g un elemento generico di G. Esso può porsi in modo univoco sotto la forma $g = nc$ con n in N e c in C. Ne segue $g^{-1}c_i g = c^{-1}n^{-1}c_i nc = c^{-1}c_i c = c'$ con c' in C.

In definitiva un elemento qualsiasi g di G, trasforma c_i in un elemento appartenente ancora a C.

Detto questo, posto $h_i = n_i c_i$, $g^{-1}h_i g = h_j$, $h_j = n_j c_j$ con n_i, n_j in N, c_i, c_j in C, si ha

$$g^{-1}h_i g = (g^{-1}n_i g)(g^{-1}c_i g) = n_i' c_i' = h_j = n_j c_j .$$

Ma n_i' sta in N, essendo N un sottogruppo normale, c_i' sta in C per quanto si è visto or ora, e quindi

$$n_i' = n_j , \quad c_i' = c_j$$

data la unicità della rappresentazione degli elementi di G come prodotto di un elemneto di N per un elemento di C.

Se allora indichiamo con M l' insieme degli elementi di C che figurano nella rappresentazione degli elementi di T come prodotto di un elemento di N ed uno di C, per quanto si è visto, risulta che un elemento qualsiasi g di G trasforma gli elementi di M tra di loro. Il gruppo $\{M\}$ è quindi un sottogruppo normale di G contenuto in C, non identico. Il gruppo $\{M\}$ è però anche abeliano, avendosi

$$h_i h_j = n_i c_i n_j c_j = h_j h_i = n_j c_j n_i c_i$$

e per la (5) quindi

$$n_i n_j c_i c_j = n_i c_i n_j c_j = h_i h_j = h_j h_i = n_j c_j n_i c_i = n_j n_i c_j c_i = n_i n_j c_j c_i ,$$

ossia

$$c_i c_j = c_j c_i .$$

L'assurdo cui siamo così pervenuti prova il lemma II.

Osserviamo che il lemma II vale pure se si toglie l' ipotesi che i gruppi normali minimi siano abeliani, ipotesi che abbiamo fatto perchè ci sarà utile in seguito.

2. - Passiamo ora allo studio di un gruppo d'ordine finito in cui il sottogruppo di FRATTINI Φ di G è identico.

ORE in una sua bella memoria sulla teoria dei gruppi [1], tra i molti risultati ivi esposti, dimostrò il seguente teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito G abbia il sottogruppo di FRATTINI identico, è che il massimo sottogruppo normale speciale L di G sia identico, oppure L sia l'unione di gruppi abeliani elementari [3]) e in quest'ultimo caso ogni sottogruppo normale minimo di G deve avere complemento in G.

Notiamo che, *affinchè un gruppo finito G abbia il sottogruppo di* FRATTINI Φ *identico è sufficiente che ogni sottogruppo abeliano normale minimo abbia complemento in G.*

Invero supponiamo che pure essendo soddisfatta tale condizione in G, il gruppo Φ non sia identico. Essendo Φ un gruppo speciale [2], esso contiene certamente un p-gruppo normale in G, e quindi anche un p-gruppo H normale minimo in G. Ma un p-gruppo normale minimo di un gruppo G d'ordine finito è sempre abeliano (come prodotto diretto di gruppi semplici d'ordine p). Ora H come sottogruppo di Φ non può avere complemento in G. Infatti se K è un complemento di H in G, esso sarà certamente contenuto in un sottogruppo massimo M di G. Ma il gruppo Φ, come intersezione di tutti i sottogruppi massimi di G è pure contenuto in M e quindi anche H è in M. Pertanto $H \cup K$ essendo in M al pari di H e K non può coincidere con G.

L'assurdo ottenuto prova la nostra affermazione.

Tenendo ora presente il teorema di ORE enunciato poco fa, e che se in esso L è identico, G non ha sottogruppi normali minimi abeliani, e viceversa, possiamo dire:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il gruppo di FRATTINI Φ *di un gruppo finito G sia identico è che, se G ammette sottogruppi normali minimi abeliani, ogni tale sottogruppo abbia complemento in G.*

---

[3]) Vale a dire un gruppo abeliano i cui elementi hanno ognuno per ordine un numero primo.

Siamo adesso in grado di dimostrare il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il gruppo di FRATTINI Φ *di un gruppo finito* G *sia identico è che, se* G *ammette sottogruppi normali abeliani, l'unione* N *di tutti i sottogruppi di tal tipo abbia complemento in* G.

Sia dunque G un gruppo finito col sottogruppo di FRATTINI Φ identico. Sia P_1 un sottogruppo normale minimo abeliano di G. Esso avrà un complemento C_1 in G. Supponiamo che C_1 contenga un sottogruppo P_2 abeliano normale minimo in G. Se C_2 è un complemento di P_2, in virtù del corollario del n. 1, il gruppo $C_{1,2} = C_1 \cap C_2$ è un complemento di $P_1 \times P_2$ in G. Se poi esiste un sottogruppo normale abeliano minimo P_3 contenuto in $C_{1,2}$ e C_3 è un suo complemento in G, il gruppo $C_{1,2,3} = C_{1,2} \cap C_3$ è un complemento, sempre pel corollario del n. 1, di $P_1 \times P_2 \times P_3$ in G. Così continuando, poichè l'ordine di G è finito, dopo un numero finito di passi si arriverà ad un sottogruppo $C_{1,2,\ldots n}$ di G tale che esso non contiene più alcun sottogruppo normale minimo abeliano di G e che risulta il complemento di un sottogruppo N di G prodotto diretto di n convenienti sottogruppi normali minimi abeliani: $N = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$.

Ricordando allora il lemma II del n. 1, possiamo senz'altro concludere che N è unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di G.

La necessità della condizione risulta con ciò dimostrata.

Dimostriamo ora la sufficienza della condizione. Se G non ha sottogruppi normali abeliani minimi, il suo sottogruppo di FRATTINI Φ è identico pel teorema precedente. In caso contrario, supponiamo dunque che il sottogruppo N unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani abbia complemento C in G. Sia allora P un sottogruppo normale minimo abeliano qualsiasi di G. Esso sarà contenuto in N. E' facile convincersi che N si può rappresentare come prodotto diretto di P e di un altro sottogruppo H pure normale in G

$$N = P \times H$$

Ma allora il gruppo $H \cup C$ è un complemento di P in G.

In definitiva ogni sottogruppo normale minimo abeliano di G ha complemento in G. Ma ciò basta, per quanto si è detto, perchè in G il sottogruppo di FRATTINI Φ sia identico.

Il nostro teorema è così completamente dimostrato.

3. - Sfruttando le conclusioni del n. 2 e facendo ricorso alla teoria dell' ampliamento di un gruppo [3], facciamo vedere in questo n°. come si possono costruire i gruppi d' ordine finito aventi il sottogruppo di FRATTINI identico, e non privi di sottogruppi normali abeliani.

Sia G un gruppo d'ordine finito col sottogruppo di FRATTINI Φ identico. Sia N il sottogruppo abeliano elementare di G unione di tutti i sottogruppi normali abeliani minimi. Il gruppo N ha allora un complemento in C in G e C risulta privo di sottogruppi normali abeliani in G (n. 2). Se diciamo H il sottogruppo di C unione di tutti i sottogruppi normali in G e contenuti in C, poichè $N \cap C = 1$, sarà pure $N \cap H = 1$ e quindi $N \cup H = N \times H$; pertanto ogni elemento di H è permutabile con tutti gli elementi di N, anzi H è costituito da tutti e soli gli elementi di C permutabili con ogni elemento di N. Invero se F indica il centralizzante di N in G, è $F_N \cap C \supseteqq H$.

Ma $F_N \cap C$ è un sottogruppo normale di C, essendo F_N normale in G. Ne segue che $F_N \cap C$ è pure normale in G, perchè ogni elemento di $F_N \cap C$ è permutabile con ogni elemento di N, e il gruppo G è dato dal prodotto NC. Quindi, per la definizione di H, è pure $H \supseteqq F_N \cap C$, e perciò in definitiva $H = F_N \cap C$.

Abbiamo visto che C non può contenere sottogruppi abeliani normali in G. Dimostriamo allora che H non può neppure contenere sottogruppi abeliani normali in H. Invero sia L un sottogruppo abeliano normale minimo in H. Se consideriamo i suoi coniugati in G, essi sono tutti sottogruppi di H, perchè H è normale in G e risultano pure sottogruppi normali minimi in H come corrispondenti di L in convenienti automorfismi di H. La loro unione risulta quindi un sottogruppo normale abeliano in G contenuto in C, il che è assurdo.

Se noi associamo ad ogni elemento c di C quell' automorfismo che esso subordina in N, trasformando i singoli elementi di N mediante c, C risulta evidentemente omomorfo ad un sottogruppo T del gruppo degli automorfismi A_N di N. In tale omomorfismo l'elemento identico è il corrispondente di tutti e soli quegli elementi di C che sono permutabili con ogni elemento di N, sicchè risulta

$$T \cong \frac{C}{H} \tag{6}$$

Notiamo ancora che essendo N prodotto diretto di sottogruppi normali minimi abeliani di G, $H = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_s$, ogni elemento c di C deve trasformare R_i in sé, mentre R_i, essendo normale minimo in G, non deve contenere nessun sottogruppo che gode di analoga proprietà; tenendo conto del significato della (6), brevemente si potrà dire che R_i ($i = 1, 2 \dots s$), ma nessun suo sottogruppo proprio, dev'essere ammissibile per ogni automorfismo di T.

Osserviamo ancora che il gruppo $\frac{G}{H}$ risulta isomorfo all'olomorfo L di T sopra N.

Perciò dimostriamo la seguente proposizione: *Se G, G' sono due gruppi ciascuno prodotto rispettivamente di due sottogruppi H, K, H', K',*

$$G = HK \quad , \quad G' = H'K'$$

con $H \cap K = H' \cap K' = 1$, $H \cong H'$, $K \cong K'$, posto $h' = \varphi(h)$ *a indicare il corrispondente in H' di un elemento generico h di H nell'isomorfismo tra H e H', e significato analogo per $k' = f(k)$, se da $\bar{k}\bar{h} = hk$ segue*

$$f(k)\varphi(h) = \varphi(\bar{h})f(\bar{k}) \tag{7}$$

il gruppo G è isomorfo al gruppo G'.

Invero associamo all'elemento generico hk di G l'elemento

$$\tau(hk) = \varphi(h)f(k).$$

Dimostriamo che tale corrispondenza τ è un isomorfismo. Si tratta anzitutto di una corrispondenza biunivoca giacchè per le ipotesi fatte un elemento g di G si può rappresentare in un solo modo come prodotto di un elemento di H e di uno di K, e analogamente un elemento g' di G' si può rappresentare in un solo modo come prodotto di un elemento di H' ed uno di K'.

Ci resta pertanto da dimostrare che si ha per due elementi qualsiasi g_1, g_2 di G

$$\tau(g_1g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2).$$

Sarà $g_1 = h_1k_1$, $g_2 = h_2k_2$, e quindi $g_1g_2 = h_1k_1h_2k_2 = h_1\bar{h}_2\bar{k}_1k_2$.

Pertanto, tenendo conto che φ ed f sono isomorfismi, e della (7), si ha

$$\tau(g_1g_2) = \tau[(h_1\bar{h}_2)(\bar{k}_1k_2)] = \varphi(h_1\bar{h}_2)f(\bar{k}_1k_2) = \varphi(h_1)\varphi(\bar{h}_2)f(\bar{k}_1)f(k_2) =$$
$$= \varphi(h_1)f(k_1)\varphi(h_2)f(k_2) = \tau(h_1k_1)\tau(h_2k_2) = \tau(g_1)\tau(g_2). \qquad \text{c. v. d.}$$

Ritornando al gruppo $\frac{G}{H}$, abbiamo

$$\frac{G}{H} = \frac{N \cup H}{H} = \frac{N \cup H}{H} \cdot \frac{C}{H}.$$

Se L è l' olomorfo di T rispetto N, risulta $L = NT$, e se n, t sono due elementi qualsiasi di N e T si ha $nt = tn'$, ove n' è l' omologo di n nell' automorfismo t di N. D' altra parte è

$$\frac{N \cup H}{H} \cong N, \quad \frac{C}{H} \cong T$$

e risulta pure soddisfatta la (7) in quanto se c è un elemento generico di C, l' elemento $cnc' = n'$ coincide coll' elemento in cui l'automorfismo t di N corrispondente all'elemento $c|H|$ di $\frac{C}{H}$ nell' isomorfismo tra $\frac{C}{H}$ e T porta n. Quindi in base alla proposizione sopra dimostrata risulta

$$\frac{G}{H} \cong L.$$

Detto tutto questo, per costruire un generico gruppo G d' ordine finito col sottogruppo di FRATTINI Φ identico e non privo di sottogruppi normali abeliani, si potrà procedere nel seguente modo.

Si consideri un gruppo N abeliano elementare d' ordine finito qualsiasi e si scomponga N in modo arbitrario nel prodotto di n p-gruppi: $N = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$. Scegliamo quindi un sottogruppo T del gruppo degli automorfismi A_N di N tale che $R_i (i = 1, 2 \dots n)$ sia ammissibile per ogni automorfismo appartenente a T, ma che non contenga alcun sottogruppo godente della stessa proprietà. Che ciò sia sempre possibile prova la seguente considerazione. Se con A_{R_i}, indichiamo il gruppo degli automorfismi di R_i, consideriamo il gruppo prodotto diretto $M = A_{R_1} \times A_{R_1} \times \dots \times A_{R_n}$. Tale gruppo è isomorfo ed un sottogruppo del gruppo degli automorfismi A_N.

Invero se $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ è un elemento generico di M ed $e = h_1 h_2 \dots h_n$ un elemento generico di N con h_i in R_i, la trasformazione $l^\theta = h_1^{\theta_1} h_2^{\theta_2} \dots h_n^{\theta_n}$ risulta un automorfismo di N che muta il gruppo R_i in sè. R_i contiene però nessun sottogruppo ammissibile per tutti gli elementi di M. Infatti ciò implicherebbe che R_i contenesse un sottogruppo ammissibile per ogni elemento di M del tipo $(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, \theta_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ con e_j elemento identico di A_{R_j}, vale a dire per ogni automorfismo di R_i, il che è impossibile perchè un p-gruppo abeliano elementare è privo di sottogruppi caratteristici.

Prendiamo ora un gruppo H soggetto alla condizione di non contenere sottogruppi normali abeliani, che è equivalente a dire privo di sottogruppi normali risolubili (invero se H contiene un sottogruppo M normale risolubile, fra i derivati successivi di M figura uno abeliano che risulta normale in H come sottogruppo caratteristico di un sottogruppo normale di H), e consideriamo un ampliamento qualsiasi di H secondo T. Chiamiamo C tale ampliamento, e sia L l'olomorfo di T rispetto a N. Se c è un elemento generico di C, con t_c indichiamo l'automorfismo di N che corrisponde al laterale $c|H|$ nell'isomorfismo tra $\frac{C}{H}$ e T.

Consideriamo ora le coppie ordinate (n, c) con n elemento di N e c elemento di C e definiamo il seguente prodotto

$$(n_1, c_2)(n_2, c_2) = (n_1 n_2', c_1 c_2) \tag{8}$$

ove n_2' è il trasformato in n_2 mediante l'automorfismo t_{c_1}.

E' facile verificare che in tal modo si viene ad ottenere un gruppo $\overline{G}$ prodotto di due sottogruppi $\overline{N}$, $\overline{C}$ isomorfi ad N e C con $\overline{N} \cap \overline{C} = 1$, $\overline{N}$ sottogruppo normale di $\overline{G}$, e gli elementi di $\overline{C}$ permutabili con ogni elemento di $\overline{N}$ costituiscono un sottogruppo normale $\overline{H}$ di $\overline{G}$ isomorfo ad H, per cui si ha $\dfrac{\overline{G}}{\overline{H}} \simeq L$.

Verifichiamo che il gruppo $\overline{G}$ ha il sottogruppo di FRATTINI $\overline{\Phi}$ identico.

Invero, poichè il gruppo $\overline{N}$ ha complemento in $\overline{G}$, basterà dimostrare, per quanto si è visto al n. 2, che $\overline{N}$ è unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di $\overline{G}$.

Indichiamo con $\overline{U}$ il gruppo unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di $\overline{G}$. Dimostriamo anzitutto che $\overline{N} \subseteq \overline{U}$.

Per la (8), ogni elemento $\overline{c}$ di $\overline{C}$ determina un automorfismo in $\overline{N}$, che coincide precisamente con t_c di T, se c indica il corrispondente di $\overline{c}$ nell'isomorfismo tra $\overline{C}$ e C; poichè gli unici elementi di $\overline{C}$ permutabili con ogni elemento di $\overline{N}$ sono quelli di $\overline{H}$, ne segue che $\dfrac{\overline{C}}{\overline{H}}$ è isomorfo a T, per cui gli n gruppi $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots, \overline{R}_n$, di cui $\overline{N}$ è il prodotto diretto risultano normali in $\overline{G}$, anzi normali minimi perchè non contengono sottogruppi ammissibili per tutti gli automorfismi di T. E' quindi $\overline{N} \subseteqq \overline{U}$.

Sia ora $\overline{N} \subset \overline{U}$. Allora il gruppo $\overline{U} \cap \overline{C}$ non può essere identico. Ma $\overline{U} \cap \overline{C}$ è abeliano e normale in $\overline{C}$, perchè $\overline{U}$ lo è in $\overline{G}$. Inoltre $\overline{U} \cap \overline{C}$ deve stare in $\overline{H}$ in quanto tutti e soli gli elementi di $\overline{C}$ permutabili elemento per elemento con $\overline{N}$ sono quelli di $\overline{H}$. Ma $\overline{H}$ è privo di sottogruppi abeliani normali; d'onde l'assurdo. Dunque $\overline{N} = \overline{U}$; pertanto $\overline{G}$ ha il gruppo di FRATTINI $\overline{\Phi}$ identico.

Riassumendo le considerazioni fatte al n. 3 possiamo concludere:

Un generico gruppo d'ordine finito G col sottogruppo di FRATTINI *identico e non privo di sottogruppi normali abeliani si ottiene nel seguente modo: Preso un gruppo abeliano elementare, N, lo si scompone nel prodotto diretto di p-gruppi $N = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$; si assume indi un sottogruppo T del* *gruppo degli automorfismi A_N di N in modo tale che R_i ma nessun suo sottogruppo sia ammissibile per ogni automorfismo di N appartenente a T $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e si considera quindi l'olomorfo L di T sopra N; detto H un gruppo privo di sottogruppi abeliani normali, si effettui un ampliamento qualsiasi di H secondo T. Se per le coppie ordinate (n, c), con n elemento di N e c elemento di C, ove C indica l'ampliamento di H secondo T, si definisce il prodotto mediante la legge*

$$(n_1, c_1)(n_2, c_2) = (n_1 n_2', c_1 c_2),$$

ove n_2' è il trasformato di n_2 mediante l'automorfismo t_{c_1} corrispondente di $c_1|H|$ nell'isomosfismo tra $\frac{C}{H}$ e T, l'insieme di tali coppie forma gruppo rispetto all'operazione ora definita, ed il gruppo così ottenuto fornisce il tipo più generale di gruppo d'ordine finito col sottogruppo di Frattini identico, e non privo di sottogruppi normali abeliani.

Ogni gruppo d'ordine finito privo di sottogruppi normali abeliani ha il sottogruppo di Frattini identico.

OSSERVAZIONE: Nel caso che si tratti di costruire un gruppo risolubile G d'ordine finito col sottogruppo di FRATTINI identico si deve assumere $H = 1$, in quanto, come si è detto, H dev' essere privo di sottogruppi normali risolubili, per cui G si riduce all'olomorfo di T sopra N.

BIBLIOGRAFIA

[1] O. ORE: *Contribution to the theory of groups of finite order*, «Duke Math. Journal», vol. 5 (1939), pp. 444-445.

[2] H. ZASSENHAUS: *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Teubner (1937), p. 107.

[3] *Loc. cit.* [2], pp. 89-98.