

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sopra un fenomeno di isteresi oscillatoria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 370-382

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__370_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UN FENOMENO DI ISTERESI OSCILLATORIA

Memoria () di GIUSEPPE COLOMBO (a Padova)*

Il VAN DER POL in un brillante lavoro ¹⁾ di parecchi anni fa, studiava un generatore triodico in due gradi di libertà, che presenta un interessante fenomeno di isteresi oscillatoria nel senso precisato qui appresso. Detto generatore è ottenuto accoppiando un circuito triodico con uno lineare. E' naturale pensare che un tale sistema abbia due frequenze distinte f_1 , f_2 , ovvero due maniere distinte di oscillare ²⁾. Se, mentre il sistema si muove con la frequenza f_1 , si varia gradualmente la frequenza propria del secondario, sempre nello stesso senso, si ha ad un certo punto un fenomeno di jump, ovvero il sistema passa bruscamente ad oscillare con la frequenza f_2 . Se invece il sistema oscilla inizialmente con la frequenza f_2 e si varia la frequenza del secondario in senso opposto a quello seguito prima, si ha ancora lo stesso fenomeno di jump, ma questo avviene dopo che si sono verificate le condizioni del primo jump.

Questo fenomeno di interesse fisico e tecnico è stato affrontato ed intuitivamente risolto, con la consueta maestria, dal VAN DER POL stesso. Se dal punto di vista fisico la spiegazione del fenomeno data nel lavoro succitato è soddisfacente, dal punto di vista matematico si può sollevare qualche riserva.

(*) Pervenuta in Redazione il 7 giugno 1952.

¹⁾ B. VAN DER POL, *On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom*. Phil. Mag. vol. XLIII, 6^a se., 1922, pag. 700.

²⁾ In effetti tali sistemi possono presentare più di due soluzioni periodiche stabili come ho fatto vedere in un mio precedente lavoro, in corso di stampa nei Rend. Sem. Mat. di Padova, dal titolo «Sopra un particolare sistema non lineare in due gradi di libertà».

Ho cercato di trattare il problema con quel rigore che è, anche se molto spesso di peso, tuttavia desiderabile. Ho dovuto mettermi in ipotesi di quasi linearità; cionostante mi sembra interessante l'aver messo in luce che, anche in queste condizioni, si presenta un fenomeno di isteresi.

Mi è riuscito utile usare un metodo già seguito in un mio precedente lavoro ³⁾, e perciò, per molte questioni di dettaglio, mi richiamerò a quello.

Inizio facendo vedere come lo stesso problema fisico trattato dal VAN DER POL, si traduce analiticamente in un sistema differenziale non-lineare del secondo ordine, allo scopo di far comparire i limiti di validità dell'approssimazione.

Inoltre, sempre all'inizio, dò anche un esempio di sistema dinamico equivalente all'oscillatore triodico per dare un'idea meccanica del fenomeno.

Passo quindi a studiare il sistema differenziale, mettendomi, come già detto, in opportune ipotesi, e dopo aver mostrata l'esistenza di due soluzioni p_1 , p_2 , periodiche, ne discuto la stabilità, dapprima in relazione ai valori di un parametro h opportunamente scelto, e poi ai valori di un altro parametro ω_2^2 , che è lo stesso di quello scelto dal VAN DER POL. Sia la determinazione delle soluzioni periodiche, sia lo studio delle loro stabilità vien fatto in prima approssimazione perciò nel seguito, per brevità indicherò con *a.s.* le soluzioni periodiche, e scriverò che è *a.s.* una soluzione riconosciuta stabile in prima approssimazione. Dimostro precisamente, in un primo tempo, che per $h > h_1$ è *a.s.* solo p_1 , per $h_1 < h < h_2$ sono *a.s.* tutte e due le soluzioni p_1 , p_2 , e che per $h > h_2$ è *a.s.* solo p_2 ; infine ritrovo almeno qualitativamente i risultati di VAN DER POL.

Basta allora rifarsi alla definizione di stabilità perchè il fenomeno risulti completamente spiegato giacchè lo jump non avviene che quando, al variare del parametro, la soluzione sulla quale si muove il sistema diviene instabile.

1. - Il circuito studiato dal VAN DER POL è quello disegnato in fig. 1. Se accenniamo con i , v alle parti variabili

³⁾ Vedi lavoro citato in (2).

della corrente e del potenziale anodico, la funzione caratteristica $i = \psi(v)$ può scriversi al solito

$$1_1) \quad i = -\alpha'v + \beta'v^2 + \gamma'v^3$$

ove α' e γ' sono certamente positive se si vuole che il sistema oscilli.

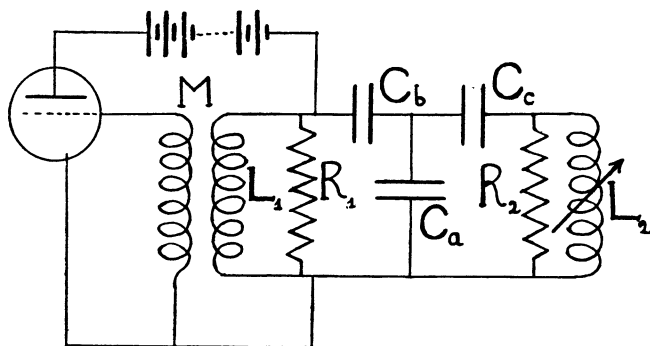


Fig. 1

Ponendo

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b}, \quad \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_c}, \quad K^2 = \frac{C_1 C_2}{C a^2},$$

$$2_1) \quad \omega_1^2 = \frac{1}{C_1 L_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{C_2 L_2}$$

$$\frac{\beta'}{C_1} = \beta'', \quad \frac{\gamma'}{C_1} = \gamma'', \quad \frac{1}{C_2 R_2} = \alpha_2, \quad \frac{\alpha_1'}{C_1} - \frac{1}{C_1 R_1} = \alpha_1$$

si perviene, trascurando piccoli termini come fa il VAN DER POL, alla seguente equazione del quarto ordine

$$3_1) \quad v^v + (\alpha_2 - \alpha_1)v'' + (\omega_1^2 + \omega_2^2)v + (1 - K^2)(\omega_1^2 \alpha_2 - \omega_2^2 \alpha_1)v' + \\ + (1 - K^2)\omega_1^2 \omega_2^2 v + \left(\frac{d^3}{dt^3} + \omega_1^2(1 - K^2) \frac{d}{dt} \right) (\beta''v^2 + \gamma''v^3) = 0.$$

Volendo adimensionalizzare l'equazione, si introducano le nuove variabili

$$4_1) \quad \tau = (\omega_1^2 + \omega_2^2 K^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{v}{v_s} = x$$

ove v è il valore del potenziale anodico oltre il quale non si ritiene variabile la corrente anodica.

Introdotta un parametro ε , che in seguito tratteremo come infinitesimo principale, si ponga

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 K^2, \quad \varepsilon\beta = \frac{\beta'' v_s}{\omega}, \quad \varepsilon\gamma = \frac{\gamma'' v_s^2}{\omega}, \quad \varepsilon\alpha = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\omega},$$

$$5_1) \quad \varepsilon\rho = \frac{1}{\omega^2}(\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2\omega_2^2 K^2), \quad \varepsilon^2 mn = \frac{K^2 \omega_1^4}{\omega^4}(1 - K^2),$$

$$\varepsilon^2 mh = \frac{\alpha_2}{\omega^3}(\omega_1^2 - \omega_2^2)(1 - K^2),$$

facendo implicitamente alcune ipotesi sull'ordine di infinitesimo delle singole espressioni. L'equazione 3₁), tenuto conto delle posizioni 4₁), 5₁), equivale al sistema

$$6_1) \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = \varepsilon my + \varepsilon \frac{dt}{d} (\alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3), \\ \ddot{y} + y = \varepsilon nx + \varepsilon h \dot{x} + \varepsilon py. \end{cases}$$

Ad un sistema del tipo 6) si giunge anche scrivendo le equazioni dinamiche del seguente sistema meccanico in due gradi di

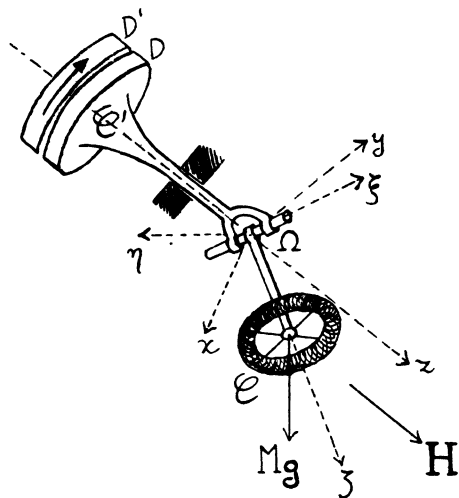


Fig. 2

libertà. Sia Ω, x, y, z una terna fissa con il piano yz verticale, l'asse x orizzontale e l'asse z non verticale. Un corpo C , (vedi fig. 2) è girevole intorno ad un asse ξ del piano xy , passante

per Ω . Detto asse ξ è solidale con un supporto C girevole a sua volta intorno all'asse z e terminante in un disco D a contatto di frizione con un disco D' animato di moto rotatorio uniforme sempre intorno all'asse z . Il corpo C è pesante ed il suo baricentro è su un asse ζ , normale a ξ fuori di Ω . Inoltre su C vi sia una distribuzione opportuna di cariche elettriche, per modo, per esempio, che chiamata δ^* la densità di detta carica, sia $\int_C \delta^* dC \neq 0$ ed una distribuzione, di masse proporzionali a δ^* abbia rotondo l'ellissoide d'inerzia relativo ad Ω con l'asse di rivoluzione coincidente con l'asse ζ . Infine C sia immerso in un campo magnetico costante di intensità H .

Facendo alcune opportune ipotesi sulla struttura del sistema, sulla velocità di rotazione di D' e tenendo conto della non linearità della coppia $M(v_r)$ agente da D' su D in funzione della velocità relativa v_r dei due dischi, si perviene, scrivendo le equazioni dinamiche, adimensionalizzando le grandezze che vi compaiono e trascurando infinitesimi di ordine superiore, ad un sistema del tipo 6).

2. - Consideriamo dunque il sistema (4).

$$1_2) \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = \varepsilon m y + \varepsilon \frac{d}{dt} (\alpha x - \gamma x^3) \\ \ddot{y} + y = \varepsilon n x + \varepsilon h \dot{x} + \varepsilon p y \end{cases} \quad (\varepsilon, m, n, \alpha, \gamma, \text{positivi})$$

e ponendo al solito:

$$2_2) \quad \begin{cases} x = a \operatorname{sen} t + \varepsilon \xi \\ y = b \operatorname{sen} (t + \varphi) + \varepsilon \eta \end{cases}$$

cerchiamo una soluzione periodica di 1₂) della forma 2₂) che soddisfi alle condizioni iniziali

$$3_2) \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = a > 0, \quad y(0) = b \operatorname{sen} \varphi, \quad \dot{y}(0) = b \cos \varphi$$

Si dimostra allora con tutto rigore, come nel lavoro citato.

4) Non è proprio il sistema considerato nei nn. precedenti perchè qui abbiamo trascurato il termine in ω^2 , ma poichè negli sviluppi che seguono, questo termine non porta alcun contributo l'abbiamo per semplicità trascurato. Così l'ipotesi che m ed n siano positive si potrebbe sostituire con quella che assicura la positività del prodotto mn .

in 2), che, almeno per $0 \leq t \leq 3\pi$, si può scrivere:

$$4_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \operatorname{sen} t + \varepsilon \xi_* + 0(\varepsilon^2) \\ y = b \operatorname{sen} (t + \varphi) + \varepsilon \eta_* + 0(\varepsilon^2) \end{array} \right.$$

ove si intenda

$$5_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_* = -m_1 \frac{b}{2} (t \cos (t + \varphi) - \operatorname{sen} t \cos \varphi) + \\ \quad + a \left(\alpha - \frac{3}{4} \gamma a^2 \right) \frac{t \operatorname{sen} t}{2} + \frac{3}{32} \gamma a^3 (\cos 3t - \cos t) \\ \eta_* = -n \frac{a}{2} (t \cos t - \operatorname{sen} t) + \frac{ha}{2} t \operatorname{sen} t - \\ \quad - \rho \frac{b}{2} (t \cos (t + \varphi) - \operatorname{sen} t \cos \varphi) \end{array} \right.$$

Poichè si richiede che la 4₂) sia periodica, se denotiamo con $2\pi + \varepsilon\tau$ il periodo T di detta soluzione, dovrà essere, tenuto conto delle 3₂)

$$6_2) \quad \begin{array}{l} x(2\pi + \varepsilon\tau) = 0, \quad \dot{x}(2\pi + \varepsilon\tau) = a, \\ y(2\pi + \varepsilon\tau) = b \operatorname{sen} \varphi, \quad \dot{y}(2\pi + \varepsilon\tau) = b \cos \varphi. \end{array}$$

Cominciamo a soddisfare la 6₂)₁. Da questa ricordando le 4₂)₁ si ha

$$\varepsilon(a\tau - mb\pi \cos \varphi) + 0(\varepsilon^2) = 0$$

donde si ricava

$$7_2) \quad \tau = \pi m \frac{b}{a} \cos \varphi + 0(\varepsilon)$$

Posto ora

$$8_2) \quad \begin{array}{l} x(2\pi + \varepsilon\tau) = a', \quad y(2\pi + \varepsilon\tau) = (b \operatorname{sen} \varphi)', \\ y(2\pi + \varepsilon\tau) = (b \cos \varphi)', \end{array}$$

da 4₂), 5₂), 7₂), si ha

$$9_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a' - a}{\varepsilon\pi} = mb \operatorname{sen} \varphi + a \left(\alpha - \frac{3}{4} \gamma a^2 \right) + 0(\varepsilon). \\ \frac{(b \operatorname{sen} \varphi)' - b \operatorname{sen} \varphi}{\varepsilon\pi} = m \frac{b^2}{a} \cos^2 \varphi - na - \rho b \cos \varphi + 0(\varepsilon), \\ \frac{(b \cos \varphi)' - b \cos \varphi}{\varepsilon\pi} = -m \frac{b^2}{a} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + ha + \rho b \operatorname{sen} \varphi + 0(\varepsilon), \end{array} \right.$$

ovvero, avendo posto $a_0^2 = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\gamma}$, $b' \cos \varphi' = (b \cos \varphi)'$, $b' \sin \varphi' = (b \sin \varphi)'$ e riscrivendo la $9_2)$,

$$10_2) \quad \begin{cases} \frac{a' - a}{\varepsilon \pi} = mb \sin \varphi + \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) + 0(\varepsilon), \\ \frac{b' - b}{\varepsilon \pi} = -na \sin \varphi + ha \cos \varphi + 0(\varepsilon), \\ \frac{\varphi' - \varphi}{\varepsilon \pi} = m \frac{b}{a} \cos \varphi - n \frac{a}{b} \cos \varphi - h \frac{a}{b} \sin \varphi - \rho + 0(\varepsilon). \end{cases}$$

Facciamo corrispondere ad ogni P dello spazio di coordinate cilindriche a, b, φ il punto P' di coordinate a', b', φ' . A punti uniti rispetto a questa trasformazione \mathcal{T} corrispondono soluzioni periodiche, a punti uniti stabili soluzioni periodiche stabili. Tali punti si determinano, in prima approssimazione, escludendo ovviamente l'origine, risolvendo il seguente sistema

$$11_2) \quad \begin{cases} \alpha a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) + mb \sin \varphi = 0, \\ a(h \cos \varphi - n \sin \varphi) = 0, \\ -\frac{b}{a}(n \cos \varphi + h \sin \varphi) + m \frac{b}{a} \cos \varphi - \rho = 0. \end{cases}$$

Si avranno quindi soluzioni a.p. in corrispondenza a condizioni iniziali $a = a_*$, $b = b_*$, $\varphi = \varphi_*$ ove a_*, b_*, φ_* , sono soluzioni di $11_2)$.

Si ha immediatamente

$$12_2) \quad \operatorname{tg} \varphi_* = \frac{h}{n}.$$

Inoltre poniamo

$$13_2) \quad \beta = \rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4mn}$$

e denotiamo con β_+ o β_- rispettivamente la determinazione di β relativa alla scelta del segno $+$ o $-$ davanti al radicale.

Allora le soluzioni di $11_2)$ sono date da

$$14_2) \quad a_* = a_0 \left(1 - \frac{2mh}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad b_* = -\frac{2n\alpha_*}{\beta \cos \varphi_*}.$$

Denotate con s_+ ed s_- rispettivamente le due soluzioni a.p. corrispondenti alle determina β_+ e β_- di β si riconosce intanto senz'altro che si hanno le seguenti 3 eventualità:

I. caso $h > \frac{\alpha\beta_+}{2m}$ esiste solo s_-

15₂) II. caso $\frac{\alpha\beta_-}{2m} < h < \frac{\alpha\beta_+}{2m}$ esistono entrambe

III. caso $h < \frac{\alpha\beta_-}{2m}$ esiste solo s_+ .

I periodi di queste due soluzioni sono dati, a seconda della determinazione di β , dalla

16₂) $T = 2\pi\left(1 - \varepsilon \frac{mn}{\beta}\right) = 2\pi\left[1 + \frac{\varepsilon}{4}(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4mn})\right]$

donde si riconosce che, delle due soluzioni, l'una ha periodo maggiore di 2π e l'altra minore.

3. - Per decidere della stabilità delle soluzioni a.p. determinate nel precedente numero basta studiare, come è noto, la trasformazione \mathcal{T} nell'intorno dei punti uniti P_* relativi alle soluzioni dette. Si riconosce ⁵⁾ che la stabilità, sempre intesa nell'ordine di approssimazione in cui ci siamo posti, dipende dal segno di tre ben determinate espressioni che ora costruiremo.

Si consideri il determinante A costruito con le derivate, rispetto ad a , b , φ , dei primi membri delle 10₂) calcolate nel punto P_* . Con facili semplificazioni fatte in base alle 10₂) soddisfatte per $a = a_*$, $b = b_*$, $\varphi = \varphi_*$ si trova:

1₃) $A = \begin{vmatrix} \alpha\left(1 - 3\frac{a_*^2}{a_0^2}\right) & m \operatorname{sen} \varphi_* & mb \cos \varphi_* \\ 0 & 0 & \frac{-a_* n}{\operatorname{csc} \varphi_*} \\ \frac{1}{2a_*\beta}(\beta^2 + 4mn) & \frac{\cos \varphi_*}{4na_*}(\beta^2 + 4mn) & \alpha\left(1 - \frac{a_*^2}{a_0^2}\right) \end{vmatrix}$

⁵⁾ Confronta per esempio il lavoro citato in (2).

Per la stabilità approssimata occorre e basta che sia:

$$2_2) \quad \Sigma_r a_{rr} < 0, \quad A < 0, \quad A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr} > 0.$$

La $2_2)_1$ diventa in base ad 1_3)

$$3_2) \quad \Sigma_r a_{rr} = 2\alpha \left(1 - 2 \frac{a_{**}^2}{a_0^2} \right) < 0$$

che comporta

$$4_2) \quad a^{*2} > \frac{a_0^2}{2}$$

La $2_2)_2$ diviene

$$A = -\frac{\alpha}{2} \frac{a^{*2}}{a_0^2} (\beta^2 + 4mn) < 0$$

che è sempre soddisfatta.

Infine la $2_3)_3$ con facili calcoli si scrive

$$5_2) \quad A - \Sigma_r a_{rr} \Sigma_r A_{rr} = -2\alpha 3 \left(1 - \frac{a_{**}^2}{a_0^2} \right) \left(1 - 2 \frac{a_{**}^2}{a_0^2} \right) \left(1 - 3 \frac{a_{**}^2}{a_0^2} \right) - \\ - \frac{\alpha}{2\beta_{**}^2} \left(1 - 2 \frac{a_{**}^2}{a_0^2} \right) (\beta^2 + 4mn)^2 - \frac{\alpha}{2} \frac{a_{**}^2}{a_0^2} (\beta^2 + 4mn) > 0.$$

Per quanto riguarda quest'ultima poniamo $\lambda^2 = \frac{a_{**}^2}{a_0^2}$ e denotiamo con $\varphi(\lambda^2)$ l'espressione che compare a secondo membro di $5_2)$. Si riconosce allora senz'altro che risulta $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $\varphi(1) > 0$ e che le eventuali soluzioni di $\varphi'(\lambda^2) = 0$ non superano certamente 1. Tanto basta per dire che la φ è crescente a destra di 1 ed essendo positiva in 1, essa sarà sempre positiva per $\lambda^2 > r$ ove è r la maggiore delle radici reali dell'equazione cubica $\varphi(\lambda^2) = 0$ ed è da notare che certamente è $\frac{1}{2} < r < 1$. Anzi poichè nella espressione di φ compare β che può avere due determinazioni, nel seguito chiameremo r_+ ed r_- le più grandi soluzioni reali e positive delle equazioni $\varphi(\lambda^2) = 0$ corrispondentemente al valore β_+ o β_- attribuito a β .

Quindi la $5_2)$ risulta soddisfatta se

$$6_2) \quad \frac{a_{**}^2}{a_0^2} > r$$

e poichè r (sia esso r_+ o r_-) è sempre certamente maggiore di $\frac{1}{2}$ la 6₃) comprende anche le 4₃).

Possiamo intanto concludere che una soluzione a.p. è a.s. se è soddisfatta la 6₃), anzi addirittura possiamo dire che se vale la 6₃) la soluzione a.p. esiste ed è a.s.

Cominciamo quindi a considerare la soluzione s_+ . La 6₃) comporta, ricordando della 13₂)₁,

$$7_3) \quad 1 - \frac{2mh}{\alpha\beta_+} > r_+,$$

la quale equivale a

$$8_3) \quad h < h_+ = \frac{1 - r_+}{2m} \alpha\beta_+$$

ove si tenga presente che è $h_+ > 0$ poichè $r_+ < 1$.

Per la stabilità di s_- in base ancora a 6₃) basta che sia

$$9_3) \quad 1 - \frac{2mh}{\alpha\beta_-} > r_-$$

ovvero

$$10_3) \quad h > h_- = \frac{1 - r_-}{2m} \alpha\beta_-$$

con $h_- < 0$.

Se h è un parametro variabile indipendente da ogni altro, come potrebbe essere nel sistema meccanico portato ad esempio nel n. 1, in quanto in quel caso esso solo dipende dall'intensità del campo magnetico, si può senz'altro concludere.

In effetto supposto per un momento che l'equazione $\varphi(\lambda^2) = 0$ abbia una sola soluzione reale e fatte le seguenti posizioni

$$B_+ = \frac{\alpha\beta_+}{2m} \quad B_- = \frac{\alpha\beta_-}{2m}$$

si ha la situazione rappresentata in fig. 3 che si riassume nel modo seguente:

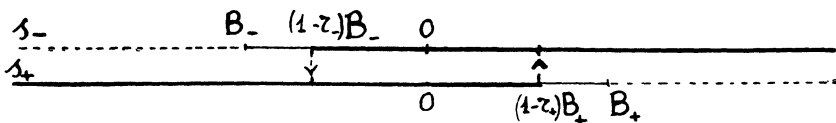


Fig. 3

- per $h < B_-$ esiste solo s_+ ed è a.s.,
- per $B_- < h < (1 - r_-)B_-$ esistono tutte e due le soluzioni ma solo s_+ è a.s.,
- per $(1 - r_-)B_- < h < (1 - r_+)B_+$ esistono tutte e due le soluzioni e sono a.s.,
- per $(1 - r_+)B_+ < h < B_+$ esistono tutte e due le soluzioni ma solo s_- è a.s.,
- per $B_+ < h$ esiste solo s_- ed è a.s..

Per valori di h minori di B_- il sistema oscilla sulla s_+ e continua ad oscillare su essa anche variando h fino al valore $(1 - r_+)B_+$. A questo punto essa diviene instabile ed allora il sistema cambia bruscamente frequenza e passa ad oscillare su s_- continuando ad oscillare su questa frequenza al crescere di h . Facendo ora variare in senso inverso h , il salto brusco di frequenza si ha quando h decrescendo raggiunge il valore $(1 - r_-)B_-$.

Notiamo qui che l'ipotesi che $\varphi(\lambda^2) = 0$ abbia una sola soluzione reale ⁶⁾ per $\beta = \beta_+$ o $\beta = \beta_-$ non è restrittiva in quanto, se si lascia cadere tale ipotesi, e si suppone, per esempio, che le due equazioni $\varphi(\lambda^2, \beta_+) = 0$, $\varphi(\lambda^2, \beta_-) = 0$ abbiano tre soluzioni reali interne all'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$, soluzioni che denoteremo con $r_+^{(i)}$, $r_-^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), si ha la situazione rappresentata in fig. 4 che è di agevole interpretazione (i jumps, col loro verso sono indicati con la freccia).

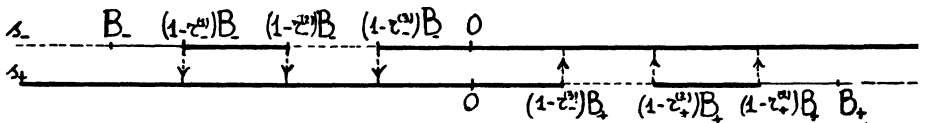


Fig. 4

Se bene si osserva, si vede subito che la situazione sostanzialmente non muta se si inizia l'esperienza da un valore di h mino-

⁶⁾ Non ho voluto appesantire la discussione cercando le condizioni che assicurano l'esistenza di una sola soluzione reale dell'equazione.

re di B . Se invece si parte da un valore di h interno all'intervallo $((1 - r_{-}^{(1)})B_{-}, (1 - r_{-}^{(2)})B_{-})$ mentre il sistema oscilla su s_{-} , al crescere di h si hanno due jumps, uno in corrispondenza al valore $h = (1 - r_{-}^{(2)})B_{-}$ da s_{-} ad s_{+} ed uno per $h = (1 - r_{+}^{(1)})B_{+}$ da s_{+} ad s_{-} .

4. - Se non si può far variare il solo parametro h , la discussione, fatta alla fine del numero precedente, non va più bene. E' il caso del circuito oscillante di VAN DER POL che abbiamo descritto nel n. 1. Per esso occorre una discussione un po' meno semplice ma non meno interessante e che fa ritrovare almeno in parte i risultati di VAN DER POL.

Se nel circuito oscillante di fig. 1 si fa variare l'induttanza L , allora il parametro variabile diviene ω_2^2 e su questo parametro occorre rifare la discussione.

La condizione 8₃) diventa, se si tien conto delle posizioni 5₁)

$$1_4) \quad 2\alpha_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)(1 - K^2) < (1 - r_{+})(\alpha_1 - \alpha_2)[\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2\omega_2^2 K^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2}].$$

Se maggioriamo il secondo membro, la 1₄) è verificata se è

$$\alpha_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)(1 - K^2) < (1 - r_{+})(\alpha_1 - \alpha_2)(\omega_1^2 + \omega_2^2 K),$$

ovvero

$$\omega_2^2[\alpha_2(1 - k^2 r_{+}) - \alpha_1 k^2(1 - r_{+})] < \omega_1^2[\alpha_1(1 - r_{+}) + \alpha_2(r_{+} - k^2)],$$

Se si fa ora l'ipotesi

$$2_4) \quad \frac{K^2(1 - r_{+})}{1 - K^2 r_{+}} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 1$$

allora la condizione 1₄) non è certamente verificata se

$$3_4) \quad \omega_2^2 > \frac{(1 - r_{-})\alpha_1 + \alpha_2(r_{+} - K^2)}{\alpha_2(1 - K^2 r_{+}) - \alpha_1 K^2(1 - r_{+})}.$$

D'altra parte la 10₃) diventa

$$4_4) \quad 2\alpha_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)(1 - k^2) > (\alpha_1 - \alpha_2)(1 - r_{-})[\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2\omega_2^2 k^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k^2\omega_1^2}],$$

e minorando il secondo membro la 10₃) è verificata se

$$\alpha_2(\omega_1^2 - \omega_2^2) < (\alpha_1 - \alpha_2)(1 - r_-)\omega_2^2.$$

Da qui si ha che se

$$5_4) \quad \omega_2^2 < \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)(1 - r_-)} \omega_1^2$$

la condizione di stabilità per s_- non è certamente soddisfatta.

Per concludere basta ricordare che sia r_+ che r_- appartengono, per qualunque valore di ω_2^2 , da cui dipendono, all'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$ onde esistono certamente due numeri Ω_1, Ω_2 soddisfacenti alle $0 < \Omega_1 < 1, \Omega_2 > 1$, tali che se $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} < \Omega_1$ è stabile solo s_+ e se $\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} > \Omega_2$ è stabile solo s_- .

Per sincerarsene si osservi che la 2₄) è certamente verificata se

$$\frac{k^2}{2(1 - k^2)} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 1,$$

e si ha certamente instabilità per la s_+ se

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} > \frac{\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2(1 - k_2)}{\alpha_2(1 - k^2) - \frac{1}{2}\alpha_1 k^2},$$

così come è certamente instabile la s_- se è

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} < \frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha}.$$

Poichè d'altro canto, come facilmente si vede, se $\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$ è prossimo ad 1 sono stabili tutte e due le soluzioni si può dire di aver ritrovato, almeno sostanzialmente se non formalmente, i risultati di VAN DER POL.