Rendiconti *del* Seminario Matematico *della* Università di Padova

Bruno Pini

Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell' elasticità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 345-369

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__345_0>

SUL PRIMO PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO DELLA TEORIA DELL' ELASTICITÀ

Memoria (*) *di* BRUNO PINI (*a Bologna*)

Indicato con D un dominio e con $\mathfrak{F}D$ la sua frontiera, il primo problema di valori al contorno della teoria dell elasticità consiste nella determinazione di un vettore $\boldsymbol{u}$ tale che

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta \boldsymbol{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 & \text{in } D \\ \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} & \text{in } \mathfrak{F}D \end{cases}$$

nell' ipotesi, cui ci si può sempre ricondurre, che non esistano forze di massa.

La soluzione di tale problema è stata ottenuta mediante traduzione in equazioni integrali da LAURICELLA, MARCOLONGO, BOGGIO e LICHTENSTEIN, in certe ipotesi di regolarità della $\mathfrak{F}D$ e nell'ipotesi che le componenti dello spostamento prescritto sulla $\mathfrak{F}D$ siano continue o, più in particolare, dotate di derivate continue.

(*) Pervenuta in Redazione il 7 maggio 1952.

G. LAURICELLA, *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla Fisica-Matematica.* « Nuovo Cimento », s. V, t. 13 (1907).

R. MARCOLONGO, *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-Matematica.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XVI, s. 5ª (1907).

T. BOGGIO, *Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell' elasticità.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XVI, s. 5ª (1907).

L. LICHTENSTEIN, *Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.* « Math. Zeitschrift », 20 (1924), 21-28.

Recentemente tale problema è stato ripreso, da punti di vista diversi, da K. O. FRIEDRICHS e G. FICHERA.

Il problema considerato da FRIEDRICHS è il seguente:

Posto $s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, scritte le equazioni dell'elasticità nella forma

$$a \sum_j \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} + b \sum_j \frac{\partial s_{jj}}{\partial x_i} = 0 \qquad a > 0\,, \quad b > -\frac{a}{N}\,,$$

sia D un dominio con $\mathfrak{F}D$ dotata di normale continua.

S' indichi con H lo spazio dei vettori con le componenti continue insieme alle loro derivate e per cui è limitato l'integrale di Dirichlet

$$I(u) = \Sigma_{ij} \int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial \nu_j}\right)^2 dP\,;$$

con $\dot{H}$ il sottospazio di H dei vettori nulli in uno strato attorno a $\mathfrak{F}D$, in D; con H^0 lo spazio di vettori approssimabili con vettori di $\dot{H}$ per cui $I(u - \dot{u}) \to 0$.

Sia poi K lo spazio dei vettori di H che convergono in media su D, secondo il quadrato, insieme alle loro derivate parziali; K^0 il sottospazio dei vettori di $\dot{H}$ per cui

$$\int_D (u_i^{(m)} - u_i^{(n)})^2 dP \to 0\,, \qquad \int_D \left(\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j}\right)^2 dP \to 0\,.$$

Ebbene FRIEDRICHS prova l'esistenza e l'unicità di un vettore u che su $\mathfrak{F}D$ si riduce a un assegnato $\bar{u}$ di K nel senso che la differenza $u - \bar{u}$ appartiene a K^0, e che nell'interno di D è soluzione delle equazioni dell'elasticità. Il metodo seguito,

---

K. O. FRIEDRICHS, *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality.* « Annals of Mathematics », 48 (1947) 441-471.

G. FICHERA, *Sull'equilibrio di un corpo elastico isotropo omogeneo.* « Rend. Sem. Mat. Università di Padova », XVII (1948), 9-28. *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all' equilibrio di un corpo elastico.* « Annali Scuola Normale Sup. Pisa », S. III, vol. IV (1950), 35-99.

nell'indirizzo di COURANT, consiste nel minimizzare l'integrale

$$\int_D (a\,\Sigma_{ij}\, s_{ij}^2 + b\,\Sigma_i\, s_{ii}^2)dP .$$

I problemi considerati da G. FICHERA sono di natura alquanto diversa. Essi sono del seguente tenore:

Determinare un vettore $\boldsymbol{u}$ continuo in $D - \mathfrak{F}D$ insieme alle derivate prime e seconde e ivi verificante le equazioni della elasticità, tale che, detto P un punto a piacere di $D - \mathfrak{F}D$ e Q un punto di $\mathfrak{F}D$, se $\boldsymbol{f}$ è il vettore rappresentativo delle forze superficiali corrispondenti allo spostamento $\boldsymbol{u}$, si abbia per quasi-tutti i punti Q di $\mathfrak{F}D$,

$$\lim_{P \to Q} \boldsymbol{u}(P) = \boldsymbol{u}(Q) \quad , \quad \lim_{P \to Q} \boldsymbol{f}(P) = \boldsymbol{f}(Q)$$

intendendosi il limite fatto secondo la normale alla $\mathfrak{F}D$ ed essendo $\boldsymbol{u}(Q)$ ed $\boldsymbol{f}(Q)$ due vettori sommabili su $\mathfrak{F}D$.

Il metodo seguito nella trattazione di questo e di altri problemi è quello della traduzione in sistemi di equazioni di FISCHER-RIESZ.

Nel presente lavoro viene trattato un problema di valori al contorno del tipo di quello posto e trattato da G. CIMMINO per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine.

Allo scopo di illustrare tale problema e di giustificarne la posizione, conviene esporlo in un caso particolare.

Si consideri nel piano x, y il cerchio col centro nell'origine e raggio 1.

La più generale soluzione di $\Delta\boldsymbol{u} + k \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ è fornita da

$$(2)\quad \begin{cases} u_1(\rho, \varphi) = \displaystyle\sum_0^\infty{}_n\, \rho^n(a_{n1}\cos n\varphi + b_{n1}\operatorname{sen} n\varphi) + \\ \quad + \dfrac{k}{2(2+k)}(1-\rho^2)\displaystyle\sum_2^\infty{}_n\, n\rho^{n-2}[\,a_{n1} + b_{n2})\cos(n-2)\varphi + \\ \qquad\qquad + (b_{n1} - a_{n2})\operatorname{sen}(n-2)\varphi] \\ u_2(\rho, \varphi) = \displaystyle\sum_0^\infty{}_n\, \rho^n(a_{n2}\cos n\varphi + b_{n2}\operatorname{sen} n\varphi) + \\ \quad + \dfrac{k}{2(2+k)}(1-\rho^2)\displaystyle\sum_2^\infty{}_n\, n\rho^{n-2}[-(a_{n1} + b_{n2})\operatorname{sen}(n-2)\varphi + \\ \qquad\qquad + (b_{n1} - a_{n2})\cos(n-2)\varphi] , \end{cases}$$

ove si indichi con ρ la distanza dal centro d'un arbitrario punto del cerchio.

Supponiamo che a_{n1}, b_{n1}, e a_{n2}, b_{n2} siano i coefficienti di Fourier di due funzioni $\bar{u}_1(\varphi)$, $\bar{u}_2(\varphi)$ di quadrato sommabile su $(0, 2\pi)$. Ebbene, il vettore u_1, u_2 definito dalle (2) converge in media sulla frontiera del cerchio al vettore $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, nel senso che

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi}[(u_1-\bar{u}_1)^2+(u_2-\bar{u}_2)^2]d\varphi=0\,.$$

Si ha

$$(4)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(u_1-\bar{u}_1)^2d\varphi=\sum_1^\infty{}_n\,(1-\rho^n)^2(a_{n1}^2+b_{n1}^2)+$$
$$+\frac{k^2}{4(2+k)^2}(1-\rho^2)^2[8(a_{21}+b_{22})^2+\sum_3^\infty{}_n\,n^2\rho^{2n-4}(a_{n1}+b_{n2})^2+$$
$$+(b_{n1}-a_{n2})^2]+\frac{k}{2+k}(1-\rho^2)\sum_1^\infty{}_n\,(\rho^n-1)(n+2)\rho^n[a_{n1}(a_{n+2,1}+$$
$$+b_{n+2,2})+b_{n1}(b_{n+2,1}-a_{n+2,2})]\,,$$

e le serie a secondo membro convergono a zero per $\rho\to 1$. Per la prima l'affermazione è evidente. Per le altre due basta fare la seguente osservazione:

Sia $\sum_1^\infty{}_n\,u_n$ una serie (assolutamente) convergente, e si consideri la serie

$$\sum_1^\infty{}_n\,(1-\rho^2)^2n^2\rho^{2n}\cdot u_n\,;$$

al variare di ρ da 0 ad 1 e di n da 1 a $+\infty$, è $(1-\rho^2)^2n^2\rho^{2n}<4$; applicando la trasformazione di BRUNACCI-ABEL si ha

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}{}_h\,(1-\rho^2)^2h^2\rho^{2h}u_h\right|<(1-\rho^2)^2(n+1)^2\rho^{2(n+1)}\,|R_n|+$$
$$+\sum_1^{p-1}{}_i\,(1-\rho^2)^2\,|(n+i+1)^2\rho^{2(n+i+1)}-(n+i)^2\rho^{2(n+i)}|\,\cdot$$
$$\cdot\,|R_{n+i}|+(1-\rho^2)^2(n+p)^2\rho^{2(n+p)}\cdot|R_{n+p}|$$

dove $R_m=\sum_{m+1}^\infty{}_h\,u_h$. Osservando che $n^2\rho^{2n}-(n+1)^2\rho^{2(n+1)}\gtrless 0$ per $\rho\gtrless\frac{n}{n+1}$, riesce in ogni caso, qualunque sia il numero naturale p e $0 \leq \rho \leq 1$,

$$\sum_{1}^{p-1}{}_i (1-\rho^2)^2 \,|\, (n+i+1)^2 \rho^{2(n+i+1)} - (n+i)^2 \rho^{2(n+i)} \,| < 16$$

perchè, o le differenze, di cui nella somma scritta figurano i valori assoluti, sono tutte positive, oppure sono tutte negative, e allora tale somma è certamente < 8; oppure sono tutte positive (negative) fino a quella corrispondente ad $i = \nu$ e da questa in poi sono tutte negative (positive) onde tale somma si può scrivere

$$\left| \sum_{1}^{\nu}{}_i (1-\rho^2)^2 ((n+i+1)^2 \rho^{2(n+i+1)} - (n+i)\, \rho^{2(n+i)}) \right| +$$
$$+ \left| \sum_{\nu+1}^{p-1}{}_i (1-\rho^2)^2 ((n+i+1)^2 \rho^{2(n+i+1)} - (n+i)^2 \rho^{2(n+i)}) \right| .$$

Si conclude che la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_n (1-\rho^2)^2 n^2 \rho^{2n} \cdot u_n$ è uniformemente convergente per $0 \leq \rho \leq 1$ onde la sua somma converge a zero per $\rho \to 1$.

Pertanto la seconda serie a secondo membro in (4) converge a zero per $\rho \to 1$. Stesse considerazioni si possono fare per la terza serie.

Resta con ciò provato che il vettore (2) converge in media sulla frontiera del cerchio al vettore $\bar{u}$. D'altra parte si ha

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (u_1^2 + u_2^2) d\varphi = \sum_{1}^{2}{}_i \, [2a_{0i}^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_n (a_{ni}^2 + b_{ni}^2)]$$

e quindi la convergenza in media a zero richiede che il vettore sia identicamente nullo; da ciò l'unicità del vettore soddisfacente la (3).

Si pone perciò naturalmente il seguente problema:

Sia D un dominio che per semplicità supponiamo semplicemente connesso; la sua frontiera $\mathfrak{F}D$ sia una superficie S che supporremo dotata di piano tangente e curvature principali continue, della quale

$$x_i = \bar{x}_i(\alpha, \beta) \qquad\qquad (\alpha, \beta) \subset R$$

sia una rappresentazione parametrica regolare.

Consideriamo la famiglia di superfici S_t parallele ad S

$$x_i = \bar{x}_i(\alpha, \beta) + t\nu_i(\alpha, \beta) \qquad\qquad 0 \leq t \leq t_0$$

essendo $n \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ il versore della normale interna.

Assegnato su R un vettore $\bar{u}$ col quadrato della norma sommabile, determinare un vettore u tale che

$$(5) \qquad \begin{cases} \Delta u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad D - \mathfrak{F}D \\ \lim\limits_{t \to 0} \iint\limits_{S_t} |u - \bar{u}|^2 d\sigma = 0 \end{cases}$$

Questo problema è l' analogo, per le equazioni dell'elasticità, del problema posto e trattato da G. CIMMINO per le equazioni lineari di tipo ellittico del secondo ordine.

La trattazione è fatta con gli stessi procedimenti di G. CIMMINO i quali si sono dimostrati efficaci a trattare problemi analoghi a questi, e problemi ordinari, per svariati tipi di equazioni. Attualmente ci si è limitati alle equazioni dell'elasticità ma, come mostreremo altrove, essi possono servire egualmente bene a trattare un problema di valori al contorno, analogo a quello qui presentato, per sistemi ellittici in senso forte a coefficienti variabili.

Teoremi di unicità.

Indicando con R_1, R_2; E, F, G rispettivamente le curvature principali e i simboli di GAUSS relativi ad S, poniamo

$$\Pi = \sqrt{\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \beta} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta} & \frac{\partial x_3}{\partial \beta} \end{matrix} \right\|} = \sqrt{EG - F^2}\left(1 - \frac{t}{R_1}\right)\left(1 - \frac{t}{R_2}\right)$$

onde $\displaystyle\iint\limits_{R} (\Pi\,|u|^2)_{S_t} d\alpha d\beta = \iint\limits_{S_t} |u|^2 d\sigma.$

G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet.* « Rend. Circolo Mat. Palermo », 61 (1937) 177-220.

1° teorema di unicità. — *Se $k > -1$ e $\boldsymbol{u}$ è un vettore col quadrato della norma sommabile su R, nella classe dei vettori $\boldsymbol{u}$ continui con le derivate prime e seconde in $D - \mathcal{F}D$, con* $(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2$ *e* $|\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2$ *sommabili su D, ne esiste al più uno tale che*

$$(5)\qquad \begin{cases} \Delta \boldsymbol{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad D - \mathcal{F}D \\ \lim\limits_{t \to 0} \iint\limits_R \Pi |\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}|^2 d\alpha d\beta = 0 . \end{cases}$$

Se $\boldsymbol{u}$ è un vettore biregolare in D, sussiste l'identità (*)

$$(6)\qquad \iint\limits_{\mathcal{F}D} \boldsymbol{u} \times \left[(k - \lambda) \operatorname{div} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + (1 + \lambda) \frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{n}} + \lambda(\boldsymbol{n} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u})\right] d\sigma +$$

$$+ \iiint \boldsymbol{u} \times (\Delta \boldsymbol{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}) dP + \iiint\limits_D \Bigg[k (\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 +$$

$$+ \sum_1^3{}_i |\operatorname{grad} u_i|^2 - 2\lambda \sum_{\substack{1 \\ i<j}}^3{}_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Bigg] dP = 0 ;$$

qualora si prenda la costante λ in modo che sia $-1 < \lambda < \begin{cases} 1 \\ \dfrac{3k+1}{2} \end{cases}$ la forma quadratica nelle componenti dei vettori $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}$ sotto al segno dell'ultimo integrale, è definita positiva.

Supponiamo, per assurdo, l'esistenza di due vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ soddisfacenti le condizioni dichiarate nell'enunciato e indichiamone con $\boldsymbol{u}$ la differenza. Si ha

$$\frac{d}{dt} \left[\exp \left\{ - H \int_0^t \left(\iint\limits_{S_t} ((\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + |\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2) d\sigma \right) dt \right\} \cdot \iint\limits_R (\Pi |\boldsymbol{u}|^2)_{S_t} d\alpha d\beta \right] =$$

$$= \exp \left\{ - H \int_0^t \left(\iint\limits_{S_t} ((\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + |\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2) d\sigma \right) dt \right\} \cdot \left\{ - H \iint\limits_{S_t} [(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + \right.$$

Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson. « Rend. Sem. Mat. Padova » (1940) 28-96.

Equazione di Poisson e problema generalizzato di Dirichlet. « Rend. Acc. d'Italia » (7) 1 (1940) 322-329.

(*) Cfr. il secondo dei citati lavori di G. FICHERA.

$$+ |\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}|^2]d\sigma \cdot \iint (\Pi |\boldsymbol{u}|^2)_{S_t} d\alpha d\beta + \iint_R \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} |\boldsymbol{u}|^2\right)_{S_t} d\alpha d\beta +$$

$$+ 2 \iint_R \left(\Pi \boldsymbol{u} \times \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)_{S_t} d\alpha d\beta \Big\} .$$

L'ultimo integrale a secondo membro si può scrivere

$$\iint_{S_t} \boldsymbol{u} \times \frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{n}} d\sigma ,$$

ossia, per l'identità (6) relativa al dominio D_t di frontiera S_t,

$$-\frac{1}{1+\lambda} \iint_{S_t} \boldsymbol{u} \times [(k-\lambda)\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + \lambda(\boldsymbol{n} \wedge \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u})] d\sigma -$$

$$-\frac{1}{1+\lambda} \iiint_{D_t} \Big[k(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u})^2 + \sum_1^3{}_i |\mathrm{grad}\, u_i|^2 - 2\lambda \sum_{\substack{1\\ i<j}}^3{}_{ij} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} -$$

$$- \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big) \Big] dP .$$

In definitiva, si può scrivere:

$$\frac{d}{dt}\Big[\exp\Big\{ -H \int_0^t \Big(\iint_{S_t} ((\mathrm{div}\, \boldsymbol{u})^2 + |\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}|^2) d\sigma \Big) dt \Big\} \cdot \tag{7}$$

$$\cdot \iint_R (\Pi |\boldsymbol{u}|^2)_{S_t} d\alpha d\beta \Big] = \exp \Big\{ -H \int_0^t \Big(\iint_{S_t} [(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u})^2 +$$

$$+ |\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}|^2] d\sigma \Big) dt \Big\} \cdot \Big\{ -H \iint_{S_t} [(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u})^2 + |\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}|^2] d\sigma \iint_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma -$$

$$- \iint_R \Big[\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2t}{R_1 R_2} \Big) \sqrt{EG - F^2}\, |\boldsymbol{u}|^2 \Big]_{S_t} d\alpha d\beta -$$

$$- \frac{2}{1+\lambda} \iint_{S_t} \boldsymbol{u} \times [(k-\lambda)\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + \lambda(\boldsymbol{n} \wedge \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u})]\, d\sigma -$$

$$- \frac{2}{1+\lambda} \iiint_{D_t} \Big[k\, (\mathrm{div}\, \boldsymbol{u})^2 + \sum_1^3{}_i |\mathrm{grad}\, u_i|^2 -$$

$$- 2\lambda \sum_{\substack{1\\ i<j}}^3{}_{ij} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big) \Big] dP \Big\} .$$

Si ha

$$\left|\iint_{S_t} \boldsymbol{u} \times [(k-\lambda) \operatorname{div} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + \lambda(\boldsymbol{n} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u})] d\sigma \right| < C \left\{ \iint_{S_t} [(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + \right.$$
$$\left. + |\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2] d\sigma \iint_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma \right\}^{1/2}$$

dove C è una certa costante positiva dipendente da k e λ.

Ora l'$\iint_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma$ è, per ipotesi, un infinitesimo per $t \to 0$; se $\iint_{S_t} [(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + |\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2] d\sigma$ è, per $t \to 0$, al più un infinito dello stesso ordine del precedente infinitesimo, si può scegliere la costante H in modo che tutta l'espressione a secondo membro in (7), almeno per t abbastanza piccolo, sia negativa. Se invece tale integrale è, per $t \to 0$, un infinito d'ordine maggiore di quello dell' infinitesimo che lo moltiplica [si noti che $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ e $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ sono uno scalare e un vettore armonici onde le loro medie quadratiche su S_t crescono per $t \to 0$], si potrà ancora evidentemente scegliere H in modo che sia

$$H \iint_{S_t} [(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + |\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2] d\sigma \iint_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma > C \left\{ \iint_{S_t} [(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + \right.$$
$$\left. + |\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2] d\sigma \iint_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma \right\}^{1/2}.$$

Pertanto, in ogni caso, per t abbastanza piccolo, il primo membro di (7) è negativo e quindi

$$\exp\left\{ -H \int_0^t \left(\iint_{S_t} [(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + |\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2] d\sigma \right) dt \right\} \cdot \iint_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma$$

sarà una funzione crescente per $t \to 0$, il che contraddice l' ipotesi che sia $\lim\limits_{t \to 0} \iint_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma = 0$.

Il teorema di unicità ora provato è limitato alla classe dei vettori per cui $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ e $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ sono di quadrato sommabile in

D. Ma evidentemente se sullo spostamento prescritto in superficie si fa la sola ipotesi che esso abbia la norma di quadrato sommabile, tale condizione non può essere richiesta. Per esempio, ritornando al caso piano del cerchio, si ha

$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} (\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 \rho d\rho d\varphi = \frac{2\pi}{(2+k)^2} \Big\{ (a_{11} + b_{12})^2 \cdot 2\rho^2 + \sum_2^\infty {}_n\, n\rho^{2n} [(a_{n1} + b_{n2})^2 + (b_{n1} - a_{n2})^2] \Big\}$$

e la serie a secondo membro, nella sola ipotesi che le serie $\sum_0^\infty {}_n\, a_{ni}^2$ e $\sum_0^\infty {}_n\, b_{ni}^2$ siano convergenti, può non convergere per $\rho \to 1$.

2° teorema di unicità. — *Se* $-\frac{1}{2} < k < 2$, *nella classe dei vettori* $\boldsymbol{u}$ *continui con le derivate prime e seconde in* $D - \mathfrak{F}D$, *ne esiste al più uno tale che*

$$\Delta \boldsymbol{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in } D - \mathfrak{F}D$$

$$\lim_{t \to 0} \iint_{S_t} |\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}|^2 d\sigma = 0 .$$

La restrizione imposta a k è suggerita da opportunità algoritmiche. Essa deve però potersi sopprimere, almeno come limitazione superiore.

Come precedentemente, sia $\boldsymbol{u}$ la differenza tra due soluzioni $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ convergenti in media allo stesso vettore $\overline{\boldsymbol{u}}$.

Poniamo nella (6), relativa al dominio D_t, $\lambda = \frac{k}{2}$. Si ha

$$(8) \qquad \frac{d}{dt} \iint_R (\Pi |\boldsymbol{u}|^2)_{S_t} d\alpha d\beta = \iint_R \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} |\boldsymbol{u}|^2 \right)_{S_t} d\alpha d\beta -$$
$$- \frac{2k}{2+k} \iint_{S_t} \boldsymbol{u} \times (\operatorname{div} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u}) d\sigma - \frac{4}{2+k} \iiint_{D_t} \Big[k (\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 +$$
$$+ \sum_1^3 {}_i\, |\operatorname{grad} u_i|^2 - k \sum_{\substack{1 \\ i<j}}^3 {}_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Big] dP .$$

La forma quadratica, nelle componenti dei vettori $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}$, che figura nell' ultimo integrale, è definita positiva se $-\frac{1}{2} < k < 2$.

Integriamo la (8) tra t_1 e t_2, $t_1 < t_2$. Si ha

$$\int_{t_1}^{t} dt \iint_{S_t} \boldsymbol{u} \times (\operatorname{div} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u}) d\sigma = \iiint_{D(t_1, t_2)} \boldsymbol{u} \times (\operatorname{div} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u}) dP$$

avendo indicato con $D(t_1, t_2)$ lo strato $D_{t_1} - D_{t_2}$ e tenendo presente che $\frac{\partial(x_1 x_2 x_3)}{\partial(\alpha, \beta, t)} = \Pi$.

Ma $$\boldsymbol{u} \times [\operatorname{div} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u}] = \frac{1}{2} \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + \frac{1}{2} \nu_2 \frac{\partial}{\partial x_2}(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + \frac{1}{2} \nu_3 \frac{\partial}{\partial x_3}(-u_1^2 - u^2 + u_3^2) + \nu_1 \left[\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_1 u_3)}{\partial x_3}\right] + \nu_2 \left[\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 u_3)}{\partial x_3}\right] + \nu_3 \left[\frac{\partial(u_1 u_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 u_3)}{\partial x_2}\right];$$

l' integrale precedente si può scrivere perciò

$$(9) \qquad \iint_{\mathfrak{F}D(t_1, t_2)} \left\{ \left[\frac{1}{2} \nu_1 (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + \nu_2 u_1 u_2 + \nu_3 u_1 u_3\right] dx_2 dx_3 + \left[\frac{1}{2} \nu_2 (-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + \nu_1 u_1 u_2 + \nu_3 u_2 u_3\right] dx_3 dx_1 + \left[\frac{1}{2} \nu_3 (-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2) + \nu_1 u_1 u_3 + \nu_2 u_2 u_3\right] dx_1 dx_2 \right\} - \frac{1}{2} \iiint_{D(t_1, t_2)} \left[(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) \frac{\partial \nu_1}{\partial x_1} + (-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) \frac{\partial \nu_2}{\partial x_2} + (-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2) \frac{\partial \nu_3}{\partial x_3}\right] dP - \iiint_{D(t_1,t_2)} \left[\left(\frac{\partial \nu_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu_2}{\partial x_1}\right) u_1 u_2 + \left(\frac{\partial \nu_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu_3}{\partial x_2}\right) u_2 u_3 + \left(\frac{\partial \nu_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu_1}{\partial x_3}\right) u_1 u_3\right] dP,$$

tenendo presente che la superficie S è di classe 2.

Si ha poi, indicando brevemente con Q l' integrando dell' integrale triplo in (8)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D_t} Q dP = (t_2 - t_1) \iiint_{D_{t_2}} Q dP + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int_t^{t_2} \iint_R \Pi Q d\alpha d\beta dt \right),$$

che, eseguendo una integrazione per parti, si può scrivere

$$(t_2 - t_1) \iiint_{D_{t_2}} Q dP + \iiint_{D(t_1, t_2)} (t - t_1) Q dP .$$

D' altra parte l' integrale superficiale che figura nella (9) si può scrivere

$$-\left(\iint_{S_{t_1}} + \iint_{S_{t_2}} \right) \left[(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})^2 - \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}|^2 \right] d\sigma ,$$

tenendo presente che $\boldsymbol{n}$ è la normale interna ad S.

Pertanto, passando al limite per $t_1 \to 0$, ponendo T al posto di t_2, tenendo presente che per ipotesi $\lim\limits_{t \to 0} \iint_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma = 0$, si ha

$$(10) \quad \iint_{S_T} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma = \int_0^T dt \iint_R \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} |\boldsymbol{u}|^2 \right)_{S_t} d\alpha\, d\beta + \frac{k}{2+k} \iiint_{D-D_T} \Big\{ \Big[(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + (-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + (-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + 2 \Big[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) u_1 u_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) u_2 u_3 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) u_1 u_3 \Big] \Big\} dP + \frac{k}{2+k} \iint_{S_T} [2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})^2 - |\boldsymbol{u}|^2] d\sigma - \frac{4}{2+k} \left(T \iiint_{D_T} + \iiint_{D-D_T} t \right) \Big[k(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + \sum_1^3{}_i |\operatorname{grad} u_i|^2 - k \sum_{\substack{1 \\ i<j}}^3{}_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Big] dP .$$

Giunti a questo punto osserviamo che il primo ed il secondo integrale a secondo membro convergono a zero più rapidamente di T perchè $\iint\limits_{S_t} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma$ è per ipotesi un infinitesimo per $t \to 0$, mentre l'ultimo integrale è al più un infinitesimo come T; d' altra parte per ogni $k > -\frac{1}{2}$ si può trovare una costante positiva C_k tale che

$$C_k \iint\limits_{S_T} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma < \iint\limits_{S_T} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma - \frac{k}{2+k} \iint\limits_{S_T} [2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})^2 - |\boldsymbol{u}|^2] d\sigma .$$

Con ciò si è arrivati all' assurdo perchè, mentre la differenza tra il primo membro e il terzo integrale a secondo membro è positiva, la somma del primo secondo e quarto integrale a secondo membro è negativa almeno per T abbastanza piccolo

Proprietà di media.

Consideriamo il sistema

$$\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = \sum_{1}^{3}{}_{ij} \boldsymbol{A}_{ij} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{11}$$

dove le $\boldsymbol{A}_{ij}$ sono matrici costanti e $\boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ji}$.

Poniamo

$$\mathfrak{M}[\boldsymbol{v}] = \sum_{1}^{3}{}_{ij} \overline{\boldsymbol{A}}_{ij} \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{12}$$

dove il soprassegno indica trasposizione.

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{V}$ sono un vettore e una matrice dotati di derivate prime e seconde continue in un dominio $\mathfrak{D}$, dall' identità

$$\overline{\boldsymbol{V}}\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] - \overline{\mathfrak{M}[\boldsymbol{V}]}\boldsymbol{u} = \sum_{1}^{3}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{A}_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\boldsymbol{V}}}{\partial x_j}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{u}\right] \tag{13}$$

si deduce la seguente formula di reciprocità

$$\iiint\limits_{\mathfrak{D}} (\overline{\boldsymbol{V}}\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] - \overline{\mathfrak{M}[\boldsymbol{V}]}\boldsymbol{u}) dP = \sum_{1}^{3}{}_{j} \iint\limits_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \left[\left(\overline{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{A}_{3j}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} - \right.\right. \tag{14}$$

$$-\frac{\partial \overline{V}}{\partial x_j}A_{3j}u\Big)dx_1dx_2+\Big(\overline{V}A_{1j}\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial \overline{V}}{\partial x_j}A_{1j}u\Big)dx_2dx_3+$$
$$+\Big(\overline{V}A_{2j}\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial \overline{V}}{\partial x_j}A_{2j}u\Big)dx_3dx_1\Big].$$

Consideriamo in particolare il sistema

(15) $$\Delta u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

che scriviamo anche

(15) $$\mathfrak{L}[u] = \left\| \begin{matrix} \Delta + k\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} & k\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & k\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} \\ k\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \Delta + k\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & k\dfrac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} \\ k\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & k\dfrac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \Delta + k\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{matrix} \right\| u$$

dove la matrice va intesa nel senso di un operatore differenziale da applicare al vettore u secondo le regole solite.

Indichiamo con V la matrice di SOMIGLIANA

(16) $V(P, P_0) =$

$$= \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\rho}-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} & -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_2} & -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_3} \\ -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{1}{\rho}-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2} & -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_2\partial x_3} \\ -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_3} & -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{1}{\rho}-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_3^2} \end{matrix} \right\|$$

dove $\quad \rho = \overline{PP_0} \quad , \quad P \equiv (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$

le cui righe (colonne) sono costituite dalle componenti di tre vettori soluzioni di (15). Sarà

$$\mathfrak{L}[V] = \mathfrak{M}[V] = 0 .$$

Fissiamo il punto P_0 interno a D e un intorno sferico $\mathfrak{D}_0$

di raggio δ interno a D; indichiamo con $\mathfrak{D}_\varepsilon$ un intorno sferico di P_0 di raggio $\varepsilon < \delta$; siano $\mathfrak{S}_0$ e $\mathfrak{S}_\varepsilon$ le superfici di tali sfere. Poniamo

$$V^*(P, P_0) = \left(1 - \frac{\rho^6}{\delta^6}\right) V(P, P_0) . \tag{17}$$

La matrice V^* presenta per $P \to P_0$ lo stesso comportamento della matrice V; però, a differenza di questa, si annulla con le derivate prime e seconde su $\mathfrak{S}_0$. Sia u una soluzione di $\mathfrak{L}[u] = f$, regolare nell'interno di D. Dalla formula di reciprocità segue

$$\iiint_{\mathfrak{D}_0} (V^* f - \overline{\mathfrak{M}[V^*]} u) dP = -\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_1^3{}_j \iint_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \left[\left(V^* A_{3j} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\partial V^*}{\partial x_j} A_{3j} u\right) dx_1 dx_2 + \left(V^* A_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial V^*}{\partial x_j} A_{1j} u\right) dx_2 dx_3 +$$
$$\left. + \left(V^* A_{2j} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial V^*}{\partial x_j} A_{2j} u\right) dx_3 dx_1\right] .$$

Per il calcolo del limite a secondo membro si può sostituire V^* con V e si ottiene in definitiva

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}_0} (\overline{\mathfrak{L}[V^*]} u - V^* f) dP . \tag{18}$$

Questa formula di media (*) è caratteristica per le soluzioni regolari di $\mathfrak{L}[u] = f$.

Sia infatti u un vettore continuo con le derivate prime e seconde soddisfacente, in ogni punto P_0 e per tutti i δ abbastanza piccoli, la (18). Si ha

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}_0} (\overline{\mathfrak{L}[V^*]} u - V^* \mathfrak{L}[u]) dP$$

(*) Una formola di media di tipo superficiale è ovviamente contenuta nella formola risolutiva di ALMANSI, *Sulla deformazione della sfera elastica*, « Mem. Acc. Torino », 47 (1897). La formola di media qui stabilita è però immediatamente estendibile a un dominio convesso arbitrario (di frontiera opportunamente regolare) e si presenta assai più duttile per quelle applicazioni che ne faremo in seguito.

e per differenza dalla precedente

$$\iiint_{\mathfrak{D}_0} V^*(\mathfrak{L}[u] - f)dP = 0\,.$$

Ora è

$$V^* = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^6}{\delta^6}\right)^3 \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| + \frac{k}{2(1+k)} \cdot \right.$$

$$\cdot \left. \left\| \begin{matrix} -(\operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta), & \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}^2\theta, & \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}^2\theta, & -(\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta), & \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta, & \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta, & -\operatorname{sen}^2\theta \end{matrix} \right\| \right\}$$

in un sistema polare col polo in P_0; dall'esame dei minori principali si riconosce che la matrice tra $\{\ \}$ è definita positiva per $k + 1 > 0$. Pertanto, se fosse $\mathfrak{L}[u] \neq f$ in P_0, si avrebbe

$$\iiint_{\mathfrak{D}_0} \iiint_{\mathfrak{D}_0} V^*(P', P_0)[\mathfrak{L}[u(P') - f(P')] \times V^*(P'', P_0)[\mathfrak{L}[u(P'')] - \\ - f(P'')]dP'dP'' = 0$$

mentre, essendo $V^*(P, P_0)V^*(P, P_0)a \times a > 0$ ($|a| \neq 0$) per ogni punto P interno a $\mathfrak{D}_0$, l'integrando sarebbe positivo almeno per δ abbastanza piccolo.

In particolare

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}_0} \mathfrak{L}[V^*]u(P)dP \tag{19}$$

è la formola di media caratteristica delle soluzioni regolari di $\mathfrak{L}[u] = 0$.

Osserviamo che, essendo $\mathfrak{L}[V] \equiv 0$, la matrice $\mathfrak{L}[V^*]$ riesce continua in tutto D_0, compreso P_0, insieme alle sue derivate prime e seconde.

Si può allora dimostrare che:

Se u è di norma sommabile in D e verifica la proprietà di media, esso è conseguentemente continuo con le derivate prime e seconde e pertanto è soluzione regolare di $\mathfrak{L}[u] = 0$.

Ciò si può dedurre dall' esame diretto dei rapporti incrementali. Più semplicemente, poichè la precedente formola di media vale se $\mathfrak{D}$ è un arbitrario dominio convesso, qualora

δ indichi non più una costante ma la distanza di P_0 dal punto d'intersezione della $\mathfrak{F}D$ con P_0P, supposta la $\mathfrak{F}D$ di classe 2, si possono senz'altro eseguire due derivazioni rispetto alle coordinate di P_0 sotto al segno di integrale, presentandosi ora il vantaggio che la $\mathfrak{F}D$ è indipendente dal punto P_0, al variare di questo in un suo intorno.

Teorema di completezza.

Sia Σ lo spazio delle coppie di vettori $(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{s}})$ con $|\boldsymbol{t}|^p$ sommabile in D $(p > 1)$ e $|\bar{\boldsymbol{s}}|^2$ sommabile in R; Σ^* lo spazio, duale, delle coppie $(\boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{s}^*)$ con $|\boldsymbol{t}^*|^{p/(p-1)}$ sommabile in D e $|\boldsymbol{s}^*|^2$ sommabile in R; $\Sigma_{\mathfrak{L}}$ lo spazio delle coppie $(\mathfrak{L}[\boldsymbol{s}], \boldsymbol{s}_S)$ essendo $\boldsymbol{s}$ un vettore biregolare in D ed $\boldsymbol{s}_S$ indica il vettore $\boldsymbol{s}$ su $\mathfrak{F}D$.

Se

$$\iiint_D \boldsymbol{t}^* \times \mathfrak{L}[\boldsymbol{s}]dP + \iint_R \boldsymbol{s}^* \times \boldsymbol{s}_S d\alpha d\beta = 0 \tag{20}$$

per ogni vettore di $\Sigma_{\mathfrak{L}}$, allora $\Sigma_{\mathfrak{L}}$ è completo in Σ.

Fissiamo un punto P_0 interno a D e un suo intorno sferico $\mathfrak{D}_0$ di raggio δ abbastanza piccolo così da essere tutto contenuto in $D - \mathfrak{F}D$. Consideriamo la successione di matrici simmetriche

$$V_\nu(P, P_0) = \begin{cases} \left[1-\left(1-\dfrac{\rho^8}{\delta^8}\right)^\nu\right] V^*(P, P_0) & \text{per } \rho \leq \delta \\ 0 & \text{»}\ \ \rho > \delta \end{cases}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

dotate delle derivate prime e seconde continue.

Per la (20) si ha

$$\iiint_{\mathfrak{D}_0} \overline{\mathfrak{L}[V_\nu]} \boldsymbol{t}^* dP = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Sia $\mathfrak{D}_\varepsilon$ una sfera col centro in P_0 e raggio $\varepsilon < \delta$; si ha

$$\iiint_{\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_\varepsilon} \overline{\mathfrak{L}[V_\nu]} \boldsymbol{t}^* dP = -\iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon} \overline{\mathfrak{L}[V_\nu]} \boldsymbol{t}^* dP = -\iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon} \overline{\mathfrak{L}[V_\nu]} dP \cdot \boldsymbol{t}^*(P_0) -$$

$$-\iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon} \overline{\mathfrak{L}[V_\nu]} (\boldsymbol{t}^*(P) - \boldsymbol{t}^*(P_0)) dP.$$

Se a indica un vettore costante, dal teorema di reciprocità segue

$$\iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon} \overline{\mathfrak{L}[V_\nu]}a\,dP = \sum_1^3{}_i \iint_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \frac{\partial V_\nu}{\partial x_i}(A_{3i}dx_1dx_2 + A_{1i}dx_2dx_3 + A_{2i}dx_3dx_1)a$$

onde

$$\iiint_{\mathfrak{D}_0-\mathfrak{D}_\varepsilon} \overline{\mathfrak{L}[V_\nu]}t^*dP = -\sum_1^3{}_i \iint_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \frac{\partial V_\nu}{\partial x_i}(A_{3i}dx_1dx_2 + A_{1i}dx_2dx_3 +$$

$$+ A_{2i}dx_3dx_1)t^*(P_0) - \iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon} \overline{\mathfrak{L}[V_\nu]}(t^*(P) - t^*(P_0))dP.$$

Passiamo al limite per $\nu \to \infty$ e poi per $\varepsilon \to 0$. Il limite del primo addendo a secondo membro è $4\pi t^*(P_0)$. Mostriamo che il limite del secondo addendo esiste per quasi-tutti i punti P_0 di $D - \mathfrak{F}D$ ed è eguale a zero. Questo integrale si può scrivere

$$\iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon}\left[1-\left(1-\frac{\rho^3}{\delta^3}\right)^\nu\right]\overline{\mathfrak{L}[V^*]}(t^*(P) - t^*(P_0))dP + \frac{6\nu}{\delta^3}\iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon}\rho\left(1-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho^3}{\delta^3}\right)^{\nu-1}\sum_1^3{}_{ij}(x_j - x_j^0)\frac{\partial V^*}{\partial x_i}A_{ij}(t^*(P) - t^*(P_0))dP -$$

$$-\frac{9\nu(\nu-1)}{\delta^6}\iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon}\left(1-\frac{\rho^3}{\delta^3}\right)^{\nu-2}\cdot\rho^2\sum_1^3{}_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)V^*A_{ij}(t^*(P) -$$

$$-t^*(P_0))dP + \frac{3\nu}{\delta^3}\iiint_{\mathfrak{D}_\varepsilon}\left(1-\frac{\rho^3}{\delta^3}\right)^{\nu-1}V^*\left(\sum_1^3{}_{ij}\frac{(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}{\rho}A_{ij} +\right.$$

$$\left.+\rho\sum_1^3{}_i A_{ii}\right)\cdot(t^*(P) - t^*(P_0))dP.$$

Intanto il $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{\nu\to\infty}$ del primo integrale è zero. Per il secondo, posto

$$m(\rho) = \int_0^\rho\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \sum_1^3 \frac{x_j - x_j^0}{\rho}\frac{\partial V^*}{\partial x_i}A_{ij}[t^*(P) - t^*(P_0)]\rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho d\varphi d\theta,$$

si ha

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{m(\rho)}{\rho} = 0 ;$$

l' integrale si può scrivere

$$\frac{6\nu}{\delta^3} \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{\rho^3}{\delta^3}\right)^{\nu-1} \rho^2 \frac{dm(\rho)}{d\rho} d\rho ;$$

eseguendo una integrazione per parti e osservando che

$$-\frac{6\nu}{\delta^3} \int_0^\varepsilon \rho d\rho \left(1 - \frac{\rho^3}{\delta^3}\right)^{\nu-1} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 2 ,$$

si conclude quanto si è affermato. Per gli altri due integrali si ha lo stesso risultato.

Dunque il vettore t^* essendo sommabile e verificando quasi-dappertutto la proprietà di media

$$t^*(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}_0} \overline{\mathfrak{L}[V^*]} t^*(P) dP ,$$

differisce al più nei punti di un insieme di misura nulla da una soluzione dell' equazione $\mathfrak{L}[u] = 0$.

Esaminiamo ora il comportamento di t^* sulla $\mathfrak{F}D$.

Indichiamo con Q un punto di S e con Q_+ e Q_- due punti sulla normale ad S in Q, l' uno interno a D e l' altro esterno, a distanza t da S. Riferendoci alle (21), ove ora δ si prenda così grande che le sfere di centro Q_+ e Q_- contengano D, dalla (20), ripetendo i ragionamenti ora fatti, si ottiene, per quasi-tutti i punti Q,

$$(22) \qquad t^*(Q_+) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iiint_D \overline{\mathfrak{L}[V^*(P, Q_+)]} t^*(P) dP + \right.$$
$$\left. + \iint_R V_S^*(P, Q_+) s^* d\alpha d\beta \right\}$$

$$(22') \qquad 0 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iiint_D \overline{\mathfrak{L}[V^*(P, Q_-)]} t^*(P) dP + \iint_R V_S^*(P, Q_-) s^* d\alpha d\beta \right\} ,$$

dove $V_S^*(P, Q_\pm)$ indica la matrice $V^*(P, Q_\pm)$ per $P \subset S$; segue

$$t^*(Q_+) = \frac{1}{4\pi}\left\{\iiint_D \overline{\mathfrak{L}[V^*(P, Q_+) - V^*(P, Q_-)]}t^*(P)dP + \right.$$

$$\left. + \iint_R [V^*(P, Q_+) - V^*(P, Q_-)]s^* d\alpha d\beta \right.$$

L'integrale triplo converge senz' altro a zero per $t \to 0$. I termini della matrice $V^*(P, Q_+) - V^*(P, Q_-)$ sono del tipo

$$\frac{1}{\rho_+}\left(1 - \frac{\rho^6_+}{\delta^6}\right)^3 - \frac{1}{\rho_-}\left(1 - \frac{\rho^6_-}{\delta^6}\right)^3$$

e, a meno del fattore $\pm\dfrac{k}{2(1+k)}$,

$$\frac{\partial^2\rho_+}{\partial x_i \partial x_j}\left(1 - \frac{\rho^6_+}{\delta^6}\right)^3 - \frac{\partial^2\rho_-}{\partial x_i \partial x_j}\left(1 - \frac{\rho^6_-}{\delta^6}\right)^3,$$

essendo $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ un punto qualsiasi di S e convenendo di porre $\rho_\pm = \overline{PQ_\pm}$.

Se si pensa di sviluppare i cubi, trascurando i termini regolari, basta esaminare

$$\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2(\rho_+ - \rho_-)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

La prima di queste espressioni si mantiene limitata (*); si ha poi

$$\frac{\partial^2(\rho_+ - \rho_-)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho_+}\right)\frac{(x_i - \xi_i^-)(x_j - \xi_j^-)}{\rho^2_-} +$$

$$+ \frac{1}{\rho_+}\left[\frac{(x_i - \xi_i^-)(x_j - \xi_j^-)}{\rho^2_-} - \frac{(x_i - \xi_i^+)(x_j - \xi_j^+)}{\rho^2_+}\right]$$

di cui il primo addendo si mantiene limitato; lo stesso avviene del secondo; per rendersene conto in modo semplice supponiamo di prendere il terzo asse sulla retta Q_+Q_-; con ciò tale addendo diventa

$$\frac{x_i x_j}{\rho^2_+}\left(\frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho_+}\right)\left(\frac{\rho_+}{\rho_-} + 1\right).$$

(*) Cfr. p. es. C. MIRANDA, *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche.* « Atti Acc. Naz. Lincei » (8), 3, (1947).

Dunque si ha che $\boldsymbol{t}^*(Q_+) \to 0$ per $t \to 0$ e $|\boldsymbol{t}^*(Q_+)|$ si mantiene limitato; allora per il teorema di Lebesgue si ha

$$\lim_{t \to 0} \iint_R |\boldsymbol{t}^*|^2_{S_t} d\alpha d\beta = 0$$

e quindi per il teorema di unicità segue che $\boldsymbol{t}^*$ differisce al più nei punti di un insieme di misura nulla dallo zero, beninteso nell'ipotesi che sia $-\frac{1}{2} < k < 2$.

Dalla (20) segue poi che anche $\boldsymbol{s}^*$ deve essere quasi-dappertutto eguale a zero.

Con ciò resta provato il teorema di completezza.

Teorema di convergenza.

Sia $\boldsymbol{u}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *una successione di vettori continui con le derivate prime e seconde in* $D - \mathfrak{F}D$ *per cui sia*

$$\lim_{n \to \infty} \iiint_D |\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}_n]|^p dP = 0 \qquad p > 3 \tag{23}$$

$$\lim_{n \to \infty} \iint_R |(\boldsymbol{u}_n)_S - \overline{\boldsymbol{u}}|^2 d\alpha d\beta = 0 \tag{24}$$

dove $\overline{\boldsymbol{u}}$ *indica un prefissato vettore con la norma di quadrato sommabile in* R. *Se esiste una costante positiva* M *tale che*

$$\iint_D |\boldsymbol{u}_n|^2 dP < M \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

allora in ogni dominio interno a D *la successione* $\{\boldsymbol{u}_n\}$, *o una sua subordinata, converge uniformemente verso un vettore* $\boldsymbol{u}$ (*continuo*) *tale che*

$$\lim_{t \to 0} \iint_R |\boldsymbol{u}_{S_t} - \overline{\boldsymbol{u}}|^2 d\alpha d\beta = 0. \tag{26}$$

Consideriamo un dominio $\overline{D}$ interno a D. E' possibile trovare un $\delta > 0$ tale che le sfere di raggio δ aventi il centro in un qualsiasi punto Q di $\overline{D}$ siano tutte interne a D. Si ha

$$\boldsymbol{u}_n(Q) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}} (\mathfrak{L}[\overline{\boldsymbol{V}^*(P, Q)}]\boldsymbol{u}_n(P) - \boldsymbol{V}^*(P, Q)\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}_n(P)])dP. \tag{27}$$

$\mathfrak{L}[V^*]$ non presenta singolarità; i termini di V^* sono infiniti al più come $\frac{1}{\overline{\overline{PQ}}}$ per $P \to Q$; pertanto basta che sia $p > {}^3/_2$ perchè riesca (in base alle (23) e (25))

$$|u_n(Q)| < k$$

per $Q \subset \overline{D}$; dunque i moduli dei vettori u_n sono funzioni egualmente limitate.

Ma, di più, i vettori u_n hanno le componenti egualmente lipschitziane. Per vedere ciò brevemente, sia $\overline{\overline{D}}$ un dominio convesso contenuto in D e contenente $\overline{D}$ (oppure la somma di un numero finito di tali domini contenga $\overline{D}$). Per ogni Q di $\overline{D}$ si ha

$$u_n(Q) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\overline{\overline{D}}} \overline{(\mathfrak{L}[V^*]u_n - V^*\mathfrak{L}[u_n])}dP$$

dove la V^* ha la stessa espressione già precedentemente specificata con la sola differenza che nel fattore $\left(1 - \frac{\rho^6}{\delta^6}\right)^3$, δ, anzichè essere costante, è la lunghezza del segmento $Q\overline{\overline{P}}$ (essendo $\overline{\overline{P}}$ l'intersezione della semiretta QP con la $\mathfrak{F}\overline{\overline{D}}$) che si mantiene maggiore della distanza $(\mathfrak{F}\overline{D}, \mathfrak{F}\overline{\overline{D}})$.

Allora

$$u_n(Q_1) - u_n(Q_2) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\overline{\overline{D}}} \overline{(\mathfrak{L}[V^*(P, Q_1) - V^*(P, Q_2)]u_n(P) -}$$
$$\overline{- [V^*(P, Q_1) - V^*(P, Q_2)]\mathfrak{L}[u_n(P)])}dP;$$

se si tiene presente che $\mathfrak{L}[V^*]$ è regolare insieme alle sue derivate mentre le derivate prime di V^* si comportano come $\frac{1}{\overline{\overline{PQ}}^2}$, basta che sia $p > 3$ perchè si possa concludere nell'asserto.

Allora per un noto teorema di compattezza si può estrarre dalla $\{u_n\}$ una successione (che per semplicità supporremo sia questa stessa) convergente a un vettore (continuo) u.

Dalla (27) segue

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathfrak{D}} \overline{\mathfrak{L}[V^*]u}dP$$

e quindi $\boldsymbol{u}$ è una soluzione di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$ regolare nell'interno di D. Si ha poi, procedendo come si è fatto a proposito del secondo teorema di unicità,

$$\iint_{S_T} |\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu|^2 d\sigma = \iint_{S} |\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu|^2 d\sigma + \int_0^T dt \iint_R \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} |\boldsymbol{u}_\mu - \right.$$

$$\left. - \boldsymbol{u}_\nu|^2\right)_{S_t} d\alpha d\beta + \frac{k}{2+k} \iiint_{D-D_T} \left\{ \left[((u_{\mu 1} - u_{\nu 1})^2 - (u_{\mu 2} - u_{\nu 2})^2 - \right.\right.$$

$$- (u_{\mu 3} - u_{\nu 3})^2) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + (-(u_{\mu 1} - u_{\nu 1})^2 + (u_{\mu 2} - u_{\nu 2})^2 -$$

$$-(u_{\mu 3} - u_{\nu 3})^2) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + (-(u_{\mu 1} - u_{\nu 1})^2 - (u_{\mu 2} - u_{\nu 2})^2 + (u_{\mu 3} - u_{\nu 3})^2) \cdot$$

$$\cdot \left. \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] + 2\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)(u_{\mu 1} - u_{\nu 1})(u_{\mu 2} - u_{\nu 2}) + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)(u_{\mu 2} - \right.$$

$$\left.\left. - u_{\nu 2})(u_{\mu 3} - u_{\nu 3}) + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)(u_{\mu 1} - u_{\nu 1})(u_{\mu 3} - u_{\nu 3}) \right] \right\} dP +$$

$$+ \frac{k}{2+k} \left(\iint_{S_T} + \iint_{S} \right) [2((\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu) \times \boldsymbol{n})^2 - |\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu|^2] d\sigma -$$

$$- \frac{4}{2+k} \left(T \iiint_{D_T} + \iiint_{D-D_T} t \right) \left[k (\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu))^2 + \sum_{1}^{3}{}_i |\operatorname{grad}(u_{\mu i} - \right.$$

$$- u_{\nu i})|^2 - k \sum_{\substack{1 \\ i<j}}^{3}{}_{ij} \left(\frac{\partial(u_{\mu i} - u_{\nu i})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial(u_{\mu j} - u_{\nu j})}{\partial x_j} - \frac{\partial(u_{\mu i} - u_{\nu i})}{\partial x_j} \cdot \right.$$

$$\left.\left. \cdot \frac{\partial(u_{\mu j} - u_{\nu j})}{\partial x_i} \right) \right] dP - \frac{4}{2+k} \int_0^T \iiint_{D_t} (\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu) \times \mathfrak{L}[\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu] dP .$$

Indicando con ω la somma dei due integrali estesi ad S e dell'ultimo integrale a secondo membro, somma che per $\mu, \nu \to \infty$ tende a zero indipendentemente da T, si ha

$$C_k \iint_{S_T} |\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu|^2 d\sigma < \omega + H \int_0 \left(\iint_{S_t} |\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu|^2 d\sigma \right) dt$$

dove con C_k s'intende la costante di cui si è parlato a proposito del teorema di unicità e H è un'altra opportuna costante positiva.

Di qui si deduce che, fissato un $\eta > 0$, non appena μ e ν sono abbastanza grandi, per t abbastanza prossimo a zero, riesce

$$\int\!\!\int_{S_T} |\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\nu|^2 d\sigma < \eta\,;$$

perciò anche

$$\int\!\!\int_{S_T} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n|^2 d\sigma \leq \eta\,;$$

da questa e dalle

$$\lim_{t \to 0} \int\!\!\int_{S_t} |\boldsymbol{u}_n - (\boldsymbol{u}_n)_S|^2 d\sigma = 0\,, \quad \lim_{n \to \infty} \int\!\!\int_{S} |\boldsymbol{u}_n - \overline{\boldsymbol{u}}|^2 d\sigma = 0$$

segue

$$\lim_{t \to 0} \int\!\!\int_{S_t} |\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}|^2 d\sigma = 0\,.$$

Teorema di esistenza.

Se $-\frac{1}{2} < k < 2$, *assegnato su* R *un vettore* $\overline{\boldsymbol{u}}$ *col quadrato della norma sommabile, esiste (ed è unico) un vettore* $\boldsymbol{u}$ *tale che*

$$\Delta\boldsymbol{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad D - \mathfrak{F}D$$

$$\lim_{t \to 0} \int\!\!\int_{S_t} |\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}|^2 d\sigma = 0\,.$$

Dal teorema di completezza, se prendiamo in Σ la coppia $(0, \overline{\boldsymbol{u}})$, si può trovare una successione $\{\boldsymbol{u}_n\}$ di vettori continui con le derivate prime e seconde in tutto lo spazio, verificanti le (23) e (24). Perciò se è anche verificata la (25) il teorema è provato in base al teorema di convergenza. Mettiamoci allora nell'ipotesi contraria; si potrà perciò trovare una successione subordinata della $\{\boldsymbol{u}_n\}$ (per semplicità sia la $\{\boldsymbol{u}_n\}$ stessa) per cui

$$\lim_{n \to \infty} \iiint_D |u_n|^2 dP = +\infty .$$

Posto allora $u_n^* = \dfrac{u_n}{\left(\iiint_D |u_n|^2 dP\right)^{1/2}}$, per la successione $\{u_n^*\}$ è ora verificata la (25) e, di più,

$$\lim_{n \to \infty} \iint_R |u_n^*|_S^2 d\alpha d\beta = 0 .$$

Ma allora per il teorema di convergenza e per il teorema di unicità, sarebbe $u^* \equiv 0$ il che contraddice le $\iiint_D |u_n^*|^2 dP = 1$.