ARNO PREDONZAN

Sui monoidi V_{k-1}^n di S_k situati sulla forma generale F_{r-1}^n di S_r

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 335-344
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__335_0>

SUI MONOIDI V_{k-1}^n DI S_k SITUATI SULLA FORMA GENERALE F_{r-1}^n DI S_r

Memoria (*) *di* ARNO PREDONZAN (*a Trieste*)

1. - Nello studio di talune questioni relative all' unirazionalità di una ipersuperficie algebrica generale F_{r-1}^n, di ordine n, dello spazio lineare S_r, può interessare di conoscere come si debba scegliere, in relazione ad n, r, la dimensione k di uno spazio lineare affinchè esistano degli S_k di S_r che seghino la data F_{r-1}^n secondo monoidi M_{k-1}^n.

Nel presente lavoro dimostro la seguente proposizione, che risolve compiutamente il problema ora indicato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la generica F_{r-1}^n di S_r contenga dei monoidi M_{k-1}^n di S_k $(n \geq 2,\ k \geq 1)$ è che risulti

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\left[\binom{n+k-2}{k} - k\right], \tag{1}$$

eccettuato solo se $n = 2$, nel qual caso la (1) *deve essere sostituita dalla condizione più restrittiva*

$$r \geq k + 1 . \tag{2}$$

Nel primo caso il numero dei monoidi suddetti è finito se, e soltanto se, nella (1) *vale l' uguaglianza; altrimenti essi costituiscono un sistema algebrico, irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti della F_{r-1}^n, di dimensione*

$$D_1 = (k+1)(r-k) - \binom{n+k-2}{k} + k . \tag{3}$$

---

*) Pervenuta in Redazione il 10 maggio 1952.

Se $n = 2$, tali monoidi sono, appena sia verificata la (2), *sempre infiniti e costituiscono un sistema razionale la cui dimensione vale*

$$D_2 = (k+1)(r-k). \tag{4}$$

Tratto prima (n. 2) il caso $n = 2$. Dimostro quindi (n. 3) la necessità della condizione (1) poggiando sul principio del computo delle costanti. Vengo infine a provare (nn. 4-8) la sufficienza della condizione stessa — quindi la validità della (3) — seguendo un ragionamento per assurdo che poggia ancora, in modo essenziale, sul principio suddetto applicato ad una particolare corrispondenza algebrica irriducibile considerata nel n. 4.

OSSERVAZIONE. — Nell'enunciato del teorema bisogna intendere che, se $k = 1$, le (1), (2) sono, a seconda dei due casi, necessarie e sufficienti per l'esistenza di rette di S_r che abbiano con la F^n_{r-1} un contatto di ordine $n-2$.

2 - Se $n = 2$, il generico S_k $(1 \leq k \leq r-1)$ di S_r sega l'iperquadrica F^2_{r-1} in un monoide del secondo ordine (iperquadrica) di S_k. La condizione $k \leq r-1$, cioè la (2), è pertanto necessaria e sufficiente per l'esistenza su F^2_{r-1} di monoidi M^2_{k-1}.

Il sistema dei monoidi suddetti è, ovviamente, birazionalmente identico a quello degli S_k di S_r, quindi è r a z i o n a l e e la sua dimensione D_2 è data dalla (4).

3. - Considereremo in questo numero ed in quelli successivi, il caso $n \geq 3$. Supporremo inoltre, affinchè il teorema del n. 1 abbia senso, $1 \leq k \leq r-1$.

I monoidi M^n_{k-1} appartenenti agli S_k di S_r costituiscono, nella loro totalità, un sistema razionale, quindi i r r i d u c i b i l e, Ω, di dimensione

$$a = (k+1)(r-k) + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} + k - 1\,; \tag{5}$$

ciò si vede facilmente appena si osservi che la dimensione del sistema lineare degli M^n_{k-1} di S_k aventi lo stesso punto $(n-1)$-

uplo uguaglia

$$\binom{n+k}{k}-\binom{n+k-2}{k}-1,$$

in quanto sono in numero di $\binom{n+k-2}{k}$ le condizioni lineari, linearmente indipendenti, che si devono imporre ai coefficienti di una generica ipersuperficie di ordine n di S_k perchè un suo punto abbia per essa molteplicità $n-1$.

Scelto comunque un monoide M^n_{k-1} di Ω, l'insieme delle forme F^n_{r-1}, di ordine n, di S_r che lo contengono risulta un sistema lineare, la cui dimensione

$$b=\binom{n+r}{r}-\binom{n+k}{k} \tag{6}$$

rimane costante al variare di M^n_{k-1} in Ω; ciò può risultare, ad esempio, dal fatto che, assunto l' S_k di M^n_{k-1} come spazio fondamentale delle coordinate, di equazioni $x_{k+1}=\ldots=x_r=0$, l'equazione della F^n_{r-1} generica per M^n_{k-1} può scriversi nella forma

$$\sum_{i=k+1}^{r} x_i f_i^{\,n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_r)+\alpha g^n(x_0, x_1, \ldots, x_k)=0,$$

dove le f_i^{n-1} sono forme generali di S_r dell'ordine $n-1$, α è una costante e $g^n=0$ è l'equazione, dentro al considerato S_k, di M_{k-1} [1]).

Da quanto precede si deduce che la corrispondenza algebrica che associa un monoide M^n_{k-1} di Ω ed una F^n_{r-1} di S_r quando M^n_{k-1} è situato sulla F^n_{r-1}, è irriducibile [2]), e che è pure irriducibile il sistema Σ (contenuto in quello

---

[1]) Più in generale, con ragionamento analogo, può affermarsi che la dimensione del sistema lineare delle F^n_{r-1} passanti per una qualunque forma F^s_{k-1}, di ordine s, di S_k rimane costante al variare di F^s_{k-1} in S_r ed è data da

$$\binom{n+r}{r}-\binom{n+k}{k}+\binom{n+k-s}{k}-1.$$

[2]) Ved. B. L. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische geometrie*, (Berlin, Springer, 1939), p. 143.

lineare di tutte le F_{r-1}^n di S_r) delle F_{r-1}^n di S_r che contengono qualche M_{k-1}^n di Ω. La dimensione di Σ risulta ovviamente

$$(7) \qquad c = \binom{n+r}{r} - 1 - \varepsilon, \qquad \text{con } \varepsilon \geq 0,$$

avendosi $\varepsilon = 0$ se, e soltanto se, ogni F_{r-1}^n di S_r contiene qualche M_{k-1}^n di Ω.

Indicata con d la dimensione del sistema di M_{k-1} giacenti sulla generica F_{r-1}^n di Σ, a norma del principio del computo delle costanti, si ha

$$a + b = c + d,$$

dalla quale, in virtù delle (5), (6), (7), si deduce

$$(8) \qquad d = (k+1)(r-k) - \binom{n+k-2}{k} + k + \varepsilon.$$

Si noti che deve risultare $d \geq 0$, valendo il segno di uguaglianza solo nel caso in cui sono in numero finito non nullo i monoidi M_{k-1}^n di Ω che appartengono alla generica F_{r-1}^n di Σ. Qualora invece si abbia $d > 0$, detti monoidi costituiscono un sistema algebrico irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti della F_{r-1}^n, quindi un sistema algebrico puro [3]).

Se la generica F_{r-1}^n di S_r contiene qualche M_{k-1}^n di Ω, risulta ovviamente $\varepsilon = 0$; dalla $d \geq 0$ e avuto riguardo alle (3), (8), segue allora $D_1 \geq 0$, dalla quale discende immediatamente la (1). Resta così provata la necessità di quest'ultima condizione.

4. - Ci proponiamo ora di dimostrare, con ragionamento per assurdo, che la (1) è anche condizione sufficiente.

Sia, a questo scopo, verificata la stessa, quindi la $D_1 \geq 0$, e si supponga che la generica F_{r-1}^n di S_r non contenga M_{k-1}^n di Ω; il che comporta $\varepsilon > 0$ e di conseguenza $d > 0$.

Detto $\bar{S}_k$ un fissato S_k di S_r, e indicato con $\bar{M}_{k-1}^n$ un

---

[3]) Ved. B. L. van der Waerden, *loc. cit.*, in [2]), pp. 141, 123.

generico M_{k-1}^{n} di $\overline{S}_k$, si consideri il sistema lineare $\overline{\Sigma}$, di dimensione b, delle F_{r-1}^{n} di S_r che contengono $\overline{M}_{k-}^{n}$. Tale monoide risulta, chiaramente, generico nel sistema Ω; la generica F_{r-1}^{n} di $\overline{\Sigma}$ è pertanto generica nel sistema Σ e quindi è d la dimensione del sistema algebrico puro Ω_d dei monoidi M_{k-1}^{n} che giacciono sulla stessa.

Al variare della F_{r-1}^{n} nel sistema lineare $\overline{\Sigma}$, il sistema Ω_d descrive un sistema algebrico Ω^*, eventualmente riducibile in parti di dimensione diversa, che risulta contenuto nel sistema razionale Ω di tutti i monoidi M_{k-1}^{n} di S_r. Sia $\overline{\Omega}$ una componente irriducibile di dimensione massima di Ω^*, la quale contiene (almeno) una componente assolutamente irriducibile di Ω_d; ne discende che ha dimensione d il sistema dei monoidi M_{k-1}^{n} di $\overline{\Omega}$ che sono situati sulla generica F_{r-1}^{n} di $\overline{\Sigma}$.

Si consideri ora la corrispondenza algebrica π che associa ad un generico M_{k-1}^{n} di $\overline{\Omega}$ una F_{r-1}^{n} di $\overline{\Sigma}$ quando si appartengono. Come facilmente si vede, π è non degenere su $\overline{\Omega}$ e $\overline{\Sigma}$ ed in essa ad elementi generici di $\overline{\Omega}$ corrispondono elementi generici di $\overline{\Sigma}$. Inoltre è costante la dimensione del sistema lineare delle F_{r-1} di $\overline{\Sigma}$ che risultano associate in π al generico M_{k-1}^{n} di $\overline{\Omega}$. Ove si osservi infine che il sistema algebrico irriducibile, interferenza di tutti i sistemi algebrici irriducibili delle F_{r-1}^{n} di S_r che contengono le F_{r-1}^{n} corrispondenti in π ai generici M_{k-1}^{n} di $\overline{\Omega}$, coincide col sistema $\overline{\Sigma}$, si può concludere che anche la corrispondenza π è irriducibile[4]).

5. - Supponiamo, in primo luogo, che l'S_k su cui giace il generico M_{k-1}^{n} di $\overline{\Omega}$ sia sghembo con l'$\overline{S}_k$.

Il sistema $\overline{\Omega}$, essendo contenuto nel sistema Ω di tutti i monoidi M_{k-1}^{n} di S_r ha la dimensione

$$a_1 = a - \varepsilon_1 , \qquad \text{con } \varepsilon_1 \geq 0 , \tag{9}$$

mentre invece è

$$b_1 = \binom{n+r}{r} - 2\binom{n+k}{k} + 1 \tag{10}$$

---

[4]) Ved. F. SEVERI, *Introduzione alla geometria algebrica, Geometria numerativa,* I (Roma, Docet, 1948), pp. 160-161.

la dimensione del sistema lineare delle F^n_{r-1} di $\overline{\Sigma}$ per il generico M^n_{k-1} di $\overline{\Omega}$.

Applicando il principio del computo delle costanti alla corrispondenza π prima considerata si ha

$$a_1 + b_1 = b + d\,, \tag{11}$$

da cui, in virtù delle (5), (6), (8), (9), (10), si ottiene

$$\varepsilon + \varepsilon_1 = 0\,,$$

il che è assurdo in base alle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 \geq 0$.

6. - Supponiamo, *in secondo luogo*, che l' S_k su cui giace il generico M^n_{k-1} di $\overline{\Omega}$ sia incidente all' $\overline{S}_k$ secondo un S_h $(h \geq 0)$ non situato su $\overline{M}^n_{k-1}$.

Le dimensioni a_1, b_1, in questo caso divengono

$$a_2 = (k-h)(r-k) + (h+1)(k-h) + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} - \binom{n+h}{h} + k - \varepsilon_2, \qquad \text{con } \varepsilon_2 \geq 0, \tag{12}$$

$$b_2 = \binom{n+r}{r} - 2\binom{n+k}{k} + \binom{n+h}{h} \text{ [5]}, \tag{13}$$

mentre la (11) assume la forma

$$a_2 + b_2 = b + d\,,$$

dalla quale, in virtù delle (6), (8), (12), (13) e delle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$, si ottiene

$$r < 2k - h\,, \tag{14}$$

limitazione che risulta manifestamente assurda.

7. - Si supponga, *in terzo luogo*, che l' S_h di cui al n. precedente risulti situato su $\overline{M}^n_{k-1}$ e sul generico monoide M^n_{k-1} dell' S_k che lo determina.

---

[5]) I valori di a_2, b_2 si determinano facilmente appena si osservi che i monoidi di $\overline{\Omega}$ appartenenti ad uno stesso S_k devono tutti passare per la stessa forma F^n_{h-1} secondo cui l' S_h sezione di S_k con $\overline{S}_k$ sega $\overline{M}^n_{k-1}$.

Le dimensioni a_1, b_1 ora divengono

$$(15)\quad a_3 = (k-h)(r-k) + \delta + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} - \\ - \binom{n+h}{h} + k - 1 - \varepsilon_3 , \qquad \text{con } \varepsilon_3 \geq 0 ,$$

$$(16)\quad b_3 = \binom{n+r}{r} - 2\binom{n+k}{k} + \binom{n+h}{h} + 1 ,$$

dove δ sta ad indicare la dimensione del sistema (più ampio, se ve n'è più di uno) degli S_h giacenti su $\overline{M}_{k-1}^{n}$. Tale dimensione soddisfa, ovviamente, alla limitazione

$$(17)\quad \delta < (h+1)(k-h) ,$$

in quanto il secondo membro della stessa dà la dimensione del sistema razionale di tutti gli S_h di S_k.

La (11) assume la forma

$$a_3 + b_3 = b + d ,$$

e da questa, tenuto conto delle (6), (8), (15), (16), (17) e delle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_3 \geq 0$, si ricade nella limitazione assurda (14).

8. - Supponiamo, infine, che si verifichi il restante caso possibile, cioè che l'S_h in parola sia situato su $\overline{M}_{k-1}^{n}$ ma non sul generico monoide M_{k-1}^{n} dell'S_k che lo determina.

Le dimensioni a_1, b_1 prendono i valori

$$(18)\quad a_4 = (k-h)(r-k) + \delta + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} + k - 1 - \varepsilon_4 , \\ \text{con } \varepsilon_4 \geq 0 ,$$

$$(19)\quad b_4 = \binom{n+r}{r} - 2\binom{n+k}{k} + \binom{n+h}{h} ,$$

avendo δ ancora il significato del n. precedente.

Dalla (11), che in questo caso diviene,

$$a_4 + b_4 = b + d ,$$

si deduce, avuto riguardo alle (6), (8), (18), (19) e alle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_4 \geq 0$,

$$(20) \qquad (h+1)(r-k)-\binom{n+h}{h}-\delta+1<0.$$

Ci proponiamo di dimostrare l' assurdità della (20) per ogni scelta di $n(\geq 3)$ e di k.

Distingueremo due casi, a seconda che la dimensione δ sia data da

$$(21) \qquad \delta=(h+1)(k-h)-\binom{n+h}{h},$$

oppure da

$$(22) \qquad \delta=h(k-h)-\left[\binom{n+h-1}{h-1}+\binom{n+h-2}{h-1}\right],$$

nel quale ultimo caso deve risultare $h\geq 1$ [6]).

I) In virtù della (21), la (20) si può ricondurre alla limitazione assurda (14).

II) La (20), per la (22), diviene

$$(23) \qquad (h+1)(r-k)-h(k-h)-\binom{n+h-2}{h}+1<0.$$

Poichè per $n=3$ la condizione (1) (che diviene $r\geq k+\dfrac{1}{k+1}$ e dalla quale segue $r\geq k+1$) è certo sufficiente in quanto il generico $S_k(k\leq r-1)$ di S_r tangente alla F_{r-1} la sega in un monoide M^3_{k-1} di S_k, potremo limitarci a provare l' assurdità della (23) nel caso $n\geq 4$ (e $h\geq 1$). Distingueremo qui due sottocasi a seconda che sia $n=4$, $n\geq 5$.

a) $n=4$. — Esistono certamente, in quanto il valore di δ è dato dalla (22), degli S_h giacenti su $\overline{M}^n_{k-1}$ e passanti per il suo punto triplo [7]). Ciò comporta che sia

$$(24) \qquad k\geq h+\frac{1}{h}\left[\binom{h+3}{h-1}+\binom{h+2}{h-1}\right].$$

Risulta poi soddisfatta la limitazione evidente

$$(25) \qquad r-k\geq k-h.$$

---

[6]) Ved. A. PREDONZAN, *Intorno ai sistemi di S_k che appartengono al monoide generale di dato ordine* [Rend. Semin. Matem. Padova, 21 (1952)] n. 1, Oss. I, III.

[7]) Ved. A. PREDONZAN, *loc. cit.*, in [6]), n. 1.

La (23), in virtù della (25), diviene

$$k < h + \binom{h+2}{h} - 1, \tag{26}$$

e da questa, avuto riguardo alla (24), deriva

$$4h < (5-h)\binom{h+2}{h-1}. \tag{27}$$

La (27) è manifestamente assurda per ogni $h \geq 5$; quindi per tali h è assurda la (23). L' assurdità di quest' ultima nei restanti casi ($1 \leq h \leq 4$) si trae direttamente dalle (24), (26); e infatti dalle stesse segue, rispettivamente, per $h=1$: $k \geq 3$, $k < 3$; per $h=2$: $k \geq 7$, $k < 7$; per $h=3$: $k \geq 12$, $k < 12$; per $h=4$: $k \geq 18$, $k < 18$.

b) $n \geq 5$. — Tenuto conto delle (1), (23), si ha

$$\frac{1}{n-2}\left[\binom{n+k-2}{n-3} - \binom{n+h-2}{n-3}\right] = \frac{1}{k+1}\binom{n+k-2}{k} -$$

$$-\frac{1}{h+1}\binom{n+h-2}{h} < (r-k) + \frac{k}{k+1} - \frac{1}{h+1}[(h+1)(r-k) -$$

$$-h(k-h)+1] = \frac{k}{k+1} + \frac{h(k-h)}{h+1} - \frac{1}{h+1} < k-h+1,$$

onde

$$\binom{n+k-2}{n-3} - \binom{n+h-2}{n-3} < (n-2)(k-h+1). \tag{28}$$

La (28), per $n=5$, si riduce a $(k-h)(k+h-1) < 6$, quindi è assurda per ogni scelta di h, k ($1 \leq h \leq k-2$). Ne dimostreremo ora l'assurdità per $n > 5$ con procedimento d'induzione fatto rispetto ad n. Supposto perciò che la (28) non valga per $n-1$, cioè che sia

$$\binom{n+k-3}{n-4} - \binom{n+h-3}{n-4} \geq (n-3)(k-h+1), \tag{29}$$

si tratta di dimostrare la invalidità della stessa, cioè della

$$\left[\binom{n+k-3}{n-3}-\binom{n+h-3}{n-3}\right]+\left[\binom{n+k-3}{n-4}-\binom{n+h-3}{n-4}\right]<$$
$$<(n-2)(k-h+1)\,.$$

Da quest' ultima, avuto riguardo alla (29), si ottiene

$$\binom{n+k-3}{n-3}-\binom{n+h-3}{n-3}<k-h+1\,,$$

od anche, ove si ricordi la $h<k-1$,

$$\binom{n+k-3}{n-3}-\binom{n+k-4}{n-3}=\binom{n+k-4}{n-4}<k-h+1\,,$$

che, per $n>5$, è manifestamente assurda. Si può pertanto concludere come enunciato nel n. 1.