RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO NARDINI

Due teoremi di unicità nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 303-315

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__303_0>

DUE TEOREMI DI UNICITÀ NELLA TEORIA DELLE ONDE MAGNETO-IDRODINAMICHE

Nota (*) *di* RENATO NARDINI (*a Bologna*)

1. Premesse. — Un moto idrodinamico che abbia luogo in un fluido elettricamente conduttore soggetto a un campo magnetico, fa sorgere un campo elettrico che produce nel fluido delle correnti elettriche; per effetto del campo magnetico queste correnti determinano delle forze ponderomotrici; dalla mutua azione fra le dette forze e il moto idrodinamico si può ottenere un nuovo tipo di onde, dette magneto-idrodinamiche, che è stato messo in evidenza per la prima volta da ALFVÉN [1]).

Dal punto di vista matematico il fenomeno è regolato dalle due equazioni di MAXWELL

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

— dove rispettivamente $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ sono campo elettrico e magnetico, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ sono i vettori densità di corrente di conduzione, induzione magnetica e spostamento — e dall'equazione idrodinamica

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}\{\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{B} - \text{grad}\,p\} + \boldsymbol{F} + \nu\,\text{grad}\,\text{D}\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} + \nu'\,\text{div}\,\boldsymbol{v} \tag{3}$$

---

*) Pervenuta in Redazione il 5 marzo 1952.

1) H. ALFVÉN, *On the Existence of Electromagnetic-hydrodynamic Waves* « Ark. f. mat. astr. o. fysik » **29 B** N. 2 (1942). Si veda anche dello stesso Autore il cap. IV del trattato *Cosmical Electrodynamics*, Oxford at the Clarendon Press (1950).

dove $\boldsymbol{v}$, ρ, p, ν e ν' sono rispettivamente la velocità, la densità, la pressione ed i coefficienti di viscosità (divisi per ρ) in un punto P del fluido, mentre $\boldsymbol{F}$ rappresenta le forze esterne non elettromagnetiche che agiscono in P sull' unità di massa del fluido.

Completano il quadro delle relazioni fra le dette grandezze le equazioni elettromagnetiche

$$\boldsymbol{i} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{5}$$

— dove γ è la conduttività elettrica e μ è la permeabilità magnetica del mezzo — e l' equazione idrodinamica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0\,. \tag{6}$$

Supponendo ρ costante (liquido omogeneo ed incompressibile) e $\nu = o$ (liquido perfetto), γ e μ costanti, $\boldsymbol{F} = o$ e trascurando la corrente di spostamento $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ nei confronti di $\boldsymbol{i}$, ALFVÉN e WALÉN [2]) hanno trattato alcuni casi interessanti determinati da soluzioni particolari del problema in questione.

Ora, per quanto è a mia conoscenza, non è stata ancora data alcuna dimostrazione di unicità riguardante le soluzioni delle dette equazioni.

2. Enunciati dei teoremi di unicità. — Nel presente lavoro ci occupiamo del caso in cui si ammettono le ipotesi della costanza di ρ, ciò che riduce la (6) all' equazione

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = o \tag{7}$$

(segue immediatamente che nella (3) si può porre

$$\operatorname{grad}\ \mathrm{D} \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} = \frac{1}{2} \Delta' \boldsymbol{v} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}),$$

e della costanza di γ e μ, per cui si ha

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = o\,. \tag{8}$$

---

[2]) C. WALÉN, *On the Theory of Sunspots*, « Ark. f. mat. astr. o. fysik », **30 A** N. 15; **31 B**, N. 3.

Indicando con S il campo nel quale tutte le precedenti equazioni si suppongono valide e con σ il contorno che limita S, ci proponiamo di enunciare delle condizioni iniziali e delle condizioni relative al contorno σ in modo da poter dimostrare che, se le dette equazioni unite a tali condizioni ammettono delle soluzioni, queste sono determinate in modo unico, ben s' intende nel senso, abituale della Fisica-Matematica, che si tratti di soluzioni finite e continue assieme alle loro derivate prime e seconde [2]).

Dimostreremo l' unicità suddetta [3]) considerando in un primo tempo (n. 3) trascurabile la corrente di spostamento: quali condizioni iniziali ammettiamo di conoscere all' inizio dei tempi la velocità $\boldsymbol{v}$ e il campo magnetico $\boldsymbol{H}$ in tutto S; quali condizioni al contorno, se il campo S è finito, ammettiamo di conoscere la componente tangenziale di $\boldsymbol{H}$ su σ in ogni istante, mentre supponiamo che in ogni istante sia su σ $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = o$, essendo $\boldsymbol{n}$ il versore normale a σ comunque orientato [4]).

In un secondo tempo (n. 4) teniamo conto anche della corrente di spostamento $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$: alle condizioni iniziali precedentemente enunciate occorre aggiungere la conoscenza del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ in tutto lo spazio S per $t = o$; le condizioni al contorno possono rimanere inalterate oppure si può assegnare su σ in ogni istante la componente tangenziale del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ anzichè quella del campo magnetico $\boldsymbol{H}$.

---

[2]) Più precisamente se il fluido è perfetto ci si può limitare — e soltanto per la dimostrazione del I teorema (n. 3) — a supporre continue, nelle sole coordinate, le derivate seconde di $\boldsymbol{H}$ fatte rispetto alle coordinate stesse. Se il fluido è viscoso, in entrambi i teoremi si supporranno continue allo stesso modo anche le derivate seconde di $\boldsymbol{v}$ fatte rispetto alle coordinate.

[3]) Il procedimento adottato nella dimostrazione parte da quello introdotto da D. GRAFFI nella nota *Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (6), **12** (1930) 129-135.

[4]) E' da notare che se il liquido è viscoso ($\nu \neq 0$) ed il contorno è costituito, come ammetteremo, da pareti solide che esercitano una certa aderenza verso il liquido stesso, allora $\boldsymbol{v}$ risulta completamente determinata sul contorno in quanto è ivi nulla.

Con o senza la corrente di spostamento $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ ci occuperemo anche del caso in cui S si estende all'infinito.

3. Dimostrazione del primo teorema. — Eliminando $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ fra le (1), (2), ..., (6), ci si riduce alle equazioni

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\gamma} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) \tag{9}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v} = \frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \boldsymbol{F} - \frac{\nu}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}. \tag{10}$$

Supponiamo allora che esistano due soluzioni delle (7), (8), (9), (10), che indicheremo con $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{v}, p$ e con $\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1$, $p + p_1$, soddisfacenti le stesse condizioni iniziali e sul contorno. Dimostreremo che le loro corrispondenti differenze e cioè $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{v}_1$ e p_1 risultano necessariamente nulle in tutto S e per $t \geq o$.

Introducendo tali $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{v}, p$ e successivamente $\boldsymbol{H} + \mathrm{H}_1$, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1$ $p + p_1$ nelle (7), (8), (9), (10) e sottraendo membro a membro le corrispondenti equazioni si ottiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\gamma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 + \operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) \wedge \boldsymbol{H}_1] + \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{H}) \tag{11}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 - \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dP}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) + \frac{\mu}{\rho}[\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1) \wedge \boldsymbol{H}_1 + \tag{12}$$

$$+ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{H}] - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p_1 - \frac{\nu}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1.$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1 = o \tag{13}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}_1 = o; \tag{14}$$

a queste equazioni si devono aggiungere le condizioni iniziali $\boldsymbol{H}_1 = o$, $\boldsymbol{v}_1 = o$ in tutto S e le condizioni su σ, valide in ogni istante,

$$\boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{n} = 0 \qquad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{n} = 0$$

(e, di conseguenza, $\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{v}_1 = 0$).

Moltiplichiamo ora scalarmente la (11) per $\boldsymbol{H}_1$ e la (12) per $\boldsymbol{v}_1$. Si ottiene

$$(15)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{H}_1^2}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\gamma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_1 + \operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\wedge \boldsymbol{H}_1]\times\boldsymbol{H}_1 + $$
$$+ \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}_1$$

$$(16)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{v}_1^2}{\partial t} = -\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1 - \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{v}_1 + \frac{\mu}{\rho}[\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} + $$
$$+\boldsymbol{H}_1)\wedge \boldsymbol{H}_1 + \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1\wedge\boldsymbol{H}]\times\boldsymbol{v}_1 \quad \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p_1\times\boldsymbol{v}_1 - \frac{\nu}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_1 .$$

Applicando note formule si ottengono le seguenti trasformazioni:

a) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_1 = \operatorname{div}(\boldsymbol{H}_1 \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1) - \operatorname{rot}^2\boldsymbol{H}_1$

b) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}_1 = \operatorname{div}[(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{H})\wedge\boldsymbol{H}_1] +$
$$+ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{H}$$

c) tenendo conto anche delle (7), (13) e (14)

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\wedge\boldsymbol{H}_1]\times\boldsymbol{H}_1 = \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_1 - \frac{d\boldsymbol{H}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{H}_1$$

e ancora

$$\frac{d\boldsymbol{H}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{H}_1 = K\frac{d\boldsymbol{H}_1}{dP}\boldsymbol{H}_1\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) = \frac{1}{2}\operatorname{grad}H_1^2 \times$$
$$\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) = \frac{1}{2}\operatorname{div}[H_1^2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)] .$$

d) sempre ricordando le (7) e (13), analogamente

$$\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{v}_1 = K\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dP}\boldsymbol{v}_1\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) = \frac{1}{2}\operatorname{div}[v_1^2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)]$$

$$\operatorname{grad}p_1\times\boldsymbol{v}_1 = \operatorname{div}(p_1\boldsymbol{v}_1).$$

Introducendo questi risultati nelle (15) e (16) si ottiene

$$\text{(17)}\quad \frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial t} = \frac{1}{\mu\gamma}\operatorname{div}(\boldsymbol{H}_1 \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1) - \frac{1}{\mu\gamma}\operatorname{rot}^2\boldsymbol{H}_1 - \frac{1}{2}\operatorname{div}[H_1^2(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)] + \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_1 + \operatorname{div}[(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{H}) \wedge \boldsymbol{H}_1] - \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}_1$$

$$\text{(18)}\quad \frac{1}{2}\frac{\partial v_1^2}{\partial t} = -\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{2}\operatorname{div}[v_1^2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)] + \frac{\mu}{\rho}[\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1) \wedge \boldsymbol{H}_1 + \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{H}] \times \boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p_1\boldsymbol{v}_1) + \frac{\nu}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{v}_1 \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1) - \frac{\nu}{2}\operatorname{rot}^2\boldsymbol{v}_1 .$$

Integriamo ora le (17) e (18) su tutto S e applichiamo il teorema della divergenza ai termini che lo consentono. Si ottengono così degli integrali di superficie che, come si verifica immediatamente, sono nulli per le supposte condizioni al contorno. Ci si riduce quindi alle relazioni

$$\text{(19)}\quad \frac{1}{2}\int_S \frac{\partial H_1^2}{\partial t}dS = -\frac{1}{\mu\gamma}\int_S \operatorname{rot}^2\boldsymbol{H}_1 dS + \int_S \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_1 dS - \int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v}_1 dS .$$

$$\text{(20)}\quad \int_S \frac{\partial v_1^2}{\partial t}dS = -\int_S \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1 dS + \frac{\mu}{\rho}\int_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1) \wedge \boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{v}_1 dS + \frac{\mu}{\rho}\int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v}_1 dS - \frac{\nu}{2}\int_S \operatorname{rot}^2\boldsymbol{v}_1 dS .$$

Ricordiamo ora che le soluzioni in questione si suppongono limitate assieme alle loro derivate prime. Da ciò segue anzitutto che risultano limitate le omografie

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}, \quad \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP};$$

essendo poi $\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{D}\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1$, presi come assi cordinati le direzioni principali della dilatazione $D\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$, l' espressione $D\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1$ assume la forma

$$Av_{1x}^2 + Bv_{1y}^2 + Cv_{1z}^2$$

dove v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, sono le componenti di $\boldsymbol{v}_1$ sui detti assi coordinati. I numeri $|A|$, $|B|$ e $|C|$ risultano in genere funzioni di P e del tempo t; indicato con L il maggiore fra i detti numeri, si ha in tutto S e per ogni $0 \leq t < +\infty$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1\right| \leq L(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) = Lv_1^2\,;$$

è da notare che L è un numero positivo indipendente da $\boldsymbol{v}_1$. Analogamente si può dimostrare che esiste un numero M, dipendente da P e da t ma indipendente da $\boldsymbol{H}_1$, tale che

$$\left|\frac{d(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)}{dP}\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_1\right| \leq MH_1^2\,.$$

In secondo luogo si ha che $\mathrm{rot}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1)$ sarà un vettore limitato per cui si potrà scegliere un numero N tale che sia in tutto S e per ogni $o \leq t < +\infty$

$$|\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1)| \leq 2N$$

e quindi

$$|\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_1) \wedge \boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{v}_1| \leq 2NH_1v_1 \leq N(H_1^2 + v_1^2)\,.$$

Poniamo infine per brevità

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v}_1 dS = A(t)\,.$$

Dalle (19) e (20), a secondo membro delle quali si trascurino rispettivamente il primo e l'ultimo termine che sono certamente non positivi, si ricavano allora le seguenti disuguaglianze [5])

---

[5]) Si noti che se fosse $\gamma = \infty$, si giungerebbe ugualmente alle (21) e (22).

$$\frac{1}{2}\int_S \frac{\partial H_1^2}{\partial t}\,dS \leq \int_S M H_1^2 dS - A(t) \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\int_S \frac{\partial v_1^2}{\partial t}\,dS \leq \int_S L v_1^2 dS + \frac{\mu}{\rho}\int_S N(H_1^2 + v_1^2)dS + \frac{\mu}{\rho}A(t). \tag{22}$$

Indichiamo ora con $\frac{R}{2}$ l'estremo superiore dei valori assunti in tutto S e per $0 \leq t < +\infty$ dai numeri

$$L + \frac{\mu}{\rho}N, \quad N, \quad M.$$

Si ottiene allora dalla (21), moltiplicata per $\frac{\mu}{\rho}$, e dalla (22)

$$\int_S \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial H_1^2}{\partial t}\,dS \leq R\int_S \frac{\mu}{\rho} H_1^2 dS - \frac{\mu}{\rho}A(t)$$

$$\int_S \frac{\partial v_1^2}{\partial t}\,dS \leq R\int_S v_1^2 dS + R\int_S \frac{\mu}{\rho} H_1^2 dS + \frac{\mu}{\rho}A(t)$$

dalle quali si ha a maggior ragione

$$\int_S \left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial H_1^2}{\partial t} + \frac{\partial v_1^2}{\partial t}\right)dS \leq 2R\int_S \left(\frac{\mu}{\rho}H_1^2 + v_1^2\right)dS.$$

Integriamo ora tale disuguaglianza fra o e t: ricordando che in forza delle condizioni iniziali $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{H}_1$ per $t = o$ sono nulli in tutto S si ottiene

$$\int_S \left(\frac{\mu}{\rho}H_1^2 + v_1^2\right)dS \leq 2R\int_0^t dt\int_S \left(\frac{\mu}{\rho}H_1^2 + v_1^2\right)dS.$$

Da quest' ultima disuguaglianza è facile ora ricavare [6]) che

---

[6]) Sia data infatti una relazione della forma

$$a \leq 2R\int_0^t a\,dt \tag{23}$$

dove a sia supposta limitata e non negativa in tutto $o - t$ ed R sia deve essere

$$\int_S \left(\frac{\mu}{\rho} H_1^2 + v_1^2\right) dS = 0$$

per ogni $t \geq o$, da cui segue che $\boldsymbol{H}_1 \equiv o$ e $\boldsymbol{v}_1 \equiv o$ in tutto S.

Resta ancora da esaminare il comportamento di p_1; dalla (12) si ricava subito che è $\operatorname{grad} p_1 = 0$ e quindi p_1 è costante in tutto S; tale costante diventa zero se la p è nota in un solo punto del campo S.

Con ciò il teorema proposto risulta dimostrato per S limitato.

Se poi il campo S si estende all'infinito, in aggiunta alle condizioni iniziali e alle condizioni sull'eventuale contorno σ che limita il detto campo al finito, si può supporre, per esempio, che in ogni istante $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{v}$ assumano un valore assegnato all'infinito con ordine numerico > 2 [7]). In tal caso $\boldsymbol{H}_1$ e $\boldsymbol{v}_1$ risultano all'infinito infinitesimi di ordine numerico > 2 [8]). Dopo di che quale variante al procedimento adottato dian-

---

≥ 0. Se ora si indica con m il limite superiore di a in $o - t$, si ottiene da (23)

$$a \leq 2Rmt;$$

sostituendo tale valutazione ancora a secondo membro di (23) si ottiene

$$a \leq (2R)^2 m \frac{t^2}{2}$$

e così proseguendo si ricava

$$a \leq \frac{(2R)^n m t^n}{n!}$$

da cui segue che $a = o$ in tutto $o - t$.

[7]) Dicendo che uno scalare $\varphi(P)$ assume all'infinito un certo valore φ_∞ con ordine numerico n intendiamo porre la condizione che esista una sfera con centro in un punto P_0 dello spazio e raggio R tale che in ogni punto esterno a questa sfera sia

$$|\varphi(P) - \varphi_\infty| \leq \frac{M}{r^n}$$

dove M è un numero positivo costante ed r è la distanza di P da P_0.

[8]) Naturalmente si possono assumere altre condizioni di conver-

zi, basta integrare le equazioni (17) e (18) nella porzione di spazio compresa fra le eventuali superfici σ che limitano lo spazio S ad finito ed una sfera Σ tale da contenerle tutte; si può maggiorare i secondi membri delle equazioni così ottenute sopprimendone i termini certamente non positivi e applicare il teorema della divergenza a tutti i termini che lo consentono; gli integrali estesi a Σ che vengono così a introdursi tendono a zero al tendere all'infinito del raggio di Σ per le supposte condizioni di convergenza, mentre i rimanenti integrali, estesi ad S, risultano convergenti.

Si ottengono perciò delle equazioni analoghe alle (21) e (22) e si può concludere come si è fatto precedentemente.

4. Dimostrazione del secondo teorema. — Teniamo ora conto anche del termine $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ che compare nella (1) assumendo

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{24}$$

dove ε è la costante dielettrica del liquido. Allora eliminando $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ fra le (1), (2), ..., (6) e (24) si ottengono le equazioni

$$\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \gamma(\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) \tag{25}$$

$$\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \tag{26}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}[\mu\gamma \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H} + \mu^2\gamma(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) \wedge \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} p] + \\ + \boldsymbol{F} - \frac{\nu}{2} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{v}, \tag{27}$$

genza in modo da avere, per esempio, che all'infinito siano infinitesime le seguenti funzioni: H_1 e v_1 di ordine numerico $> \frac{3}{2}$, $|\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_1|$, p_1 e $|\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_1|$ di ordine numerico $\geq \frac{1}{2}$.

a cui vanno aggiunte le (7) ed (8) e le condizioni iniziali e al contorno.

Indichiamo anche qui con $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{v}_1$, p_1 le differenze fra due soluzioni del problema. Tali grandezze soddisfano le equazioni

$$(28)\qquad \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}_1}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_1 - \gamma\boldsymbol{E}_1 - \gamma\mu[\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{v}_1\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)]$$

$$(29)\qquad \mu\frac{\partial \boldsymbol{H}_1}{\partial t} = -\operatorname{rot}'\boldsymbol{E}_1$$

$$(30)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1 - \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) + \Psi - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p_1 - \frac{\nu}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1,$$

dove si è posto per brevità

$$\Psi = \frac{\mu\gamma}{\rho}[\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{E}_1\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)] + \frac{\mu^2\gamma}{\rho}\Big\{[\boldsymbol{v}_1\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)]\wedge$$
$$\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1) + [\boldsymbol{v}\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)]\wedge\boldsymbol{H}_1 + (\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}_1)\wedge\boldsymbol{H}\Big\}.$$

Alle (28), (29) e (30) vanno aggiunte le (13) e (14) e le condizioni iniziali $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{v}_1 = 0$ in tutto S e, in ogni istante, le condizioni su σ $\boldsymbol{H}_1\wedge\boldsymbol{n} = 0$ (oppure $\boldsymbol{E}_1\wedge\boldsymbol{n} = 0$) e $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{n} = 0$.

Sommiamo ora la (28) moltiplicata scalarmente per $\boldsymbol{E}_1$ con la (29) moltiplicata scalarmente per $\boldsymbol{H}_1$: si ottiene

$$(31)\qquad \frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{\partial E_1^2}{\partial t} + \mu\frac{\partial H_1^2}{\partial t}\right) = \operatorname{div}(\boldsymbol{H}_1\wedge\boldsymbol{E}_1) - \gamma E_1^2 - \gamma\mu[\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{v}_1\wedge$$
$$\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)]\times\boldsymbol{E}_1.$$

Moltiplicando poi la (30) scalarmente per $\boldsymbol{v}_1$ si ha

$$(32)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial v_1^2}{\partial t} = -\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_1 - \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dP}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{v}_1 + \Psi\times\boldsymbol{v}_1 -$$
$$-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p_1\times\boldsymbol{v}_1 - \frac{\nu}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_1.$$

Applicando le trasformazioni *d*) del numero precedente, integriamo le (31) e (32) su tutto S (supposto per ora finito). Eliminando in base alle condizioni al contorno i termini a cui si può applicare il teorema della divergenza e trascurando a secondo membro i termini certamente non positivi si giunge alle relazioni

$$(33) \qquad \frac{1}{2}\int_S\left(\varepsilon\frac{\partial E_1^2}{\partial t}+\mu\frac{\partial H_1^2}{\partial t}\right)dS \leq -\gamma\mu\int_S[\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{v}_1\wedge$$
$$\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)]\times\boldsymbol{E}_1\,dS$$

$$(34) \qquad \frac{1}{2}\int_S\frac{\partial v_1^2}{\partial t}dS \leq -\int_S\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_1\,dS+\int_S\boldsymbol{\Psi}\times\boldsymbol{v}_1\,dS\,.$$

Per la supposta limitazione delle soluzioni in questione, si può trovare un numero M funzione di P e di t tale che in tutto S e per ogni $0 \leq t < +\infty$ sia maggiore di v e di $|\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1|$; allora il termine a secondo membro di (33) si può maggiorare con

$$\gamma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_S(\sqrt{\varepsilon}\,E_1\cdot\sqrt{\mu}\,H_1+\sqrt{\varepsilon}\,E_1\cdot\sqrt{\mu}\,v_1)M\,dS\,.$$

Per quanto riguarda il complesso dei termini dati da $\boldsymbol{\Psi}\times\boldsymbol{v}_1$ si osservi anzitutto che

$$[\boldsymbol{v}_1\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)]\wedge(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)\times\boldsymbol{v}_1=[\boldsymbol{v}_1\times(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)]^2-$$
$$-v_1^2(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1)^2\leq 0;$$

introducendo poi, in maniera analoga a quanto si è fatto precedentemente, un numero N che risulti sempre maggiore od uguale ai numeri E, $|\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1|$, $|\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_1|v$, vH si ricava che

$$\int_S\boldsymbol{\Psi}\times\boldsymbol{v}_1\,dS \leq \frac{\gamma}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_S[\sqrt{\mu}H_1\cdot\sqrt{\varepsilon}v_1+\sqrt{\varepsilon}E_1\cdot\sqrt{\mu}v_1+$$
$$+2\mu\sqrt{\mu}H_1\cdot\sqrt{\varepsilon}v_1]N\,dS\,.$$

Introducendo le relazioni trovate in (33) e (34) e applicando la solita formula $AB \leq \dfrac{A^2+B^2}{2}$ (A e B reali), si ottengono le disuguaglianze

$$\frac{1}{2}\int_S\left(\varepsilon\frac{\partial E_1^2}{\partial t}+\mu\frac{\partial H_1^2}{\partial t}\right)dS\leq\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_S[2(\varepsilon E_1^2+\mu H_1^2)+\mu v_1^2]MdS$$

$$\frac{1}{2}\int_S\frac{\partial v_1^2}{\partial t}dS\leq\int_S Lv_1^2dS+\frac{\gamma}{2\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_S\left\{(1+2\mu)(\varepsilon E_1^2+\mu H_1^2)+\right.$$
$$\left.+(\varepsilon+\mu+2\mu\varepsilon)v_1^2\right\}NdS.$$

Integrando tali disuguaglianze fra o e t e scegliendo opportunamente R si arriva alle relazioni

$$\int_S(\varepsilon E_1^2+\mu H_1^2)dS\leq R\int_0^t dt\int_S(\varepsilon E_1^2+\mu H_1^2+v_1^2)dS$$

$$\int_S v_1^2dS\leq R\int_0^t dt\int_S(\varepsilon E_1^2+\mu H_1^2+v_1^2)dS$$

da cui, sommando membro a membro e ripetendo il ragionamento già fatto al n. 3, è immediato ricavare che è $E_1\equiv 0$, $H_1\equiv 0$, $v_1\equiv 0$.

Per assicurare la validità della dimostrazione nel caso in cui il campo S si estende all'infinito basta aggiungere opportune condizioni di convergenza all' infinito.