STEFANO GUAZZONE

Su certe sezioni spaziali di varietà intersezioni complete di due forme di S_r

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 293-302

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__293_0>

SU CERTE SEZIONI SPAZIALI DI VARIETÀ INTERSEZIONI COMPLETE DI DUE FORME DI S_r

Nota (*) *di* STEFANO GUAZZONE (*a Roma*)

1. - Nell' ordine di idee di uno studio iniziato da alcuni lavori di U. MORIN, B. SEGRE ed A. PREDONZAN [1]), si presenta il seguente problema: determinare sotto quali condizioni la varietà V, intersezione completa generale di più forme di S_r, di dati ordini $n_1, n_2, \dots, n_m$, ammetta degli spazi lineari S_k, di dimensione k, che la seghino secondo varietà F^s_{k-1}, di dimensione $k-1$ e di dato ordine s. Il detto problema estende, in senso diverso, quello considerato da A. PREDONZAN e quello considerato da me in una precedente Nota. In questa Nota affronto il problema in un caso molto particolare, che sembra di per se stesso non privo di interesse, riservandomi di considerarlo in tutta la sua generalità in un lavoro successivo. Voglio pertanto provare che la varietà $V^{n(n-}_{r-2}$, intersezione completa di due forme F^n_{r-1}, F^{n-1}_{r-1}, di ordini rispettivi n, $n-1$, di S_r. ammette degli S_k che la seghino secondo delle F^{n-1}_{k-1}, di ordine $n-1$, allora e solò che è:

$$r+1 \geq k + \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k}. \tag{1}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 3 giugno 1952.

1) Cfr. U. MORIN, *Sull' insieme degli spazi lineari...*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei (6), 24, (1936) p. 188; B. SEGRE, *Intorno agli S_k che appartengono alle forme...*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (8) 4, (1947), p. 261 e p. 341; A. PREDONZAN, *Intorno agli S_k che appartengono alla varietà...*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei (8), 5, (1948), p. 238.

2) S. GUAZZONE, *Sulle ipersuperficie di S_k e di ordine s che appartengono...*, Rend. Sem. Mat. di Padova, XXI (1952).

Il procedimento dimostrativo è analogo a quello usato nei precedenti lavori (cfr. A. PREDONZAN, loc. cit. e S. GUAZZONE, loc. cit.) e quindi mi pare non abbisogni di ulteriori chiarimenti.

2. - Indichiamo con $V_{r-2}^{n(n-1)}$, o più brevemente con V, la generica varietà intersezione completa delle due forme F^n, F^{n-1} di S_r, cioè l' elemento generico del sistema prodotto del sistema lineare di dimensione $R = \binom{n+r-1}{r} - 1$ delle F^{n-1} di S_r per il sistema lineare segato su di una F^{n-1} dalle F^n di S_r. V appartiene pertanto ad un sistema razionale, e quindi irriducibile, di varietà del medesimo tipo, essendo inoltre

$$B = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r} - r - 3 \tag{2}$$

la dimensione del detto sistema razionale.

Si fissi un S_k di S_r, ed entro questo S_k una qualunque F_{k-1}^{n-1}, cioè una qualunque ipersuperficie di S_k di ordine $n-1$.

Le $V_{r-2}^{n(n-1)}$ del sistema ∞^B di cui abbiamo detto, che passino per la fissata F_{k-1}^{n-1}, si ottengono tutte fissando in un primo tempo una ipersuperficie F_{r-1}^{n-1} di S_r passante per F_{k-1}^{n-1}; poi considerando una F_{r-1}^{n} di S_r, variabile, passante sempre per F_{k-1}^{n-1}, la quale sega sulla F_{r-1}^{n-1} fissata or ora le $V_{r-2}^{n(n-2)}$ che ci interessano; ed infine facendo muovere la F_{r-1}^{n-1} fissata in precedenza. Dunque le $V_{r-2}^{n(n-1)}$ passanti per F_{k-1}^{n-1} dipendono da:

$$b = \binom{n+r-1}{r} - \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+r}{r} - \binom{n+k}{k} + k - r - 1 \tag{3}$$

parametri, dato che il passaggio per F_{k-1}^{n-1} impone $\binom{n+k-1}{k} - 1$ condizioni alle F_{r-1}^{n-1} di S_r, e $\binom{n+k}{k} - 1 - k$ condizioni alle F_{r-1}^{n} dello stesso spazio ambiente. L' esattezza del computo del numero b si può controllare scrivendo opportunamente le equazioni di una $V_{r-2}^{n(n-1)}$ per F_{k-1}^{n-1}. Si riferisca dunque lo S_r ad un sistema di coordinate proiettive omogenee $x_0, x_1, \dots, x_r$ e si supponga (ciò che è lecito, a meno di un cambiamento di riferimento) che

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_r = 0 \tag{4}$$

siano le equazioni dello S_k di F_{k-1}^{n-1}. Sia inoltre

$$f^{(n-1)}(x_0, \dots, x_k) = 0 \tag{5}$$

l' equazione (ove $f^{(n-1)}(x_0, \dots, x_k)$ è supposta non identicamente nulla) che individua entro S_k la F_{k-1}^{n-1}. Allora l' equazione di una qualunque F_{r-1}^{n-1} per F_{k-1}^{n-1} può scriversi:

$$\sum_{k+1}^{r} {}_i\, x_i \varphi_i^{(n-2)}(x_0, \dots, x_k, x_i, \dots, x_r) + f^{(n-1)}(x_0, \dots, x_k) = 0\,. \tag{6}$$

Nei vari termini della sommatoria a primo membro, cioè nei termini del tipo $x_i\varphi_i$, si intendono raggruppati nell' ordine, prima i monomi che contengono effettivamente la x_{k+1}, poi quelli che contengono la x_{k+2} e non la x_{k+1} e così via; ciò che agevola il computo dei coefficienti che rimangono indeterminati nella (6), una volta che si sia fissata la forma $f^{(n-1)}(x_0, \dots, x_k)$.

Scrivendo col medesimo criterio l' equazione di una F_{r-1}^{n} per F_{k-1}^{n-1} si ottiene una espressione del tipo:

$$\sum_{k+1}^{r} {}_i\, x_i \psi_i^{(n-1)}(x_0, \dots, x_k, x_i, \dots, x_r) + \\ + L(x_0, \dots, x_k) \cdot f^{(n-1)}(x_0, \dots, x_k) = 0\,. \tag{7}$$

Indichiamo brevemente con $\Phi = 0$ e $\Psi = 0$ le equazioni (6) e (7). Ogni coppia di equazioni ($\Phi = 0$, $\Psi = 0$) in cui Φ e Ψ siano irriducibili individua una $V_{r-2}^{n(n-1)}$ del tipo voluto, cioè passante per la $F_{k-1}^{n-1} \{ f^{(n-1)}(x_0, \dots, x_k) = 0,\ x_{k+1} = \dots = x_r = 0$. Viceversa ogni $V_{r-2}^{n(n-1)}$ per F_{k-1}^{n-1} individua una equazione del tipo (6), diciamo $\overline{\Phi} = 0$, ed una del tipo (7): $\overline{\Psi} = 0$, ove però la forma $\overline{\Psi}$ può essere sostituita da un' altra forma $\overline{\Psi}'$ del sistema lineare $\overline{\Psi} + \Pi \cdot \overline{\Phi}$ dipendente dalla variabilità della forma lineare Π, tutte le volte che sia $\overline{\Psi}' \not\equiv 0$ mod. Φ [3]); cosicchè il sistema

$$\begin{cases} \overline{\Phi} = 0 \\ \overline{\Psi}' = 0 \end{cases}$$

sia atto a rappresentare la data V.

---

[3]) Se $\overline{\Phi}$ è irriducibile; altrimenti $\overline{\Psi}' \not\equiv 0$ mod. ogni componente di $\overline{\Phi}$.

Ciò premesso il computo dei parametri da cui dipendono le nostre $V^{n(n-1)}$ si può condurre a partire dalle equazioni (6) e (7) nel seguente modo: contando prima i coefficienti indeterminati nella (6) in cui si pensi fissata a priori solo la $f(x_0, \dots, x_k)$, cioè contando i coefficienti di tutte le φ_i. Si hanno così:

$$\binom{n+r-2}{n-2}+\binom{n+r-3}{n-2}+, \dots, +\binom{n+k-1}{n-2}= \\ =\binom{n+r-1}{r}-\binom{n+k-1}{k}$$

parametri da cui dipende V; poi contando nella (7) i coefficienti delle ψ_i e della $L(x_0, \dots, x_k)$:

$$\binom{n+r-1}{n-1}+\binom{n+r-2}{n-1}+, \dots, +\binom{n+k}{n-1}+k+1= \\ =\binom{n+r}{r}-\binom{n+k}{k}+k+1$$

corrispondenti ad $\binom{n+r}{r}-\binom{n+k}{k}+k$ parametri non omogenei; dei quali però $r+1$ vanno pensati, per così dire, « saturati » dalla possibilità di sostituire alla Ψ, e in ∞^{r+1} modi diversi, una $\Psi+\Pi\Phi$, cioè dalla possibilità di fissare a piacere la forma lineare Π. Si hanno dunque in tutto

$$(8) \quad b=\binom{n+r-1}{r}-\binom{n+k-1}{k}+\binom{n+r}{r}-\binom{n+k}{k}+k-r-1$$

parametri da cui dipende V.

3. - Ciò che maggiormente interessa osservare riguardo alla quantità b è che il suo valore non dipende da quale F_{k-1}^{n-1} si sia fissata, fra tutte quelle esistenti nei vari S_k di S_r. Segue di qui che la corrispondenza algebrica intercedente fra tali F_{k-1}^{n-1} e le varietà V di S_r, definita dalla relazione di appartenenza, è una corrispondenza irriducibile, in quanto associa ad ogni F_{k-1}^{n-1} di un qualunque S_k di S_r un sistema (razionale) irriducibile di dimensione costante, b, di V passanti per essa [4]).

[4]) Ved. SEVERI F., *Introduzione alla Geometria Algebrica I*, Roma, 1948, p. 156; oppure. B. L. VAN DER WARDEN, *Einführung in die Algebraische Geometrie*, 1939, p. 143.

Ed irriducibile è pure il sistema di tutte le V che contengono qualche F_{k-1}^{n-1}. Indichiamo con

$$c = B - \varepsilon \qquad (\varepsilon \geq 0) \tag{9}$$

la dimensione di detto sistema, con

$$a = (r-k)(k+1) + \binom{n+k-1}{k} - 1 \tag{10}$$

quella dell' insieme di tutte le F_{k-1}^{n-1} contenute negli S_k di S_r, e con d la dimensione dell' insieme delle F_{k-1}^{n-1} che appartengono alla generica V del sistema ∞^c. Il principio del computo delle costanti, applicato alla corrispondenza irriducibile sopra definita, fornisce per d l' espressione:

$$d = a + b - c,$$

cioè:

$$d = (r-k)(k+1) - \binom{n+k}{k} + k + 1 + \varepsilon$$

e, ponendo per comodità:

$$\delta = (r-k)(k+1) - \binom{n+k}{k} + k + 1 \tag{11}$$

possiamo scrivere:

$$d = \delta + \varepsilon. \tag{12}$$

Essendo per sua natura $d \geq 0$, segue dalla (12) che condizione necessaria affinchè sia $\varepsilon = 0$ è che sia $\delta \geq 0$; e quest' ultima diseguaglianza è equivalente alla (1). Mostriamo nei successivi paragrafi che la condizione è anche sufficiente.

4. - Entro un qualunque S_k di S_r, $\overline{S}_k$, si fissi una F_{k-1}^{n-1}, che designeremo con $\overline{F}$, generale dell' ordine $n-1$. La totalità delle varietà $V = V_{r-2}^{n(n-1)}$ di S_r passanti per essa costituisce, in base al n. 2, un sistema algebrico irriducibile Σ, ∞^b. Sempre in base al n. 2 possiamo anche affermare che la generica varietà V di Σ è generica tra le V di S_r che contengono qualche F_{k-1}^{n-1}.

Dunque, per il computo di costanti eseguito al n. 3, la generica varietà V di Σ contiene esattamente ∞^d F_{k-1}^{n-1}, con

$d = \delta + \varepsilon$; oppure, ciò che è lo stesso, ma espresso forse con linguaggio più preciso: esistono ∞^b varietà V di Σ che contengono ∞^d F_{k-1}^{n-1} e non più. Queste varietà V costituiscono un sistema, eventualmente non algebrico, che vogliamo designare con Σ^*.

Indichiamo poi con G un qualunque sistema algebrico di F_{k-1}^{n-1} di S_r, che contenga tutte le F_{k-1}^{n-1} appartenenti a tutte le V di Σ^*. L'intersezione di tutti i possibili sistemi G di S_r, è ancora un sistema algebrico [5]), diciamo M', e precisamente il minimo sistema algebrico che contiene le F_{k-1}^{n-1} appartenenti alle V di Σ^*. Dalla definizione stessa di M' segue immediatamente che esiste almeno una sua componente irriducibile, M, che gode della seguente proprietà (I):

(I) La generica V di Σ contiene ∞^d F_{k-1}^{n-1} di M.

Si noti inoltre che la generica F_{k-1}^{n-1} di M appartiene a qualche V generica di Σ, cioè a qualche V di Σ^*.

Mostriamo infine che vale per il sistema M la seguente proprietà (II):

(II) La corrispondenza che associa una F_{k-1}^{n-1} di M ed una V di Σ quando si appartengono è irriducibile (e non degenere su entrambi i sistemi M e Σ).

Infatti una tale corrispondenza associa alle F_{k-1}^{n-1} di M le V di Σ passanti per esse; ora, le V passanti per una ben determinata F_{k-1}^{n-1} di M si possono pensare ottenute come varietà intersezione di una F_{r-1}^{n} ed una F_{r-1}^{n-1}, cui sia stato preventivamente imposto il passaggio per la medesima varietà

$$\overline{F} + F_{k-1}^{n-1} .$$

Perciò tali V costituiscono un sistema (razionale) irriducibile, subordinato a Σ. Anzi, il passaggio per F_{k-1}^{n-1} impone un numero χ di condizioni alle V di Σ, che è costante per le determinazioni « generiche » di F_{k-1}^{n-1} entro M, mentre può diminuire solo per posizioni particolari (cioè per non più di $\infty^{\mu-1}$ posizioni, se μ è la dimensione di M come insieme di F_{k-1}^{n-1}): ad esempio $\chi = 0$ per $F_{k-1}^{n-1} \equiv \overline{F}$.

Segue da queste considerazioni che la corrispondenza in

[5]) Sempre pensando le F_{k-1}^{n-1} come elementi.

istudio possiede tutti i requisiti per potervi applicare una nota proposizione della teoria generale delle corrispondenze [6]), la quale in sostanza ci permette di affermare che, ove la detta corrispondenza non sia irriducibile, si può da essa staccare una componente irriducibile, nella quale intervengono solo gli elementi generici di M, e gli elementi di Σ che ad essi corrispondono; e poichè, come abbiamo già osservato esplicitamente, la generica F_{k-1}^{n-1} di M appartiene a qualche V generica di Σ, questa « sottocorrispondenza » risulta anch'essa non degenere in Σ.

Quanto siamo venuti esponendo a rigore non dimostra che la corrispondenza, di per sè stessa, cioè come è definita nell'enunciato della proprietà (II), è irriducibile; ma, ciò che a noi importa per il seguito, resta dimostrata l'esistenza di almeno una corrispondenza tra M e Σ, irriducibile e caratterizzata dalle costanti numeriche b, d, e μ. A questa corrispondenza vanno riferiti i computi di costanti che eseguiremo nei successivi paragrafi, e che ci faranno ottenere la parte sufficiente del teorema.

5. - Sia Γ il sistema razionale delle V di Σ che contengono una fissata F_{k-1}^{n-1} generica di M, e γ la sua dimensione.

In base al paragrafo precedente vale la relazione:

$$b + \delta + \varepsilon = \mu + \gamma . \tag{13}$$

Supponiamo in primo luogo che l' S_k di appartenenza di F_{k-1}^{n-1} (generica di M) sia sghembo con $\overline{S_k}$. Allora possiamo scrivere:

$$\mu = (r - k)(k + 1) + \binom{n + k - 1}{k} - 1 - \varepsilon_1 \tag{14}$$

con ε_1 intero opportuno, non negativo:

$$\varepsilon_1 \geq 0 . \tag{15}$$

Inoltre è:

$$\gamma = b - \binom{n + k}{k} + k + 1 - \binom{n + k - 1}{k} + 1 . \tag{16}$$

---

[6]) Ved. SEVERI F., *op. cit.*, p. 160.

Sostituendo nella (13) mediante le (8), (11), (14) e (16) si ha:

$$(17) \qquad \varepsilon + \varepsilon_1 = 0$$

il che, tenendo conto della (15) sarebbe assurdo se la generica V di S_r non contenesse F_{k-1}^{n-1}, cioè se fosse $\varepsilon > 0$.

6. - Supponiamo adesso che l'S_k di appartenenza della generica F_{k-1}^{n-1} di M sia incidente ad $\overline{S}_k$ secondo un S_h, dunque $h < k$. Fissiamo l'attenzione su di una ben determinata F_{k-1}^{n-1} di M, generica, diciamo F^*. Poichè le V generiche passanti per F^* sono V generiche di Σ, e poichè le V generiche di $\overline{\Sigma}$ non hanno altri punti in $\overline{S}_k$ eccetto quelli di $\overline{F}$, segue che la F_{h-1}^{n-1} segata su S_h dalla F^*, è contenuta in $\overline{F}$, oppure, se tale F_{h-1}^{n-1} è indeterminata in S_h, segue che l'intero S_h è contenuto in $\overline{F}$.

Distinguiamo queste due alternative, caratterizzandole al seguente modo:

A) L'S_k di F^* è incidente ad $\overline{S}_k$ secondo un S_h, senza che questo S_h sia contenuto in $\overline{F}$.

B) L'S_k di F^* è incidente ad $\overline{S}_k$ secondo un S_h, che è sempre immerso in $\overline{F}$ (ed in F^*).

Altre alternative non sono possibili: infatti, se l'S_h in discorso è immerso in F^* è immerso anche in $\overline{F}$, e viceversa, se è immerso in $\overline{F}$, essendo costituito da punti di S_k che appartengono a tutte le V per F^*, sta anche in F^*.

Poniamoci nell'ipotesi A). Allora la dimensione di Γ (cfr. n. 5) vale

$$(18) \quad \gamma_1 = b - \binom{n+k}{k} + k + 1 - \binom{n+k-1}{k} + 1 + \binom{n+h}{h} - \\ - h - 1 + \binom{n+h-1}{h} - 1.$$

Infatti, se vogliamo imporre alle V di Σ il passaggio per F^*, dobbiamo considerare che la generica V di Σ passa già per la F_{h-1}^{n-1} segata da S_h su F^*, e per nessun altro punto di F^*; perchè un ulteriore eventuale punto di F^* per cui passi la generica V di Σ, appartiene necessariamente ad S_h; e se questo punto non appartenesse a F_{h-1}^{n-1}, F^* conterrebbe tutto l'S_h, ciò che abbiamo escluso.

Il sistema M è contenuto nel sistema di F_{k-1}^{n-1} costruito nel modo seguente: si fissi un qualunque S_h di $\overline{S}_k$; poi un qualunque S_k di S_r passante per l' S_h fissato, e dentro questo S_k si fissi una F_{k-1}^{n-1}, qualsiasi, purchè contenga la $\overline{F}_{h-1}^{n-1}$ segnata su S_h da $\overline{F}$, e infine si facciano variare in tutti i modi consentiti l' S_h, l' S_k, e la F_{k-1}^{n-1}. Dunque possiamo scrivere:

$$(19) \qquad \mu_1 = (r-k+h+1)(k-h) + \binom{n+k-1}{k} - 1 - \binom{n+h-1}{h} + 1 - \varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_2 \geq 0).$$

La (13), in cui al posto di μ e γ si sostituiscono i valori μ_1 e γ_1 forniti dalle (18) e (19), diviene:

$$(20) \qquad (r-2k+h)(h+1) + \varepsilon + \varepsilon_2 = \binom{n+h}{h} - (h+1).$$

Vogliamo far vedere che, ogni qualvolta è verificata la (1), dalla (20) segue: $\varepsilon = 0$. Ragionando per assurdo supponiamo verificata la (1) e la $\varepsilon \geq 1$. Allora è (in base alla 20):

$$(21) \qquad r-k+1+\frac{1}{h+1} \leq \frac{1}{h+1}\binom{n+h}{h} + k - h$$

e simultaneamente:

$$(1) \qquad r-k+1 \geq \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k};$$

segue immediatamente la:

$$(22) \qquad \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k} + \frac{1}{h+1} \leq \frac{1}{h+1}\binom{n+h}{h} + k - h.$$

Ricordando che è $k > h$, ci si convince facilmente che la (22) è assurda per ogni h, k ed $n \geq 3$.

Poniamoci nell' ipotesi B). Con ragionamenti analoghi a quelli sviluppati sopra, si perviene alle seguenti espressioni delle dimensioni di M e Γ:

$$\mu_2 = (r-k+h+1)(k-h) - \binom{n+h-1}{h} + \binom{n+k-1}{k} - 1 - \binom{n+h-1}{h} - \varepsilon_3 \qquad (\varepsilon_3 \geq 0),$$

$$\gamma_2 = b - \binom{n+k}{k} + k + 1 - \binom{n+k-1}{k} + 1 + \binom{n+h}{h} + \binom{n+h-1}{h}.$$

Facendo le sostituzioni nella (13) e ammettendo la (1) insieme con la $\varepsilon \geq 1$ si giunge alla relazione:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k} + \frac{1}{h+1} \leq \frac{1}{h+1}\binom{n+h}{h} + k - h - \frac{1}{h+1}\left[\binom{n+h-1}{h} - (h+1)\right]$$

che è assurda « a fortiori » rispetto alla (22), dalla quale differisce solo per il termine fra parentesi quadre, che è certamente non negativo ($n \geq 3$). Con ciò la sufficienza della (1) è completamente dimostrata.