Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Grioli

Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 256-277

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__256_0>

QUESTIONI DI DINAMICA DEL SOLIDO PESANTE ASIMMETRICO

Memoria (*) *di* GIUSEPPE GRIOLI (*a Padova*)

La ricerca di movimenti dinamicamente possibili per il solido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un suo punto può essere condotta con qualche probabilità di successo solo quando sia prefissata qualche loro proprietà caratteristica che permetta di stabilire determinate plausibili relazioni tra gli elementi da cui dipende la conoscenza del movimento stesso.

E' naturale che i primi moti a cui vien di pensare siano le rotazioni uniformi e non uniformi e le precessioni regolari.

In ordine di complessità vengono subito dopo le precessioni non regolari ma anche solo una loro parziale determinazione per qualche sondaggio da me fatto, mi pare presenti notevoli difficoltà algoritmiche se esse si caratterizzano nel modo che sembra più naturale e semplice: mediante la invariabilità dell' angolo di nutazione di una terna solidale rispetto ad una fissa.

Volendo assumere come punto di partenza qualche particolare proprietà del movimento mi sembra possa riuscire conveniente prendere di mira anzichè il comportamento della velocità angolare quello del momento delle quantità di moto. In tal modo entrano in giuoco non solo particolarità puramente cinematiche ma anche la distribuzione delle masse e, nel caso del peso, direi, quella delle forze e le equazioni dinamiche assumono un aspetto diverso dal solito che mi pare possa condurre a qualche risultato concreto.

(*) Pervenuta in Redazione il 1° agosto 1952.

In questo ordine di idee viene spontaneo cominciare col porsi la ricerca di movimenti in cui il momento delle quantità di moto rispetto al punto fisso mantiene direzione invariabile o è somma di due termini, uno di direzione invariabile nello spazio l'altro nel corpo. Tali movimenti esistono nel caso di un giroscopio pesante fissato senza attrito per un punto dell'asse giroscopico e sono — com'è noto — precessioni o, in particolare, rotazioni. Nel caso dei solidi asimmetrici moti soddisfacenti alla condizione posta esistono: ad es. le rotazioni uniformi attorno alla verticale e quelle non uniformi [moti di Mlodzjejowsky [1])] attorno ad un asse principale di inerzia [ortogonale ad un piano centrale] disposto orizzontalmente.

Qui mi propongo di porre il problema nella sua forma più generale e delimitare il campo di ricerca cominciando col dimostrare innanzitutto che non sono dinamicamente possibili per il solido pesante asimmetrico movimenti in cui il momento delle quantità di moto rispetto al punto fisso è somma di due termini di cui uno costante nello spazio, l'altro nel corpo [dirò, in tal caso, che il momento delle quantità di moto ha carattere *precessionale regolare*].

Rimane aperta la questione generale della determinazione dei movimenti in cui il momento delle quantità di moto risulta la somma di due termini dei quali uno ha direzione invariabile nello spazio, l'altro nel corpo [dirò semplicemente che il momento delle quantità di moto ha carattere *precessionale*]. Di tale problema qui traccio una possibile via di risoluzione. Se però, in particolare, si impone al momento delle quantità di moto rispetto al punto fisso la sola condizione di avere direzione invariabile nello spazio si può dimostrare — come farò — che la totalità di tutti i movimenti soddisfacenti a tale condizione — se si escludono le rotazioni uniformi attorno un asse centrale — è una classe di moti di Hess consistenti in precessioni non regolari e, in particolare, in rotazioni non uniformi.

---

1) MARCOLONGO: *Meccanica razionale.* Vol. II, 3ª ediz., Milano, Hoepli, 1923, p. 282.

E' noto lo studio geometrico di Jokowsky [2]) dei moti di Hess e anche il Prof. Antonio Signorini in varie conferenze tenute in Italia e all'estero ha indicato una loro caratterizzazione fondata sopra un' estensione da lui stesso fatta dell' ellisse di Culmann [3]).

Qui intendo fare invece una completa descrizione analitica delle precessioni di cui sopra che vengono fuori in quanto caratterizzati dall'accennata proprietà del momento delle quantità di moto e la loro determinazione per quadrature. Tale studio analitico non mi sembra superfluo anche per varie osservazioni e particolarità che ne seguono.

Tra l' altro si vedrà chiaramente come le suddette precessioni risultano dalla composizione di un moto di Mlodzjejowsky con un moto di rotazione propria, fatto questo che — se si riflette che la realizzazione di una rotazione non uniforme di Mlodzjejowsky non richiede il verificarsi della nota condizione strutturale [4]) di Hess — fa pensare alla eventualità della esistenza di precessioni analoghe al di fuori dei moti di Hess. Intendo dire che non può escludersi l' esistenza di precessioni composte da un moto di Mlodzjejowsky con uno di rotazione propria [5]) anche quando il solido *è* fissato per un punto per il quale non è soddisfatta la condizione strutturale di Hess.

Così pure risulterà che la determinazione della precessioni di cui sopra — che in generale si fa per quadrature ellittiche — si effettua invece per soli esponenziali allora e soltanto allora che l' energia totale sia uguale al prodotto del peso del corpo per la distanza del suo baricentro dal punto fisso.

---

[2]) JOKOWSKY: *Jahresbericht der Deutschen Mathematischer Vereinigung.* Bd. III, p. 62.

[3]) A tal proposito vedi A. SIGNORINI: *Meccanica razionale con elementi di Statica grafica,* Vol. I, p. 313 [Seconda ediz. - Perella].

[4]) LEVI-CIVITA: *Lezioni di Meccanica razionale.* Vol. II, parte II, p. 202. Vedi anche nota [10]).

[5]) Naturalmente non soddisfacenti alla condizione che il momento delle quantità di moto abbia direzione invariabile.

1. - Premesse di carattere generale.

In questo numero preciserò le equazioni generali su cui può fondarsi la ricerca dei movimenti del solido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un suo punto O, nei quali il momento delle quantità di moto rispetto ad O risulta la somma di due termini di cui uno di direzione invariabile nello spazio, l' altro nel corpo.

Le notazioni e formule generali stabilite serviranno nei numeri successivi.

Nei movimenti sopra indicati il momento delle quantità di moto rispetto ad O ammette la rappresentazione analitica

$$\boldsymbol{K} = K_1 \chi + K_2 \boldsymbol{i}_3 , \tag{1}$$

ove χ è il versore di una invariabile direzione dello spazio, $\boldsymbol{i}_3$ un versore solidale al corpo e K_1, K_2 due funzioni scalari del tempo.

Assumendo la terna trirettangola levogira solidale $O\xi\eta\zeta$ con l' asse ζ parallelo e concorde ad $\boldsymbol{i}_3$ suppongo [com' è certamente lecito] che il piano $O\xi\zeta$ abbia quella giacitura per cui risulta

$$C' = 0 . \tag{2}$$

In tal caso l' omografia di inerzia, σ, è rappresentata dalla matrice

$$\sigma \equiv \left| \begin{matrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{matrix} \right| , \tag{3}$$

ove [come nella (2)] il significato dei simboli è il solito.

Detti C^* il corpo considerato, G il suo baricentro, m la sua massa, g il modulo della accelerazione di gravità ω la velocità angolare di C^*, μ il versore della verticale discendente e ν l' angolo di χ e μ, pongo

$$l = |OG| \quad , \quad \alpha = mgl \quad , \quad \boldsymbol{k} = \operatorname{vers} OG . \tag{4}$$

Denotando con μ_1, μ_2, μ_3 i coseni direttori di μ rispetto agli assi solidali, l' integrale del momento delle quantità di moto si scrive, in base a (1)

$$K_1 \cos\nu + K_2\mu_3 = K_\mu = \text{cost.}, \tag{5}$$

mentre quello dell' energia assume l' espressione

$$(K_1\chi + K_2 i_3) \times \omega = 2(\alpha k \times \mu + E_0), \tag{6}$$

se con E_0 si indica l' energia totale.

Invece il teorema del momento delle quantità di moto — tenuto conto dell' invariabilità di χ — diviene

$$\dot{K}_1\chi + \dot{K}_2 i_3 + K_2\omega \wedge i_3 = \alpha k \wedge \mu, \tag{7}$$

ove, com'è abituale, indico con il punto la derivazione rispetto al tempo.

Da (7), supposto K_2 non identicamente nullo, segue subito

$$\omega = \frac{1}{K_2}\{\alpha[\mu_3 k - k \times i_3 \cdot \mu] - \dot{K}_1 i_3 \wedge \chi\} + r i_3, \tag{8}$$

se con r si indica la componente di ω secondo i_3.

Moltiplicando la (7) scalarmente per i_3 si deduce invece

$$\dot{K}_1\chi_3 + \dot{K}_2 = \alpha k \wedge \mu \times i_3. \tag{9}$$

I supposti movimenti esisteranno allora e soltanto allora che potranno determinarsi delle funzioni del tempo [o, in particolare, delle costanti] K_1, K_2 ecc., tali che per qualche determinazione della velocità angolare soddisfacente alla (8) la corrispondente espressione del momento delle quantità di moto sia del tipo (1) mentre χ e μ risultano costanti, i_3 solidale al corpo e la (9) verificata.

OSSERVAZIONE. — Se, in particolare, si suppone $K_1 \equiv 0$ si ricade nel caso noto delle rotazioni. Infatti l' essere invariabile nel corpo la direzione di $\boldsymbol{K}$ implica l' analoga invariabilità della direzione di ω rispetto agli assi solidali e nello spazio.

2. - Ulteriori sviluppi nel caso generale.

Supposto ormai

$$K_1 \neq 0 \quad , \quad K_2 \neq 0, \tag{10}$$

indico con σ' l'omografia inversa [6]) di σ, con δ quella definita dalla matrice

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{K}_1^2 \end{vmatrix} \tag{11}$$

e con τ e τ' le omografie [sicuramente proprie a causa delle (10)]

$$\left\{ \begin{aligned} \tau &= K_1 K_2 \sigma' + \dot{K}_1 \boldsymbol{i}_3 \wedge , \\ \tau' &= \frac{1}{\mathfrak{J}_3\tau} [K_1^2 K_2^2 \mathfrak{J}_3 \sigma' \cdot \sigma - K_1 K_2 \dot{K}_1 \sigma' \boldsymbol{i}_3 \wedge + \delta], \end{aligned} \right. \tag{12}$$

ove $\mathfrak{J}_3\sigma'$, $\mathfrak{J}_3\tau$ sono gli invarianti terzi [certamente non nulli] di σ' e τ. Anzi è facile constatare che è

$$\mathfrak{J}_3\sigma' = \frac{1}{\mathfrak{J}_3\sigma} \quad , \quad \mathfrak{J}_3\tau = K_1 K_2 \left[\frac{1}{\mathfrak{J}_3\sigma} K^2{}_1 K_2^2 + \dot{K}^2{}_1 \sigma'_{33}\right], \tag{13}$$

se con $\mathfrak{J}_3\sigma$ si denota l'invariante terzo di σ e con σ'_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$, gli elementi della matrice della σ'.

Sulle (11), (12), (13) si riconosce che è

$$\tau'\tau \equiv 1 , \tag{14}$$

$$\tau'\sigma'\boldsymbol{i}_3 \equiv \frac{1}{K_1 K_2} \boldsymbol{i}_3 . \tag{15}$$

* * *

Posto

$$\boldsymbol{q} = \alpha(\mu_3 \dot{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}_3 \mu) + K_2 r \boldsymbol{i}_3 , \tag{16}$$

da (1), (8) segue

$$(K_1 \chi + K_2 \boldsymbol{i}_3) K_2 = \sigma[\boldsymbol{q} - \dot{K}_1 \boldsymbol{i}_3 \wedge \chi] \tag{17}$$

e da questa

$$\dot{K}_1 \boldsymbol{i}_3 \wedge \chi + K_1 K_2 \sigma' \chi = \boldsymbol{q} - K^2 \sigma' \boldsymbol{i}_3 . \tag{18}$$

---

[6]) Com'è noto, l'inversa di un'omografia propria è il prodotto dell'inverso del suo invariante terzo per la coniugata della sua omografia complementare. Per le proprietà delle omografie di cui mi servo vedi ad es., BURALI-MARCOLONGO: *Omografie vettoriali.*

La (18), in base a (12, 1) può scriversi

$$\tau\chi = \boldsymbol{q} - K^2 \sigma' \boldsymbol{i}_3 . \tag{19}$$

Operando sulla (19) con l'omografia τ' tenendo presenti le (14), (15) si deduce

$$\chi = \tau' \boldsymbol{q} - \frac{K_2}{K_1} \boldsymbol{i}_3 . \tag{20}$$

Da tale espressione di χ e da (8), (16) segue

$$\omega = \frac{1}{K_2} [\boldsymbol{q} - \dot{K}_1 \boldsymbol{i}_3 \wedge \tau' \boldsymbol{q}] . \tag{21}$$

Se $\boldsymbol{k}$ non è ortogonale ad $\boldsymbol{i}_3$ la costanza del vettore μ si traduce, in base a (16), nell' equazione

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{d}{dt} (\alpha \mu_3 \boldsymbol{k} + K_2 r \boldsymbol{i}_3) , \tag{22}$$

mentre quella di χ è espressa [vedi (20)] da

$$\frac{d\tau' \boldsymbol{q}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{K_2}{K_1} \boldsymbol{i}_3 \right) . \tag{23}$$

Nelle (22), (23) è da pensarsi, come conseguenza di (5), (16),

$$\mu_3 \equiv \frac{K_\mu - K_1 \cos \nu}{K_2} \quad , \quad K_2 r \equiv q_3 . \tag{24}$$

Distinguo i due casi:

a) $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}_3 \neq 0$. La risoluzione del problema posto è ricondotta a quella della coesistenza delle (9), (22), (23), tenuto conto di (21), (24), per la determinazione del vettore $\boldsymbol{q}$ delle funzioni scalari del tempo K_1, K_2, delle componenti costanti di $\boldsymbol{k}$ rispetto agli assi solidali e di A, B, ecc.

Nell'associare la (9) alle (22), (23) può riuscire comodo trasformarla, in base a (16), (20) nella forma

$$\dot{K}_1 \left(\tau' \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{i}_3 - \frac{K_2}{K_1} \right) + \dot{K}_2 = \frac{1}{\alpha \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}_3} (k_2 q_1 - k_1 q_2) . \tag{25}$$

b) $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}_3 = 0$. In tal caso il vettore $\boldsymbol{q}$ tenuto conto di (24, 1) non dipende direttamente da μ. Di conseguenza la (22) non va tenuta presente ma la (23) va associata alla (16) che a causa di (24) si scrive

$$q = \alpha \left[\frac{K_\mu - K_1 \cos \nu}{K_2} k + \frac{q_3}{\alpha} i_3 \right]. \tag{26}$$

Il problema analitico da considerare è di conseguenza quello della coesistenza delle (9), (23), (26) per la determinazione di K_1, K_2, μ_1, μ_2, q e delle varie costanti intervenienti in modo che — tenuto conto della conseguente espressione (21) di ω — risulti inoltre verificata l'equazione

$$\dot{\mu} + \frac{1}{K_2}[q - \dot{K}_1 i_3 \wedge \tau' q] \wedge \mu = 0\,. \tag{27}$$

3. - Inesistenza di movimenti in cui il momento delle quantità di moto ha carattere processionale regolare.

Dimostrerò: *per un solido pesante asimmetrico fissato senza attrito per il punto O non sono dinamicamente possibili movimenti in cui il momento delle quantità di moto rispetto ad O risulta la somma di due termini di cui uno costante nello spazio, l'altro nel corpo.*

In altri termini farò vedere che non esistono gli accennati movimenti se nell'espressione di $\boldsymbol{K}$ si suppongono costanti K_1 e K_2.

Supporrò pertanto K_1 e K_2 costanti non nulle.

Comincio con l'osservare che in base a (5) e alla costanza di ν risulta

$$\mu_3 \equiv \text{cost.} \tag{28}$$

e si riconosce che l'eventuale moto non può differire da una precessione avente l'asse di precessione verticale e quello di figura coincidente con l'asse delle ζ.

Inoltre da (9) e dalla costanza di K_1, K_2 si deduce

$$k \wedge \mu \times i_3 = 0 \tag{29}$$

che implica

$$k = i_3\,, \tag{30}$$

se non si vuol ricadere sin d'ora nel caso delle rotazioni uniformi.

Ciò premesso dimostrerò quanto ho enunciato senza neppure bisogno di ricorrere allo studio del sistema differenziale (22), (23).

A tal fino osservo che in base alla coincidenza di $\boldsymbol{k}$ con $\boldsymbol{i}_3$ e alla costanza di K_1, K_2, posto

$$\beta = \mu_3 + \frac{rK_2}{\alpha}, \tag{31}$$

da (11), (12), (13), (20), (21) risulta

$$\boldsymbol{q} = \alpha(\beta \boldsymbol{i}_3 - \boldsymbol{\mu}) \;, \qquad \tau' = \frac{\sigma}{K_1K_2}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\alpha}{K_2}(\beta \boldsymbol{i}_3 - \boldsymbol{\mu}), \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{\alpha}{K_1K_2}(\beta\sigma \boldsymbol{i}_3 - \sigma\boldsymbol{\mu}) - \frac{K_2}{K_1}\dot{\boldsymbol{i}}_3 \,. \tag{34}$$

L'integrale dell'energia, tenuto conto di (5), (6), (30), (33), si scrive

$$(K_1\chi_3 + K_2)\beta = H\,, \tag{35}$$

se con H si indica la costante

$$H = K_\mu + \frac{2K_2}{\alpha}(\alpha\mu_3 + E_0) \tag{36}$$

e con χ_1, χ_2, χ_3 le componenti di $\boldsymbol{\chi}$ rispetto agli assi solidali.

* * *

Prima di procedere oltre conviene premettere le seguenti due osservazioni, valide nelle ipotesi poste in questo numero di K_1 e K_2 costanti non nulle e μ_3, $\mathbf{k}$ verificanti le (28), (30).

Osservazione I^a. — *Se β è costante l'eventuale moto di C^* non può differire da un moto rotatorio uniforme intorno alla verticale.*

Se $\beta = 0$ la cosa è evidente in base a (33). Se $\beta \neq 0$ si giunge alla stessa conclusione quando si tenga presente che, sempre in base a (33) l'eventuale moto di C^* non può differire da una precessione regolare con asse di precessione verticale e si pensi che per un solido effettivamente asimmetrico un tale moto di precessione, come è noto [7]), non è dinamicamente possibile.

OSSERVAZIONE II^a. — *Se $H = 0$ l'eventuale moto di C^* non può differire da un moto rotatorio.*

Se, in base a (35) si annulla β la cosa è evidente. Se invece si annulla $K_1\chi_3 + K_2$ la componente χ_3 *di* χ risulta costante. Ma in tal caso, essendo costante anche μ_3 l'eventuale moto di C^* non può differire da un moto rotatorio se χ non coincide con μ. Se invece χ coincide con μ da (34) segue

$$\text{(37)} \qquad \begin{cases} (A\alpha + K_1K_2)\mu_1 = \alpha B'(\mu_3 - \beta), \\ (B\alpha + K_1K_2)\mu_2 = \alpha A'(\mu_3 - \beta), \end{cases}$$

da cui si deduce

$$\text{(38)} \qquad 1 - \mu_3^2 = \left[\frac{B'^2}{(A\alpha + K_1K_2)^2} + \frac{A'^2}{(B\alpha + K_1K_2)^2}\right]\alpha^2(\mu_3 - \beta)^2.$$

Le (37), (38) implicano la costanza di β se il solido non è un giroscopio e si ricade nel caso dell'OSSERVAZIONE I^a.

* * *

Tenuto conto di (3) da (34) segue

$$\text{(39)} \qquad \chi_3 = \frac{\alpha}{K_1K_2}[C(\beta - \mu_3) + B'\mu_1 + A'\mu_2] - \frac{K_2}{K_1}.$$

Sulle (35), (39) si riconosce che se A', B' si annullano simultaneamente β risulta costante. Ma in tal caso, in base all'OSSERVAZIONE I^a, l'eventuale moto di C^* non può differire da un moto rotatorio.

Supposti dunque A', B' non simultaneamente nulli, pongo

$$\text{(40)} \qquad \eta = \frac{HK_2}{\alpha\beta} + C(\mu_3 - \beta).$$

---

[7]) G. GRIOLI, « Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico ». *Annali di Matematica pura ed applicata*, Serie IV, T. XXVI, 1947.

Tenendo presente la relazione

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = 1 - \mu_3^2, \tag{41}$$

da (35), (39), (40) si deduce

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{1}{A'^2 + B'^2}(B'\eta + A'\Delta), \\ \mu_2 = \dfrac{1}{A'^2 + B'^2}(A'\eta - B'\Delta), \end{cases} \tag{42}$$

con

$$\Delta = \pm\sqrt{(A'^2 + B'^2)(1 - \mu_3^2) - \eta^2}. \tag{43}$$

Da (34) segue

$$\begin{cases} \chi_1 = \dfrac{\alpha}{K_1K_2}\,[B'(\mu_3 - \beta) - A\mu_1], \\ \chi_2 = \dfrac{\alpha}{K_1K_2}\,[A'(\mu_3 - \beta) - B\mu_2]. \end{cases} \tag{44}$$

Queste, tenuto conto che il modulo di χ è unitario e di (39), (40), (42), (43), danno luogo all' equazione in β

$$\begin{aligned} &[\rho_0\beta^2 - (\gamma_0\beta^2 + \gamma_1\beta + \gamma_2)][a_1(\gamma_0\beta + \gamma_1\beta + \gamma_2) - a_2\beta^2 + a_3\beta]^2 - \\ &- [n(\gamma_0\beta^2 + \gamma_1\beta + \gamma_2\beta)^2 + (e_0\beta + e_1)(\gamma_0\beta^2 + \gamma_1\beta + \gamma_2)\beta + \\ &+ \beta^2(\eta_0\beta^2 + \eta_1\beta + \eta_2)]^2 = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

ove ρ_0, a_1, a_2, a_3, n, ecc., sono delle costanti.

Anzi, si riconosce facilmente che è

$$\begin{cases} a_1 = \mp\dfrac{2A'B'}{(A'^2 + B'^2)}(A^2 - B^2), \quad a_2 = \mp\dfrac{2A'B'}{(A'^2 + B'^2)}(A - B), \\ a_3 = -\mu_3 a_2, \qquad n = \dfrac{(B'^2 - A'^2)(A^2 - B^2) + (A'^2 + B'^2)^2}{(A'^2 + B'^2)^2}, \\ \gamma_0 = -C, \qquad \gamma_2 = \dfrac{HK_2}{\alpha}, \\ e_0 = 2\left[\dfrac{AB'^2 + BA'^2}{A'^2 + B'^2} + C\right], \qquad \eta_0 = C^2 + A'^2 + B'^2. \end{cases} \tag{46}$$

Poichè β non può essere costante senza ricadere in un moto rotatorio [OSSERVAZIONE I^a] la (45) deve ridursi ad un' identità rispetto a β.

In particolare deve risultare

$$\gamma_2^4(a_1^2 + n^2) = 0. \tag{47}$$

Non potendo la costante γ_2 essere nulla senza che il moto di C^* differisca da una eventuale rotazione [vedi (46, 6) e OSSERVAZIONE II^a] dovrà riuscire

$$a_1 = n = 0. \tag{48}$$

Le (48) equivalgono a due condizioni di cui una è necessariamente l'annullarsi di A' oppure quello di B'. Suppongo [8])

$$B' = 0. \tag{49}$$

Da (49) segue l' annullarsi di a_2 e a_3.

Conseguentemente la (45) implica, tra l' altro,

$$e_0\gamma_0 + \eta_0 = 0 \tag{50}$$

che, tenuto conto di (46, 5), (46, 7), (46, 8), (49), si esplica in

$$A'^2 - C^2 - 2BC = 0, \tag{51}$$

assurda a causa della nota disuguaglianza

$$BC - A'^2 > 0. \tag{52}$$

Rimane pertanto dimostrato quanto è asserito all' inizio di questo numero.

4. - Una classe di movimenti di precessione del solito pesante asimmetrico nei quali il momento delle quantità di moto ha direzione variabile.

Sino ad ora ho escluso l' annullarsi di K_2. Abbandonando tale ipotesi in questo numero determinerò la classe di tutti i movimenti dinamicamente possibili per C^* nei quali il momento delle quantità di moto ha direzione invariabile.

---

[8]) Evidentemente conseguenze analoghe seguirebbero l' annullarsi di A'.

Essi sono costituiti da note rotazioni uniformi e non uniformi e [come risulterà meglio evidente nel numero seguente] da effettive precessioni non regolari.

Suppongo dunque valida la (1) con $\boldsymbol{K}_2 \equiv 0$ indicando per semplicità con $\boldsymbol{K}$ ciò che ivi è indicato con $\boldsymbol{K}_1$. Ritengo, cioè, $\boldsymbol{K}$ espresso da

$$\boldsymbol{K} = K\chi\,, \tag{53}$$

con

$$\dot{K} \not\equiv 0 \tag{54}$$

e penso l'asse solidale ζ baricentrale in modo che risulti

$$\boldsymbol{i}_3 = \operatorname{vers} OG\,. \tag{55}$$

Per il resto ritengo scelta la terna solidale in modo che valgano le (2), (3), denotando con $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ i versori degli assi ξ, η.

Il teorema del momento delle quantità di moto si esprime, ora, nella forma

$$\dot{K}\chi = \alpha \boldsymbol{i}_3 \wedge \mu \tag{56}$$

e la invariabilità di χ implica quella della direzione di $\boldsymbol{i}_3 \wedge \mu$.

Ciò significa che il moto è una precessione avente l'asse di precessione orizzontale e parallelo a χ e l'asse di figura baricentrale. Il momento delle quantità di moto risulta ortogonale ad OG e trattasi pertanto di moti soddisfacenti alla condizione di Hess.

Ne segue che tali precessioni, se non degeneri in moti rotatori, possono aver luogo allora e solo allora che G appartiene al piano π del massimo e minimo asse principale d'inerzia relativi ad O e se tra i momenti principali d'inerzia rispetto ad O, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e le coordinate $\bar{\eta}_G$, $\bar{\zeta}_G$ di G rispetto agli assi principali relativi ad O [supposto il piano $O\eta\zeta$ coincidente con π] intercorre la relazione [9]).

$$(\bar{A} - \bar{C})\bar{B}\bar{\eta}_G^2 + (\bar{A} - \bar{B})\bar{C}\bar{z}_G^2 = 0\,. \tag{57}$$

---

[9]) Loco cit. in nota [4]). La (57) si ottiene dalla (118) di p. 202 del testo citato scambiando $\bar{\xi}$ con $\bar{\eta}$. Essa non è però condizione necessaria perchè si realizzi un moto di Mlodzjejowsky, nonostante questo soddisfi alla proprietà dei moti di Hess. In riguardo vedi nota [10]).

Supporrò quindi soddisfatta la (57),

(58) $$B' = 0$$

e gli assi $O\xi$, $O\bar{\xi}$ coincidenti.

Conviene però esprimere in forma più opportuna la condizione strutturale (57). A tal fine osservo che detto ε l' angolo di $O\zeta$ e $O\bar{\zeta}$ essa si può scrivere

(59) $$(\bar{A} - \bar{C})\bar{B} \operatorname{sen}^2 \varepsilon + (\bar{A} - \bar{B})\bar{C} \cos^2 \varepsilon = 0$$

o, anche,

(60) $$\bar{A}(\bar{B} \operatorname{sen}^2 \varepsilon + \bar{C} \cos^2 \varepsilon) - \bar{B}\bar{C} = 0 .$$

La (59) può porsi nella forma

(61) $$[\bar{A} - (\bar{B} \cos^2 \varepsilon + \bar{C} \operatorname{sen}^2 \varepsilon)](\bar{B} \operatorname{sen}^2 \varepsilon + \bar{C} \cos^2 \varepsilon) + \\ + (\bar{B} - \bar{C}) \operatorname{sen}^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon = 0$$

e poichè si ha, com'è facile riconoscere,

(62) $$\begin{cases} B = \bar{B} \cos^2 \varepsilon + \bar{C} \operatorname{sen}^2 \varepsilon , \\ C = \bar{B} \operatorname{sen}^2 \varepsilon + \bar{C} \cos^2 \varepsilon , \\ A' = (\bar{C} - \bar{B}) \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon , \\ A = \bar{A} , \end{cases}$$

la (61) diviene

(63) $$(A - B)C + A'^2 = 0 .$$

Si vede dunque che la condizione strutturale di Hess equivale, tenuto conto di (58), alla (63).

* * *

Per ogni moto soddisfacente alla condizione (53) dovranno esistere due scalari a, b per i quali si abbia

(64) $$\omega = a\boldsymbol{i}_3 \wedge \mu + b\boldsymbol{i}_3 .$$

Ne segue, tenuto conto di (53), (54), (56),

(65) $$\frac{K}{\dot{K}} a\boldsymbol{i}_3 \wedge \mu = \sigma(a\boldsymbol{i}_3 \wedge \mu + b\boldsymbol{i}_3) .$$

Da (65), moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{i}_3$ e per μ e tenendo presente la regola di commutazione del prodotto scalare [si tenga presente che σ è una dilatazione] si deduce, rispettivamente,

$$(66)\qquad \begin{cases} a\boldsymbol{i}_3 \wedge \mu \times \sigma\boldsymbol{i}_3 + b\boldsymbol{i}_3 \wedge \sigma\boldsymbol{i}_3 = 0\,, \\ a\boldsymbol{i}_3 \wedge \mu \times \sigma\mu + b\boldsymbol{i}_3 \wedge \sigma\mu = 0\,. \end{cases}$$

Le (66) richiedono l' annullarsi del determinante

$$(67)\qquad \Delta^* = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{i}_3 \wedge \mu \times \sigma\boldsymbol{i}_3 & \boldsymbol{i}_3 \times \sigma\boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{i}_3 \wedge \mu \times \sigma\mu & \boldsymbol{i}_3 \times \sigma\mu \end{Vmatrix}$$

che, tenuto conto di (3), (58) esplicitamente si scrive

$$(68)\qquad \Delta^* = [(A - B)C + A'^2]\mu_1\mu_2\,.$$

Per effetto della (63) risulta dunque soddisfatta la condizione

$$(69)\qquad \Delta^* = 0\,.$$

Da (65), moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{i}_1$ si deduce, in base a (3), (58),

$$(70)\qquad \frac{K}{\dot{K}}\,\alpha\mu_2 = aA\mu_2\,.$$

Potendo escludersi l' annullarsi [10]) di μ_2 da (70) segue

$$(71)\qquad a = \frac{\alpha K}{A\dot{K}}\,.$$

La (66, 1) dà, tenuto conto di (3), (58), (71),

$$(72)\qquad b = \frac{\alpha A' K}{AC\dot{K}}\,\mu_1\,.$$

---

[10]) L' annullarsi di μ_2 porterebbe a note rotazioni non uniformi attorno all' asse delle η disposto orizzontalmente e implicherebbe soltanto l' appartenenza di O ad uno dei piani centrali e la coincidenza di η con l' asse principale per O ortogonale al piano centrale contenente O [si tenga presente che se un piano è centrale esso è principale d' inerzia rispetto ad ogni suo punto]. In tal caso la condizione strutturale (63) riuscirebbe superflua [vedi (68)]. Si riconosce cioè che i moti di Mlodzjejowsky pur soddisfacendo alla condizione di Hess non richiedono il verificarsi della (63) o dell' equivalente (57).

E' facile riconoscere che le (71), (72) equivalgono completamente — tenuta presente la (69) — alla relazione vettoriale (65).

La invariabilità del vettore χ implica, in base a (56),

$$\ddot{K}\chi = \alpha \frac{d}{dt}(\boldsymbol{i}_3 \wedge \mu) \tag{73}$$

che a causa della stessa (56) e di (64) diviene

$$\frac{\ddot{K}}{\dot{K}} \boldsymbol{i}_3 \wedge \mu = a\mu_3\mu \wedge \boldsymbol{i}_3 . \tag{74}$$

Posto

$$\lambda = \frac{\alpha}{A}, \tag{75}$$

da (74), tenuto conto di (71), si deduce

$$\mu_3 = -\frac{\ddot{K}}{\lambda \dot{K}}. \tag{76}$$

L' equazione cinematica esprimente l' invariabilità di μ, in base a (64), si scrive

$$\dot{\mu} + a(\mu_3\mu - \boldsymbol{i}_3) + b\boldsymbol{i}_3 \wedge \mu = 0 \tag{77}$$

e proiettata sugli assi solidali dà, tenute presenti le (71), (72),

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{\mu}_1 + \frac{\lambda K}{\dot{K}} \mu_1\mu_3 - \frac{A'\lambda K}{C\dot{K}} \mu_1\mu_2 = 0 , \\ &\dot{\mu}_2 + \frac{\lambda K}{\dot{K}} \mu_2\mu_3 + \frac{A'\lambda K}{C\dot{K}} \mu_1^2 = 0 , \\ &\dot{\mu}_3 + \frac{\lambda K}{\dot{K}} (\mu_3^2 - 1) = 0 . \end{aligned} \right. \tag{78}$$

Le (78, 1), (78, 2), in base a (76), divengono

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{\mu}_1 - \frac{\ddot{K}}{\dot{K}} \mu_1 - \frac{A'\lambda K}{C\dot{K}} \mu_1\mu_2 = 0 , \\ &\dot{\mu}_2 - \frac{\ddot{K}}{\dot{K}} \mu_2 + \frac{A'\lambda K}{C\dot{K}} \mu_1^2 = 0 , \end{aligned} \right. \tag{79}$$

mentre la (78, 3) dà luogo all' equazione nella sola K,

$$\dot{K}\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{K}}{K}\right)+K\left(\lambda^2-\frac{\ddot{K}^2}{K^2}\right)=0\,. \tag{80}$$

L' espressione (64) di ω diviene, in base a (71), (72),

$$\omega=\frac{\lambda K}{\dot{K}}\left[-\mu_2 i_1+\mu_1 i_2+\frac{A'}{C}\mu_1 i_3\right] \tag{81}$$

ed è facile verificare che ad ogni quaterna di funzioni μ_1, μ_2, μ_3, K soddisfacenti alle equazioni (76), (79), (80) e alle condizioni

$$\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1\,, \qquad \mu_3^2\neq 1 \tag{82}$$

corrisponde un effettivo movimento di C^* verificante le condizioni [11]) (53), (54).

5. - Riduzione alle quadrature delle equazioni da cui dipendono le segnalate precessioni. Loro separazione dai moti di Mlodzjejowsky.

Le equazioni (76), (79), (80) caratterizzano una classe di movimenti del solido pesante asimmetrico che consistono non solo in effettive precessioni ma, com' era da prevedersi, anche in moti di Mlodzjejowsky. Mostrerò come sia possibile separare nettamente le prime dagli altri e ridurre alle quadrature il problema dell' integrazione del sistema (79), (80).

Comincio con l' osservare che la (82, 2) implica, a causa di (76),

$$\frac{\ddot{K}}{K}\neq\pm\lambda\,. \tag{83}$$

Ne segue che degli integrali di (80) occorre considerare solo quelli che verificano la condizione [12]) (83).

---

[11]) In particolare si riconosce che il vettore $\frac{1}{\dot{K}}(-\mu_2 i_1+\mu_1 i_2)$ è costante.

[12]) E' evidente che esistono soluzioni comuni alla (80) e all' equazione

$$\frac{\ddot{K}}{K}=\pm\lambda\,.$$

Supposta dunque verificata la (83) è lecito [vedi anche (54)] porre la (80) nella forma

$$\frac{\frac{\ddot K}{\dot K}\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot K}{K}\right)}{\frac{\ddot K^2}{K^2}-\lambda^2}-\frac{\ddot K}{\dot K}=0 \tag{84}$$

che equivale pienamente a

$$\frac{d}{dt}\left\{\log\left[\frac{\ddot K^2}{K^2}-\lambda^2\right]-\log \dot K^2\right\}=0\,. \tag{85}$$

Da (85) segue

$$\frac{\ddot K^2}{K^2}-\lambda^2-c_1\dot K^2=0\,, \tag{86}$$

con c_1 costante arbitraria diversa da zero.

Moltiplicando la (86) per K e sommando con la (80) si deduce

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot K}{K}\right)-c_1K\dot K=0. \tag{87}$$

da cui segue

$$\frac{\ddot K}{K}=\frac{c_1}{2}(K^2+c_2)\,, \tag{88}$$

con c_2 seconda costante arbitraria.

Confrontando le (86), (88) si ottiene

$$\dot K^2=\frac{c_1}{4}\left[(K^2+c_2)^2-\frac{4\lambda^2}{c_1^2}\right] \tag{89}$$

i cui integrali si ottengono per quadratura e per $c_1 \neq 0$ danno tutti e soli gli integrali dell'equazione (80) soddisfacenti alla condizione (83).

* * *

Moltiplicando la (79, 1) per μ_1, la (79, 2) per μ_2 e sommando si deduce

$$\mu_1\dot\mu_1+\mu_2\dot\mu_2-\frac{\ddot K}{\dot K}(\mu_1^2+\mu_2^2)=0 \tag{90}$$

che dà luogo all' integrale primo

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = c_3^2 \dot{K}^2 \tag{91}$$

con c_3 costante.

Da (91), tenuto conto di (76), ((82, 1) si ottiene

$$1 = c_3^2 \dot{K}^2 + \frac{\ddot{K}^2}{\lambda^2 K^2} \tag{92}$$

che in base a (86) implica

$$c_3^2 = -\frac{c_1}{\lambda^2}. \tag{93}$$

Dunque la costante c_1 deve soddisfare alla disuguaglianza

$$c_1 < 0 \tag{94}$$

e non appena sia noto μ_2 [o μ_1] si determina μ_1 [o μ_2] in base alla relazione [vedi (91), (93)]

$$\left(\frac{\mu_1}{\dot{K}}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{\dot{K}}\right)^2 = -\frac{c_1}{\lambda}. \tag{95}$$

Mostrerò subito che la determinazione di μ_2 si effettua per quadrature dalla (79, 2).

A tal fine osservo che la (79, 2), tenuto conto di (76), (82, 1) si muta nell' equazione di Riccati

$$\dot{\mu}_2 - \frac{A'\lambda K}{C\dot{K}} \mu_2^2 - \frac{\ddot{K}}{\dot{K}} \mu_2 + \frac{A'(\lambda^2 K^2 - \ddot{K}^2)}{\lambda C K \dot{K}} = 0 \tag{96}$$

e può porsi nella forma

$$\frac{\dot{\mu}_2 \dot{K} - \mu_2 \ddot{K}}{\dot{K}^2} - \frac{A'\lambda K}{C\dot{K}^2} \mu_2^2 - \frac{A'(\ddot{K}^2 - \lambda^2 K)}{\lambda C K \dot{K}^2} = 0 \tag{97}$$

Questa, tenuto conto di (86), diviene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_2}{\dot{K}}\right) - \frac{A'\lambda}{C} K \left[\left(\frac{\mu_2}{\dot{K}}\right)^2 + \frac{c_1}{\lambda}\right] = 0. \tag{98}$$

L' equazione (98) ammette gli integrali

$$\frac{\mu_2}{\dot{K}} \equiv \pm \frac{\sqrt{-c_1}}{\lambda} \tag{99}$$

in corrispondenza ad ognuno dei quali da (95) si deduce

$$\mu_1 \equiv 0 . \tag{100}$$

Agli integrali (99) *corrispondono pertanto tutte e solo le rotazioni non uniformi di Mlodzjejowsky* [13]) *attorno all'asse principale di medio momento d'inerzia rispetto ad O* [asse delle ξ].

In contrapporto, sempre in base a (95), è evidente che *ad ogni integrale di* (98) *diverso da quelli espressi da* (99) *corrisponde per* C^* *una precessione non degenere in un moto rotatorio.*

Per tali precessioni si ha dunque

$$\frac{\mu_2}{\dot{K}} \equiv \frac{\sqrt{-c_1}\left[1 + c_4 e^{\frac{2A'\sqrt{-c_1}}{C}\int K dt}\right]}{\lambda\left[1 - c_4 e^{\frac{2A'\sqrt{-c_1}}{C}\int K dt}\right]}, \tag{101}$$

con c_4 costante arbitraria non nulla.

6. - Due osservazioni sui moti di precessione del numero precedente.

OSSERVAZIONE I^a. — Se si assume come asse delle z di una terna fissa l'asse di precessione [parallela per O a χ] e si denotano, com'è abituale, con φ, ψ, $\theta = \frac{\pi}{2}$ gli angoli di Eulero degli assi solidali rispetto a quelli fissi si ha subito, in base a (81)

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen}\varphi\dot{\psi} = -\lambda K \frac{\mu_2}{\dot{K}}, \\ &\cos\varphi\dot{\psi} = \lambda K \frac{\mu_1}{\dot{K}}, \\ &\dot{\varphi} = \frac{A'\lambda K}{C}\frac{\mu_1}{\dot{K}}. \end{aligned}\right. \tag{102}$$

---

[13]) Valgono in tal caso considerazioni analoghe a quelle svolte in nota [10]) per l'annullarsi di μ_2 per ciò che concerne la necessità della (63) [o della (57)].

Da (102) tenuto conto di (95) segue

$$\dot{\psi}^2 = -c_1 K^2 . \tag{103}$$

Alla stessa espressione di $\dot{\psi}^2$ si giunge nel caso dei moti di Mlodzjejowsky caratterizzati dalle (99), (100). Si conclude: *ognuna delle precessioni non regolari del solido pesante asimmetrico in cui il momento delle quantità di moto ha direzione invariabile si ottiene componendo uno dei moti di Mlodzjejowsky con un moto di rotazione propria del solido attorno all' asse baricentrale, definito dalla* (102, 3).

Osservazione II^a. — La realtà degli integrali dell' equazione (89) — tenuto conto di (94) — implica che tra le costanti c_1, c_2 intercorra la relazione

$$c_2 + \frac{2\lambda}{c_1} < 0 . \tag{104}$$

Se in particolare risulta

$$c_2 = \frac{2\lambda}{c_1} \tag{105}$$

[che a causa di (94) soddisfa alla (104)] l' integrazione della (89) si effettua senza bisogno di ricorrere alle funzioni ellittiche. Anzi questo è l' unico caso in cui ciò accade e si ha, com' è facile verificare,

$$K = \frac{4\sqrt{\lambda c_5} \cdot e^{\pm\sqrt{\lambda}t}}{\sqrt{-c_1}(1 + c_5 e^{\pm 2\sqrt{\lambda}t})} , \tag{106}$$

con c_5 costante arbitraria positiva.

E' facile constatare, in base a (3), (6), (76), (81), (88), (105), che l' integrale dell' energia si riduce a

$$c_1 c_2 = \frac{2E_0}{A} . \tag{107}$$

In conseguenza le (94), (104) danno

$$E_0 + \alpha > 0 \tag{108}$$

la quale rappresenta una necessaria limitazione dell' energia totale perchè le precessioni considerate possano aver luogo mentre la (105) si riduce a

$$E_0 = \alpha \,. \tag{109}$$

Ne segue che *i moti caratterizzati da* (106) *possono aver luogo allora e soltanto allora che l'energia totale, positiva, risulti uguale al prodotto del peso del corpo per la distanza del suo baricentro dal punto fisso.*