

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GUIDO ASCOLI

Sopra un'estensione di una formula asintotica di Laplace agli integrali multipli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 209-227

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__209_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UN' ESTENSIONE DI UNA FORMULA ASINTOTICA DI LAPLACE AGLI INTEGRALI MULTIPLI

Memoria () di GUIDO ASCOLI (a Torino).*

INTRODUZIONE

Risale a LAPLACE [1] la formula asintotica:

$$(1) \quad J(\nu) = \int_a^b f(x)[\varphi(x)]^\nu dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{c_2 \nu}} f(\xi)[\varphi(\xi)]^{\nu+1/2}$$

per $\nu \rightarrow +\infty$, nella quale $\varphi(x)$ è supposta ≥ 0 , ξ , interno ad $a - b$, l'unico suo punto di massimo assoluto, $f(\xi) \neq 0$, $c_2 = -\varphi''(\xi)/2 > 0$.

Un primo tentativo di dimostrazione rigorosa della (1) si deve a DARBOUX [1]; a STEILTJES [1] un enunciato con ipotesi notevolmente più larghe, perfezionato e dimostrato da LEBESGUE [1].

Un ulteriore estensione è dovuta a B. LEVI [1]. Supponendo che:

α) nell'intervallo $a - b$, finito o infinito, sia $\varphi(x) \geq 0$, e, essendo $a < \xi < b$, fuori di un qualunque intorno di ξ l'estremo superiore dei valori di $\varphi(x)$ sia $< \varphi(\xi)$;

β) si abbia, per un certo $k > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{|x - \xi|^k} = -c_k < 0;$$

γ) $\varphi(x)$ sia sommabile in $a - b$;

*) Pervenuta in Redazione il 18 maggio 1952.

3) $f(x)$ sia sommabile in $a - b$ e continua in ξ , con $f(\xi) \neq 0$,

il LEVI ottiene:

$$(2) \quad J(\nu) \sim \frac{2\Gamma(1 + 1/k)}{(c_k \nu)^{1/k}} f(\xi)[\varphi \xi]^{1+1/k}$$

La stessa formola, con il secondo membro dimezzato, sussiste quando ξ coincide con uno degli estremi dell'intervallo.

Formule analoghe alle (1) e (2), per il caso che nell'integrando si introduca il fattore $x - \xi$, sono state date da WIDDER [1], che ha sostituito inoltre alla continuità di $f(x)$ in ξ una condizione meno restrittiva; e da HSU [2] il cui risultato comprende quelli di WIDDER e di LEVI. Di altre estensioni si sono occupati POLYA e SZEGÖ [1], ROMANOWSKI [1] e FULKS [1], tutte relative al caso di integrali semplici.

Scarse sembrano invece le ricerche nel caso di integrali multipli. Una analoga della (1) per una certa classe di integrali curvilinei multipli di funzioni analitiche, sotto condizioni assai particolari, è stata data da molti anni da FOWLER [1], quale estensione a più variabili complesse del « metodo del punto di sella », e applicata a fondamentali questioni di Termodinamica statistica. Nel campo reale, una formola molto simile è stata dimostrata nel 1948 dal sig. HSU [1], il quale, sotto convenienti ipotesi di derivabilità per la φ , e ponendo per il campo d'integrazione condizioni che appaiono invero inutilmente restrittive, trova:

$$(3) \quad J(\nu) = \int_D f(x)[\varphi(x)]^\nu d\tau(x) \sim \frac{f(\xi)[\varphi(\xi)]^{\nu+n/2}}{|H(\xi)|^{1/2}} \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{n/2}$$

ove x sta per x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , $d\tau(x)$ è l'elemento di volume del dominio D , ξ l'unico punto di massimo assoluto di $\varphi(x)$ in D , interno a questo, $H(\xi)$ il discriminante della forma $-\Sigma \varphi''_{ik}(\xi)\lambda_i \lambda_k$, che si suppone diverso da zero.

Ma il sig. HSU si occupa anche — ed è questa la parte più interessante del suo lavoro, — del caso in cui il punto di massimo ξ sta sul contorno di D , tale contorno essendo costituito, nell'intorno di ξ , da un pezzo di ipersuperficie regolare; nel qual caso il secondo membro della (3) rimane dimezzato. Il me-

todo usato è abbastanza complesso: eseguita su di un conveniente intorno di ξ in D una trasformazione puntuale che muta il contorno, in prossimità di ξ , in una regione di un S_{n-1} , l'intorno trasformato viene riflesso rispetto a questo S_{n-1} , e prolungate per riflessioni le funzioni trasformate. Nel campo così ampliato il punto di massimo risulta allora interno, e si rende applicabile la (3). Il risultato, come si vedrà, è esatto; però la dimostrazione si presta a serie obiezioni, perchè sull' S_{n-1} riflettente non si può assicurare l'esistenza delle derivate richieste per l'applicazione della (3). E appaiono anche necessarie, per giustificare il procedimento, ulteriori condizioni di regolarità per l'ipersuperficie di contorno.

Mi sono domandato se, senza allontanarsi dallo schema dimostrativo, ormai classico, che conduce alla (1) e alla (2) (e, con qualche adattamento, alla (3)), non fosse possibile ottenere questo risultato, ed altri molto più generali, facendo entrare in giuoco, accanto al comportamento asintotico delle funzioni nell'intorno di ξ , la struttura infinitesimale del campo di integrazione nello stesso intorno, la quale appare subito elemento determinante per la forma della valutazione asintotica di $J(v)$.

La cosa, come vorrei mostrare nella presente Memoria, è possibile; e il grado di generalità raggiungibile risulta anche maggiore di quanto potrebbe prevedersi, sia nei riguardi di detta struttura infinitesimale, sia perchè vi trovano posto, in buona parte, estensioni analoghe a quelle citate di LEVI e di HSU per le funzioni di una variabile. Questo secondo punto non complica sensibilmente il problema, mentre più delicato si mostra il primo, cioè le condizioni geometriche da imporre all'insieme I di integrazione nell'intorno di ξ . Lo sviluppo della dimostrazione porta infatti in prima linea un concetto molto vicino a quello di « figura tangente ad I in ξ », dovuto a PEACOCK¹⁾ (insieme limite degli omotetici di I rispetto a ξ , nel rap-

¹⁾ G. PEANO, *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*, (Torino, 1887), p. 302. Secondo Peano, un punto x_0 appartiene all'insieme limite di un insieme variabile $I(t)$ per $t \rightarrow a$ quando la distanza di x_0 da $I(t)$ tende a zero per $t \rightarrow a$. Questa definizione non differisce da quella dell'« insieme limite J » adottata da G. Bouligand nella sua *Géométrie infinitésimale directe* (Paris, 1932), p. 155. L'insieme così

porto t , per $t \rightarrow +\infty$), e, accanto a questo, il concetto di « contingente di I in O » (luogo delle semirette « tangenti » ad I in O), studiato, come è noto, quasi contemporaneamente da SEVERI e da BOULIGAND²⁾, e portato dal secondo e dai suoi allievi ad applicazioni ampie e profonde. Si è reso così necessario definire un tipo di struttura per il quale le due figure risultassero « quasi » identiche; e ciò mi ha condotto alla nozione di « contingente pieno », che mi pare risolva in modo assai soddisfacente la questione: essa risulta infatti molto generale e non difficile a verificare caso per caso. Tale concetto è stabilito e sfruttato nelle sue conseguenze analitiche nel n. 1 della Memoria; esempi semplici e complementi ne sono dati al n. 2; mentre nei nn. 3 e 4 vengono dedotte la formula generalizzata di Laplace ed alcuni suoi casi particolari notevoli (*).

1. Contingente - Contingente pieno - Lemmi analitici.

a) Nel seguito ci riferiremo costantemente ad uno spazio S_n , euclideo, definito dalle coordinate x_1, x_2, \dots, x_n , che indicheremo spesso collettivamente con x ; indicheremo con O il punto origine, e porremo:

$$|x| = (\sum x_i^2)^{1/2}.$$

Denoteremo poi con Σ_ρ il dominio sferico $0 \leq x \leq \rho$, con σ_ρ la sua superficie $|x| = \rho$, con $O \dashv x$ il segmento da O ad x , O escluso, cioè l'insieme tx , con $0 < t \leq 1$.

definito contiene, come è evidente, il « minimo limite » e, se esiste, il « limite » di $I(t)$ per $t \rightarrow a$, nel senso oggi più usato, (cfr., per esempio, CARATHÉODORY, *Reelle Funktionen*, p. 113; PICONE, *Teoria moderna dell'integrazione*, p. 69) indipendente da ogni concetto topologico o metrico; e anche la sua chiusura; ma può contenere altri punti.

²⁾ F. SEVERI, *Su alcune questioni di Topologia infinitesimale* (Ann. Soc. Polon. de Mathem., IX, 1930, 97-108); vi si troveranno indicazioni bibliografiche sui precedenti accenni dell'Autore ai medesimi concetti, che risalgono al 1927, e ai lavori, di poco posteriori, di G. BOULIGAND. Di questo v. la citata *Géométrie infinitésimale directe*, cap. X.

*) Una prima redazione, assai meno generale e completa, delle presenti ricerche ha formato oggetto di una comunicazione al IV congresso dell'Unione matem. italiana. (Taormina, ott. 1951).

b) Dato un insieme I , avente O come punto di accumulazione, si dice *contingente* di I in O l'insieme dei raggi r per O tali che in ogni cono rotondo finito avente per vertice O , per asse r , e altezza arbitraria $\varepsilon > 0$ esistano punti di I , diversi da O ³⁾.

Esiste sempre il contingente di I in O . Si consideri infatti l'intersezione $I\Sigma_\rho$, e si proiettino i suoi punti (O eventualmente escluso) da O , ottenendo un « cono » Γ_ρ . Sia $\bar{\Gamma}_\rho$ la chiusura di Γ_ρ ; se $\rho > \rho'$, $\bar{\Gamma}_\rho$ contiene $\bar{\Gamma}_{\rho'}$. Essendo i $\bar{\Gamma}_\rho$ insiemi chiusi, vi è almeno un raggio r comune a tutti i $\bar{\Gamma}_\rho$; esso appartiene, come subito si vede, al contingente cercato.

Viceversa, se r appartiene al contingente Ω , esso appartiene ai $\bar{\Gamma}_\rho$; Ω è dunque la parte comune a tutti i $\bar{\Gamma}_\rho$, ed è perciò un insieme chiuso. E' chiaro che se un raggio r' per O non appartiene ad Ω , vi è su r' un segmento $O - x_0$ tale che nessun punto di esso appartiene ad I .

Dalla definizione di contingente, o da questa costruzione, segue subito che il contingente di I in O coincide con quello della sua chiusura \bar{I} , ed anche con il contingente dell'insieme AI , intersezione di I con un intorno A , aperto o chiuso, di O .

c) LEMMA I. — *Se su σ_1 è definita una funzione continua $f(x)$, che è positiva in $\Omega\sigma_1$, per ρ abbastanza piccolo essa è positiva in $\bar{\Gamma}_\rho\sigma_1$ (e quindi anche in $\Gamma_\rho\sigma_1$).*

Infatti, se per ogni $\rho > 0$ esistessero punti di $\bar{\Gamma}_\rho\sigma_1$ in cui è $f(x) \leq 0$, essi formerebbero un insieme chiuso i_ρ tale che, per $\rho > \rho'$, i_ρ contiene $i_{\rho'}$; esisterebbe allora un punto y comune a tutti gli i_ρ , e quindi appartenente ad $\Omega\sigma_1$, nel quale sarebbe $f(x) \leq 0$, contro il supposto.

d) Diremo che un insieme di raggi per O è di misura nulla, quando è di misura nulla l'insieme dei punti di questi raggi. Per questo è necessario è sufficiente che sia di misura nulla la sua intersezione con Σ_1 ; è infatti allora di misura nulla l'intersezione con un Σ_ρ ; e questi invadono lo spazio.

³⁾ Il contingente è, secondo questa definizione, un insieme di r. gg.; nel seguito, non essendovi luogo ad equivoci, tale termine sarà usato anche per il corrispondente insieme di punti.

e) Diremo che I ha contingente pieno in O , quando su quasi ogni raggio del contingente esiste un segmento $O \text{---} x$, formato di punti di I .

Supposta verificata tale condizione, si consideri l'insieme tI , omotetico di I con rapporto $t > 0$. Se sul raggio r di Ω vi è un segmento $O \text{---} x_0$ formato di punti di I , l'insieme tI contiene il segmento $O \text{---} tx_0$, e quindi al divergere di t ogni punto di r appartiene definitivamente ai tI . Ciò avviene dunque per quasi tutti i raggi di Ω .

Se invece r' non appartiene ad Ω , su di esso vi è certamente un segmento $O \text{---} x_0$ non contenente punti di I , e quindi, in modo analogo, ogni punto di r' è, al divergere di t , definitivamente fuori di tutti i tI .

Introducendo per ogni insieme A la funzione caratteristica $\omega_A(x)$, ciò può esprimersi dicendo che

$$\begin{aligned} \text{se } \omega_{\Omega}(x) = 0 & \text{ si ha } \lim \omega_{tI}(x) = 0 \\ \text{se } \omega_{\Omega}(x) = 1 & \text{ si ha } \lim \omega_{tI}(x) = 1 \text{ quasi ovunque.} \end{aligned}$$

In ogni caso

$$\lim \omega_{tI}(x) = \omega_{\Omega}(x) \text{ quasi ovunque.}$$

f) LEMMA II. — Sia I un insieme misurabile avente in O contingente pieno; Γ il cono che proietta I da O , $\bar{\Gamma}$ la sua chiusura. Se $F(x)$ è sommabile in $\bar{\Gamma}$, si ha:

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{tI} F(x) d\tau(x) = \int_{\Omega} F(x) d\tau(x)$$

Infatti, poichè tI e Ω sono contenuti in $\bar{\Gamma}$, la (4) si può scrivere:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{tI} F(x) \omega_{tI}(x) d\tau(x) = \int_{\bar{\Gamma}} F(x) \omega_{\Omega}(x) d\tau(x),$$

e questa è immediata perchè $F(x) \omega_{tI}(x)$ tende a $F(x) \omega_{\Omega}(x)$ quasi ovunque, ed è maggiorata dalla funzione sommabile $|F(x)|$.

La (4) potrà anche applicarsi ad un $I\Sigma_{\rho}$, notando che Ω è anche per $I\Sigma_{\rho}$ contingente pieno. Si ha così il corollario: se

$F(x)$ è sommabile in $\bar{\Gamma}_\rho$ si ha:

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}(\Omega_\rho)} F(x) d\tau(x) = \int_0 F(x) d\tau(x).$$

2. Complementi ed esempi.

Nei casi usuali il contingente di un insieme I in un suo punto di accumulazione O si individua senza difficoltà, e per l'applicazione che noi abbiamo in vista rimane solo da riconoscere che esso è pieno. A ciò possono essere utili le seguenti osservazioni.

a) *Se due insiemi I_1, I_2 hanno in O contingente pieno, anche la loro riunione I ha in O contingente pieno, che è la riunione dei contingenti di I_1 e di I_2 .*

Dalla definizione stessa del contingente risulta intanto subito che il contingente di I contiene tutti e soli i raggi del contingente di I_1 e di quello di I_2 . Inoltre, esclusi due certi insiemi di raggi di misura nulla, su ogni raggio del contingente di I esiste un segmento $O \text{---} x_0$ che appartiene ad I_1 o ad I_2 e quindi ad I . Ne segue la tesi.

OSS.: Ci sarà comoda nel seguito la locuzione: gli insiemi I_1 e I_2 sono *quasi identici*. Ciò vorrà significare che le loro funzioni caratteristiche sono equivalenti; o, se si vuole, che $I_1 - I_1I_2$ e $I_2 - I_1I_2$ hanno misura nulla.

b) *Nella stessa ipotesi, se l'intersezione I_1I_2 non è vuota, ed ha O come punto di accumulazione, essa ha in O contingente pieno, che è quasi identico all'intersezione dei contingenti di I_1 e di I_2 .*

Siano $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$ i contingenti di I_1, I_2, I_1I_2 . Dalla definizione risulta subito che un raggio di Ω appartiene anche ad Ω_1 e ad Ω_2 , e quindi ad $\Omega_1\Omega_2$. Viceversa, eccettuati al più i raggi di un insieme di misura nulla, sopra un raggio r di $\Omega_1\Omega_2$ esiste un segmento $O \text{---} x_1$ appartenente ad I_1 e un segmento $O \text{---} x_2$ appartenente ad I_2 , quindi un segmento $O \text{---} x_0$ appartenente ad I_1I_2 ; sicchè r appartiene ad Ω . Ne risulta che Ω

è contingente pieno, e che esso si ottiene da $\Omega_1\Omega_2$, togliendone, al più, un insieme di misura nulla ⁴⁾.

c) Se in un intorno Σ_ρ di O un insieme I è definito da

$$H_s(x) + \eta(x)|x|^s > 0 \quad \text{oppure} \quad \geq 0,$$

dove $H_s(x)$ è continua e positivamente omogenea di grado $s > 0$, e $\eta(x)$ tende a zero con $|x|$, e se i punti in cui $H_s(x) = 0$ formano un insieme di misura nulla, I possiede in O contingente pieno costituito dal cono $H_s(x) > 0$ e da un insieme di misura nulla, e quindi quasi identico a ciascuno dei coni $H_s(x) > 0$, $H_s(x) \geq 0$.

Sia infatti $|u_1| = 1$ e $H_s(u_1) > 0$; allora, per $0 < \lambda < \rho$, $x = \lambda u_1$ appartiene ad I se

$$H_s(\lambda u_1) + \eta(\lambda u_1)|x|^s > 0 \quad \text{oppure} \quad \geq 0$$

cioè

$$H_s(u_1) + \eta(\lambda u_1) > 0 \quad \text{oppure} \quad \geq 0,$$

e ciò sussiste certo per λ abbastanza piccolo. Onde Ou_1 è un raggio del contingente Ω , e su di esso vi è un segmento $O - x_0$ appartenente ad I .

Sia invece $H_s(u_1) < 0$; allora in un conveniente intorno di u_1 su σ_1 sarà:

$$H_s(u) < -k < 0.$$

Si può, d' altra parte, trovare un $\lambda_0 > 0$ tale che per $|x| < \lambda_0$ sia $|\eta(x)| < k$; preso allora u nel detto intorno e $\lambda < \lambda_0$ sarà

$$H_s(u) + \eta(\lambda u) < 0,$$

ciò che prova che il raggio Ou_1 non appartiene ad I .

Se ne conclude che Ω è costituito dai raggi su cui è $H_s(x) > 0$ e (poichè questi non formano un insieme chiuso) da parte o tutti quelli su cui $H_s(x) = 0$, i quali, comunque, formano un

⁴⁾ Diamo un esempio in cui Ω non coincide con $\Omega_1\Omega_2$. Si considerino nel piano (x, y) le regioni A, B, I , definite rispettivamente da $y \geq x^2$; $y \leq -x^2$; $x > 0$ e $-x^2 \leq y \leq x^2$. Sia $I_1 = A + I$, $I_2 = B + I$; allora Ω_1 è il semipiano $y \geq 0$, Ω_2 il semipiano $y \leq 0$, $\Omega_1\Omega_2$ la retta $y = 0$, mentre Ω è la sola parte positiva di questo asse.

insieme di misura nulla. E resta provato anche che Ω è contingente pieno.

d) Lasciando da parte il caso banale in cui O è interno ad I (esiste contingente pieno, ed è l'intera stella o, come insieme di punti, lo spazio), rientrano nel teorema c) — eventualmente con l'ausilio delle oss. a) e b) — i casi usuali di insiemi di integrazione aventi O come punto di contorno.

Notiamo in particolare il caso in cui I è definito, in un intorno di O , da

$$x_n \geq \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

dove φ è nulla e ha differenziale nullo nell'origine. Si rientra nel caso c) ponendo $\eta = -\varphi/|x|$. Se la φ è continua, il contorno è, in prossimità di O , una ipersuperficie che si proietta in modo biunivoco sull'iperpiano tangente $x_n = 0$; il contingente è pieno e consta del semispazio $x_n \geq 0$. Questo caso generalizza ampiamente quello considerato da Hsu in [1] pur consentendo, come si vedrà, nella questione che ci interessa, le medesime conclusioni.

Un'altra applicazione immediata di c) si ha quando, in prossimità di O , I è definito da

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

dove la F è analitica e regolare nell'origine. Basta assumere come funzione H il complesso dei termini non nulli di grado più basso di F ; il contingente è pieno ed ha per contorno il cono corrispondente, che è quindi algebrico.

Nel caso del piano, si trattano poi facilmente mediante a) e b) i contorni con punto angoloso, con cuspidi, con tacnodo ecc., per i quali però è spesso preferibile una ricerca diretta.

3. Formula generale di Laplace.

a) **TEOREMA α**) *L'insieme I di S , limitato o no, e misurabile, contenga O , abbia O come punto di accumulazione e possenga in O contingente pieno Ω , di misura non nulla.*

β) *La funzione $\varphi(x)$ sia definita e ≥ 0 in I , e per ρ abbastanza piccolo l'estremo superiore di $\varphi(x)$ in $I - I\Sigma_\rho$ sia $< \varphi(0)$.*

γ) Esista una funzione $P_k(x)$, definita e continua per ogni x , positivamente omogenea di grado $k > 0$ e tale che è in Ω

$$P_k(x) < -\alpha^2|x|^k \quad (x > 0)$$

ed in I

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - P_k(x)}{|x|^k} = 0.$$

δ) La funzione $Q_h(x)$ sia definita per ogni x , misurabile, positivamente omogenea di grado $h \geq 0$, limitata e positiva su σ_1 .

ϵ) La funzione $f(x)$ sia definita e misurabile in I , e il prodotto $f(x)Q_h(x)$ sia ivi sommabile. La $f(x)$ sia inoltre continua per $x = 0$, con $f(0) \neq 0$.

Vale allora la formula asintotica:

$$\int_I f(x)Q_h(x)[\varphi(x)]^\nu d\tau(x) \sim \frac{f(0)[\varphi(0)]^{\nu + \frac{h+n}{k}}}{\nu^{\frac{h+n}{k}}} \int_0^\infty Q_h(x)e^{P_k(x)} d\tau(x)$$

per $\nu \rightarrow +\infty$ ⁶⁾.

Cominciamo ad osservare che, essendo $\varphi(x)$ sommabile e limitata in I (è infatti $0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(0)$) tale è anche per $\nu > 0$ la $[\varphi(x)]^\nu$; quindi $f(x)Q_h(x)[\varphi(x)]^\nu$ è sommabile in I .

In secondo luogo osserviamo che, essendo in $\sigma_1 \Omega$

$$P_k(y) < -\alpha^2$$

e $P_k(y)$ continua, vale (Lemma I) la stessa disuguaglianza, per φ abbastanza piccolo, in $\bar{\Gamma}_\rho \sigma_1$. Preso allora un x in $\bar{\Gamma}_\rho$, il corrispondente $y = x/|x|$ starà in $\bar{\Gamma}_\rho \sigma_1$ e si avrà perciò:

$$P_k\left(\frac{x}{|x|}\right) < -\alpha^2$$

⁶⁾ Per semplicità abbiamo supposto P_k e Q_h definite in tutto lo spazio; in realtà basterebbe fossero definite, con le stesse proprietà, in un $\bar{\Gamma}_\rho$.

da cui:

$$P_h(x) < -\alpha^2 |x|^k$$

in $\bar{\Gamma}_{\rho_0}$ — e quindi in $I\Sigma_{\rho_0}$ — per un conveniente ρ_0 .

Ne risulta, in I ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - P_h(x)}{P_h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - P_h(x)}{|x|^k} \frac{|x|^k}{P_h(x)} = 0$$

perchè in I , per $|x| < \rho_0$ si ha $|x|^k < |P_h(x)|/\alpha^2$.

Ne segue che in $I\Sigma_{\rho_0}$ può scriversi:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + P_h(x)(1 + \lambda(x))$$

con $\lambda(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$.

In terzo luogo notiamo che, posto $x = |x|y$, si ha:

$$Q_h(x) = |x|^h Q_h(y)$$

ove, essendo y su σ_1 , il secondo fattore è limitato. Si ha quindi in $\bar{\Gamma}_{\rho_0}$:

$$0 < Q_h(x)e^{P_h(x)} < M |x|^h e^{-\alpha^2|x|^k}$$

onde il secondo membro è sommabile in $\bar{\Gamma}_{\rho_0}$

Essendo ora, per β), $\varphi(0) > 0$, e, per γ), $\varphi(x)$ continua per $x = 0$, ρ_0 potrà supporre così piccolo che in $I\Sigma_{\rho_0}$ sia $\varphi(x) > 0$. Preso poi un $\rho < \rho_0$ si ponga:

$$W = \nu^{\frac{h+n}{k}} \int_I f(x) Q_h(x) \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi(0)} \right]^\nu d\tau(x) = W_1 + W_2$$

essendo, in W_1 , l'integrale esteso ad $I\Sigma_\rho$, in W_2 ad $I - I\Sigma_\rho$.

Poichè in $I - I\Sigma_\rho$ è, per β),

$$0 \leq \frac{\varphi(x)}{\varphi(0)} < \theta < 1$$

risulta:

$$|W_2| < \theta^\nu \nu^{\frac{h+n}{k}} \int_{I - I\Sigma_\rho} |f(x)| Q_h(x) d\tau(x) < \theta^\nu \nu^{\frac{h+n}{k}} \int_I |f(x)| Q_h(x) d\tau(x)$$

e quindi:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} W_2 = 0.$$

Per trasformare W_1 poniamo in $I\Sigma_\rho$

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(0)} = e^{-\mu(x)},$$

da cui:

$$\psi(x) = -\log \left(1 + \frac{P_h(x)(1 + \lambda(x))}{\varphi(0)} \right)$$

e quindi:

$$\frac{P_h(x)(1 + \lambda(x))}{\psi(x)\varphi(0)} = -1 + \mu(x)$$

con $\mu(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$; ossia:

$$\psi(x) = -\frac{P_h(x)}{\varphi(0)}(1 + \varepsilon(x))$$

con $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$.

Ne segue:

$$W_1 = v^{\frac{h+n}{k}} \int_{I\Sigma_\rho} f(x) Q_h(x) e^{\frac{P_h(x)}{\varphi(0)}(1+\varepsilon(x))} d\tau(x).$$

Sia ora η l'estremo superiore di $|f(x) - f(0)|$ in $I\Sigma_\rho$, η' quello di $|\varepsilon(x)|$ nello stesso insieme, ambedue infinitesimi con ρ ; supponendo allora, come è lecito, $\eta' < 1$, si avrà:

$$\begin{aligned} v^{\frac{h+n}{k}} (f(0) - \eta) \int_{I\Sigma_\rho} Q_h(x) e^{\frac{P_h(x)}{\varphi(0)}(1+\eta')} d\tau(x) &< W_1 \\ &< v^{\frac{h+n}{k}} (f(0) + \eta) \int_{I\Sigma_\rho} Q_h(x) e^{\frac{P_h(x)}{\varphi(0)}(1-\eta')} d\tau(x). \end{aligned}$$

Trasformiamo il primo membro, eseguendo sull'integrale la sostituzione:

$$x = \left| \frac{\varphi(0)}{v(1 + \eta')} \right|^{1/k} z;$$

si ottiene:

$$W_1 > \frac{(f(0) - \eta)[\varphi(0)]^{\frac{k+n}{k}}}{(1 + \eta')^{n/k}} \int_{i(\Sigma_\rho)} Q_n(z) e^{P_n(z)} d\tau(z)$$

dove è

$$t = \left(\frac{\nu(1 + \eta')}{\varphi(0)} \right)^{1/k}.$$

Si faccia tendere ora ν a $+\infty$; anche t tenderà all' infinito e poichè sono soddisfatte le condizioni per l' applicazione del lemma 2° si conclude che

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} W_1 \geq \frac{(f(0) - \eta)[\varphi(0)]^{\frac{k+n}{k}}}{(1 + \eta')^{n/k}} \int_{\Omega} Q_n(z) e^{P_n(z)} d\tau(z).$$

In modo analogo si trova:

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} W_1 \leq \frac{(f(0) + \eta)[\varphi(0)]^{\frac{k+n}{k}}}{(1 - \eta')^{n/k}} \int_{\Omega} Q_n(z) e^{P_n(z)} d\tau(z).$$

Poichè per $\nu \rightarrow \infty$ W_2 tende a zero, alle stesse limitazioni soddisfano il massimo e il minimo limite di W , che non dipendono da ρ ; si faccia tendere ρ a 0 e si avrà senz' altro

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} W = f(0)[\varphi(0)]^{\frac{k+n}{k}} \int_{\Omega} Q_n(z) e^{P_n(z)} d\tau(z)$$

da cui, ricordando il significato di W , risulta la tesi.

OSS.: E' quasi superfluo accennare alla ovvia estensione della (4) che si ottiene sostituendo all' origine O un qualunque punto ξ , e quindi $x - \xi$ ad x (cioè $x_i - \xi_i$ ad x_i). Ci si riconduce così alle notazioni usate nell' *Introduzione*.

b) Può essere utile osservare che l' integrale a secondo membro della (4) si può esprimere mediante un integrale superficiale esteso ad un insieme della sfera σ_1 . Basta per questo introdurre coordinate polari, mediante le posizioni:

$$|x| = \rho \quad , \quad x = \rho y.$$

Si ha infatti in tal modo

$$\int_0^1 Q_h(x) e^{P_h(x)} d\tau(x) = \int_{\Omega\sigma_1} Q_h(y) d\sigma_1(y) \int_0^\infty \rho^{h+n-1} e^{\rho^k P_h(y)} d\rho,$$

dove l'integrazione rispetto a ρ si eseguisce mediante la sostituzione:

$$\rho^k P_h(y) = -r$$

che dà:

$$\frac{1}{k} [-P_h(y)]^{-\frac{h+n}{k}} \int_0^\infty e^{-r} r^{\frac{h+n}{k}-1} dr = \frac{1}{k} \Gamma\left[\frac{h+n}{k}\right] [-P_h(x)]^{-\frac{h+n}{k}}$$

La (4) prende così la forma:

$$(5) \quad \int_I f(x) Q_h(x) [\varphi(x)]^v d\tau(x) \sim \frac{f(0)[\varphi(0)]^{v+\frac{h+n}{k}}}{k^v \frac{h+n}{k}} \Gamma\left(\frac{h+n}{k}\right) \int_{\Omega\sigma_1} Q_h(y) [-P_h(y)]^{-\frac{h+n}{k}} d\sigma_1(y).$$

4. Casi particolari notevoli.

a) Considereremo anzitutto, generalizzando il quanto, i casi studiati dal sig. HSU. Sia O interno ad I e $Q_h(x) = 1$. Per la $\varphi(x)$, senza porre ipotesi di derivabilità fuori di O , ammetteremo la « bidifferenziabilità » in O , in senso esteso, cioè la validità di una formola del tipo:

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \frac{1}{2} \sum a_{r,s} x_r x_s + o(|x|^2)$$

dove la parte lineare si elimina, per l'ipotesi del massimo, rimanendo così un'ipotesi del tipo γ) del teorema generale, con $k = 2$ e

$$P_2(x) = -\frac{1}{2} \sum a_{r,s} x_r x_s.$$

Perchè le condizioni di γ) siano pienamente soddisfatte bisogna

però ammettere anche che la forma quadratica $\Sigma a_{r,s} x_r x_s$, che per la ipotesi del massimo potrebbe essere definita o semi-definita positiva, presenti il primo caso; onde il suo discriminante H sarà positivo ⁷⁾.

Il contingente è pieno ed è l'intero spazio S_n ; sotto le condizioni β) e ϵ) per $f(x)$ e $\varphi(x)$, che è inutile qui richiamare, si ha dunque:

$$J(v) = \int_I f(x)[\varphi(x)]^v d\tau(x) \sim \frac{f(0)[\varphi(0)]^{v+n/2}}{v^{n/2}} \int_{S_n} e^{-\frac{1}{2} \Sigma a_{rs} x_r x_s} d\tau(x).$$

L'integrazione si eseguisce subito mediante una sostituzione ortogonale destrorsa che riduca la forma quadratica a forma canonica:

$$\Sigma a_{r,s} x_r x_s = \Sigma c_i^2 z_i^2 \quad (c_i > 0).$$

L' jacobiano valendo 1, risulta:

$$\int_{S_n} e^{-\frac{1}{2} \Sigma c_i^2 z_i^2} d\tau(z) = \prod_1^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} c_i^2 z_i^2} dz_i = \prod_1^n \frac{\sqrt{2\pi}}{c_i} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{c_1 c_2 \dots c_n}.$$

Ma, per l'invarianza del discriminante per sostituzioni ortogonali si ha:

$$H = \text{Det. } \{ a_{r,s} \} = c_1^2 c_2^2 \dots c_n^2$$

quindi, in definitiva:

$$J(v) \sim \frac{f(0)[\varphi(0)]^{v+n/2}}{H^{1/2}} \left(\frac{2\pi}{v} \right)^{n/2}$$

che è il risultato di Hsu, da lui ottenuto ammettendo che la φ ammetta derivate prime e seconde continue in un intorno di O , e sia quindi $a_{r,s} = -f'_{rs}(0)$.

⁷⁾ A questa estensione di note proprietà al caso della bidifferenzialità, nel senso indicato nel testo, si giunge subito assumendo $x = tu$, con $t = 0$, e facendo poi tendere t a zero. Si ha:

$$\Sigma a_{rs} u_r u_s + o(|u|^2) \geq 0, \quad \Sigma a_{rs} u_r u_s \geq 0.$$

Nel caso considerato in 2. d), in cui O sia al contorno, e questo nell'intorno di O sia una ipersuperficie di cui O è punto semplice, il contingente pieno è uno dei semispazi limitati dall'iperpiano tangente, e ad esso va estesa l'integrazione. Poichè la funzione integranda è pari, il risultato è la metà del precedente, come, sotto condizioni ben più restrittive, ottiene il sig. HSU.

b) Ad un risultato in termini finiti si giunge anche quando, ferme restando le altre ipotesi, si assume per $Q_h(x)$ una forma algebrica di grado pari. Tratteremo per disteso il caso $h = 2$, essendo

$$Q_2(x) = \Sigma b_{rs} x_r x_s.$$

Riducendo anche qui la forma $P_2(x)$ a forma canonica si ha, con le notazioni di a),

$$Z = \int_{S_n} \Sigma b_{rs} x_r x_s \cdot e^{-\frac{1}{2} \Sigma a_{rs} x_r x_s} d\tau(x) = \int_{S_n} \Sigma b'_{rs} z_r z_s \cdot e^{-\frac{1}{2} \Sigma c_i^2 z_i^2} d\tau(z)$$

dove i b'_{rs} sono i coefficienti della trasformata di $Q_2(x)$; e, posto ancora $c_i z_i = u$, $\sqrt{2}$,

$$Z = \frac{2^{n/2+1}}{H^{1/2}} \Sigma \frac{b'_{rs}}{c_r c_s} \int_{S_n} u_r u_s e^{-\Sigma u_i^2} d\tau(u).$$

I termini del sommatorio si decompongono allora in prodotti di n integrali semplici, e da ciò risulta subito che i termini in cui è $r \neq s$ sono nulli. Ci si riduce così a

$$Z = \frac{2^{n/2+1}}{H^{1/2}} \Sigma \frac{b'_{rr}}{c_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \right)^{n-1} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{H^{1/2}} \Sigma \frac{b'_{rr}}{c_r^2}$$

per formule note.

Il sommatorio si calcola ora facilmente notando che esso non è altro che l'espressione $\Sigma b_{rs} a^{rs}$ (a^{rs} essendo, come di consueto, l'elemento generico della matrice reciproca di $\{a_{rs}\}$) calcolata per le forme trasformate. Ora tale espressione è un invariante ortogonale (come traccia del prodotto di matrici

$\{b_{rs}\} \{a_{rs}^{-1}\}$ e si ha quindi:

$$\sum \frac{b'_{rs}}{c_{rs}^2} = \sum b_{rs} a^{rs},$$

onde risulta in definitiva:

$$Z = \frac{(2\pi)^{n/2}}{H^{1/2}} \sum b_{rs} a^{rs}$$

e, nel caso di O interno:

$$\int_I f(x) \cdot \sum b_{rs} x_r x_s \cdot [\varphi(x)]^{\nu} d\tau(x) \sim \frac{f(0)[\varphi(0)]^{\nu+n/2+1}}{H^{1/2}} \frac{(2\pi)^{n/2}}{\nu^{n/2+1}} \sum b_{rs} a^{rs}$$

Quando invece O sia punto di contorno, del tipo considerato in *a*) il risultato risulta, per le medesime ragioni, dimezzato.

Il metodo si può estendere al caso accennato di una forma $Q_h(x)$ di grado pari; interviene ancora nella formula finale un invariante ortogonale simultaneo delle due forme P_2 e Q_h . Ciò in dipendenza dell' analoga proprietà invariante dell' integrale da calcolare, di cui però non è evidente a priori il carattere algebrico negli a_{rs} ⁸⁾.

c) Per $n=1$ l' ipotesi del contingente pieno esige che O sia, o interno ad I , e allora il contingente è l' intera retta, o estremo di un segmento appartenente ad I , mentre sia positiva la distanza di O dagli eventuali punti di I situati sulla semiretta opposta. Presumibilmente la (4) vale però anche in ipotesi più generali ⁹⁾.

Potrà porsi allora:

$$P_h(x) = -c_h |x|^h, \quad Q_h(x) = |x|^h \quad (c_h > 0)$$

⁸⁾ Per il calcolo dell' integrale in questo caso più generale si veggia una mia nota di prossima pubblicazione nei « Rendiconti del Semin. matematico di Torino ».

⁹⁾ Non mi è stato possibile rendermi conto direttamente, sul testo cinese, delle precise condizioni poste per questo caso dal Hsu [2]; nel sunto in inglese il punto ξ è supposto punto interno, e poi anche « punto di Lebesgue » (cioè di densità 1) di I , ipotesi evidentemente compresa nella prima. Per la $f(\varphi)$, in luogo della continuità, viene posta in ξ la condizione di « continuità in media » di Widder; nel testo compare però una formula che esprime una proprietà più restrittiva.

onde la (4) diviene, nel caso di O interno:

$$\int_I f(x) |x|^h [\varphi(x)]^\nu dx \sim \frac{f(0)[\varphi(0)]^{\nu + \frac{h+1}{n}}}{\frac{h+1}{\nu^n}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^h e^{-c_k |x|^k} dx$$

che, eseguendo l'integrazione, diviene:

$$\int_I f(x) |x|^h [\varphi(x)]^\nu dx \sim \frac{2f(0)[\varphi(0)]^{\nu + \frac{h+1}{k}}}{k(c_k \nu)^{\frac{h+1}{k}}} \Gamma\left(\frac{h+1}{k}\right)$$

formula dovuta a HSU [2]. Per $h = 0$ si ha la formula (2) di B. LÉVI. Nel caso su accennato, in cui il contingente si riduce ad una semiretta, il secondo membro viene dimezzato.

d) Gli esempi di applicazione della (4) potrebbero ora moltiplicarsi, senza grande interesse. Vogliamo tuttavia, per chiudere, trattare un caso assai semplice, ma sensibilmente discosto da quelli sino ad oggi studiati.

Sia $n = 2$, x e y le variabili ed O un punto angoloso saliente del contorno, sicchè il contingente pieno sia costituito da un angolo convesso. La $\varphi(x, y)$ sia differenziabile in O , sicchè possa scriversi:

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, 0) - Ax - By + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Si riconosce subito che perchè in O la φ abbia un massimo forte il vettore (A, B) deve cadere nel contingente e formare angoli acuti con i lati di esso. Siano essi α , in senso negativo, β in senso positivo. Sia poi $Q_h = 1$.

Convieni portare, con una rotazione di assi, l'asse x nella direzione (A, B) ; l'integrale a secondo membro della (4), introducendo coordinate polari, diviene

$$\int_{-\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{A^2+B^2} \rho \cos \theta} \rho^\nu d\rho = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{(A^2 + B^2) \cos^2 \theta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{A^2 + B^2}$$

e si giunge così alla formula:

$$\iint_I f(x, y) [\varphi(x, y)]^\nu dx dy \sim \frac{f(0, 0) [\varphi(0, 0)]^{\nu+2}}{\nu^2} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{[\operatorname{grad} \varphi]_{(0, 0)}^2}.$$

Con facili calcoli, al secondo membro può anche darsi la forma:

$$\frac{f(0, 0)[\varphi(0, 0)]^{\nu+2} \sin \gamma}{\nu^2 \varphi_1' \varphi_2'}$$

in cui compaiono l'angolo γ delle tangenti e le derivate di φ nelle direzioni delle tangenti stesse.

BIBLIOGRAFIA

- G. DARBOUX [1]: *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres etc.* (Journ. de Mathém. (3), vol. IV, 1878), p. 29.
- R. H. FOWLER [1]: *Statistical Mechanics*, (Cambridge, 1936), p. 47.
- W. FULKS [1]: *A generalisation of Laplace method*, (Proceed. of the Amer. Math. Soc., II, 1951, p. 613-622).
- L. C. HSU [1]: *A theorem on the asymptotic behavior of a multiple integral*, (Duke Mathem. Journ., 15, 1948, 623-632).
 [2]: *A theorem concerning an asymptotic integration*, (Scienza cinese (?), 16, 1951, 149-155). Testo cinese con sunto in inglese.
- P. S. LAPLACE [1]: *Théorie analytique des probabilités*, (Oeuvres complètes, Paris, 1886, p. 89-110).
- H. LEBESGUE [1]: *Remarques sur un énoncé dû à Stieltjes*, (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, (3), 1, 1909).
- B. LEVI [1]: *Sobre una formula de Laplace*, (Public. Univ. del Litoral, VI, 1946, 341-351).
- G. POLYA u. G. SZEGÖ [1]: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, (Berlin, 1925), Bd. 1, 78, 244.
- A. ROMANOWSKY [1]: *Sur la loi sinusoidale limite*, (Rend. Circ. Mat. Palermo, 56, 1932), p. 85.
- T. STIELTJES [1]: *Correspondance de Hermite et de Stieltjes*, t. II, 185, 315-317, 335.
- D. H. WIDDER [1]: *The Laplace Transform*, (Princeton, 1946), p. 277.