RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE GRIOLI

Validità del teorema di menabrea e integrazione del problema dell'elastostatica in casi non isotermi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 202-208

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__202_0>

VALIDITÀ DEL TEOREMA DI MENABREA E INTEGRAZIONE DEL PROBLEMA DELL'ELASTOSTATICA IN CASI NON ISOTERMI

Nota (*) *di* GIUSEPPE GRIOLI (*a Padova*)

Di recente ho mostrato che l'applicazione delle proprietà di media permette di stabilire un procedimento di integrazione del problema dell'elastostatica isoterma [1]) dei corpi omogenei comunque anisotropi. Ma riflettendo che le equazioni di Cauchy e al contorno si mantengono formalmente inalterate anche in presenza di fenomeni termici concomitanti si deve presumere che il procedimento d'integrazione valido nel caso isotermo e in quello di sistemi a temperatura ignorabile [2]) possa adattarsi a qualche caso di tipo diverso.

Se ben si riflette sulla natura del metodo proposto si riconosce che esso è atto a determinare tutte le soluzioni di quadrato sommabile delle equazioni di Cauchy e al contorno ove sono assegnate le forze. Di queste quella effettiva [soddisfacente alle condizioni di vincolo se il problema di equilibrio ha soluzione] è la *congruente*.

Nel caso isotermo la temperatura figura come un dato e le equazioni di congruenza espresse mediante le caratteristiche di tensione dipendono solo da queste. La medesima circostanza si presenta per sistemi a temperatura ignorabile. Nel caso gene-

---

*) Pervenuta in Redazione il 18 marzo 1952.

1) G. GRIOLI, *Proprietà di media ed integrazione del problema dell' Elastostatica isoterma*, « Annali di Matematica pura ed applicata », Vol. 33-1952.

2) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Annali di Matematica pura ed applicata »; Serie IV, Vol. 22-1943, pag. 124.

rale, invece, le equazioni di De Saint-Venant — se tradotte nelle caratteristiche di tensione — dipendono dalla incognita temperatura e il problema di elastostatica non può scindersi da quello di propagazione del calore. Se però la trasformazione dallo stato naturale ad uno vicino di equilibrio è accompagnata da un fenomeno stazionario di propagazione o è adiabatica la temperatura risulta nota — nel primo caso — in base all' integrazione del problema del calore [indipendente, ora, da quello meccanico] o esprimibile — nel secondo — in funzione delle caratteristiche di tensione in base alla condizione di isoentropia. Osserverò che il teorema di Menabrea si può estendere a tali casi e il metodo d' integrazione sopra indicato applicarsi con opportuno adattamento.

Nel caso adiabatico, anzi, è possibile dare una valutazione del massimo modulo della variazione di temperatura senza neppure ricorrere all' integrazione del problema di equilibrio ma semplicemente adattando una disuguaglianza di carattere generale altrove stabilita [3]).

§ 1. - Validità del teorema di Menabrea in casi non isotermi.

CASO STAZIONARIO. — Com' è noto, in corrispondenza ad ogni stato di equilibrio vicino ad uno stato naturale le caratteristiche di tensione sono espresse da

$$X_r = -\sum_{s=1}^{6} M_{rs}\varepsilon_s + L_r\tau, \qquad (r = 1, 2, \dots, 6), \tag{1}$$

ove gli M_{rs} sono i coefficienti del doppio dell' energia potenziale elastica isoterma specifica, gli L_r i coefficienti di tensione termica, le ε_r le caratteristiche di deformazione e τ la variazione di temperatura assoluta subita dal corpo.

Denotando con m_{rs} i reciproci degli M_{rs} nel determinante $|M_{rs}|$ e posto

$$\eta_r = X_r - L_r\tau, \qquad (r = 1, 2, \dots, 6), \tag{2}$$

---

3) G. GRIOLI, *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e la deformazione di un corpo elastico omogeneo.* « Annali di Matematica pura ed applicata »; Vol. 33-1952.

da (1) segue

$$\varepsilon_r = -\sum_{s=1}^{6} m_{rs}\eta_s\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6). \tag{3}$$

Le ε_r si possono esprimere quindi — qualunque sia il tipo di trasformazione subita dal corpo — in modo analogo al caso isotermo. Si ha, cioè,

$$\varepsilon_r = -\frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta_r}\,, \tag{4}$$

pur di identificare $V(\eta)$ con ciò che si ricava dall' espressione — funzione delle X_r — dell'energia potenziale elastica isoterma specifica sostituendo le η_r alle X_r. Basta allora tener presente che il teorema di Menabrea si fonda sostanzialmente sulla validità delle relazioni corrispondenti alle (4) nel caso isotermo e che nel caso stazionario la temperatura si può ritenere [oltrechè indipendente dal tempo] nota perchè determinata in base alla precedente integrazione del problema di propagazione [indipendente da quello meccanico] per dedurne la validità nel caso stazionario, salvo la sostituzione di $V(\eta)$ a $V(X)$.

Detto C il campo corrispondente al corpo elastico, posto

$$W^{(s)} = \int_C V(\eta)dC \tag{5}$$

e ritenuta nota la τ si ha, cioè: *in condizioni di propagazione stazionaria tra tutti gli stati tensionali soddisfacenti alle equazioni di Cauchy e al contorno ove sono assegnate le forze ha luogo quello che rende minima la differenza tra $W^{(s)}$ e il potenziale delle reazioni vincolari.*

Si riconosce altresì che la sestupla di caratteristiche di tensione soddisfacente il teorema di Menabrea è congruente. Intendo dire che essa verifica le equazioni che si deducono da quelle di De Saint-Venant sostituendo le $X_r - L_r\tau$ alle ε_r.

* * *

CASO ADIABATICO. — Se la trasformazione inerente al passaggio del corpo dallo stato naturale a quello attuale è *adiabatica* la condizione di *isoentropia* implica, come è noto,

$$\tau = -\frac{1}{c}\sum_{s=1}^{6} L_s \varepsilon_s , \tag{6}$$

ove c è un coefficiente [costante] proporzionale al rapporto tra il calore specifico sotto configurazione costante e la temperatura assoluta nello stato naturale.

Detti

$$M_{rs}^{(a)} = M_{rs} + \frac{L_r L_s}{c}, \qquad (r, s = 1, 2, \dots, 6), \tag{7}$$

i *coefficienti adiabatici di elasticità* e posto

$$V^{(a)}(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{r,s}{}_{1}^{6} M_{rs}^{(a)} \varepsilon_r \varepsilon_s , \tag{8}$$

da (6), (8), segue, in base a (1)

$$X_r = -\frac{\partial V^{(a)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_r}, \qquad (r = 1, 2, \dots, 6). \tag{9}$$

Se si denota con $m_{rs}^{(a)}$ il reciproco di $M_{rs}^{(a)}$ nel determinante $|M_{rs}^{(a)}|$, da (9) si deduce

$$\varepsilon_r = -\frac{\partial V^{(a)}(X)}{\partial X_r}, \qquad (r = 1, 2, \dots, 6), \tag{10}$$

pur d' intendere [4])

$$V^{(a)}(X) = \frac{1}{2}\sum_{r,s}{}_{1}^{6} m_{rs}^{(a)} X_r X_s . \tag{11}$$

Posto

$$W^{(a)} = \int_C V^{(a)}(X)\,dC , \tag{12}$$

si riconosce allora che il teorema di Menabrea si mantiene valido rispetto alla $W^{(a)}$ e che la sestupla delle X_r minimizzanti [secondo richiede il teorema di Menabrea] la $W^{(a)}$ è

---

[4]) È evidente che $V^{(a)}(X)$ è — come $V^{(a)}(\varepsilon)$ — definita positiva.

congruente, cioè verifica le equazioni che si deducono dalle note di De Sanit-Venant sostituendo le ε_r con i secondi membri delle (10).

§ 2. - Sulla integrazione del problema della Statica dei corpi elastici.

La validità del teorema di Menabrea nel caso di propagazione stazionaria ed in quello adiabatico permette di adattare a questi casi il metodo d' integrazione del problema dell'Elastostatica isoterma fondato sulle proprietà di media [5]).

Basta a tal fine tra tutte le soluzioni delle equazioni di equilibrio caratterizzate dalle relazioni integrali di media scegliere quella che — analogamente a quanto avviene nel caso isotermo — soddisfa al teorema di Menabrea del caso stazionario o di quello adiabatico.

In effetti se $\{P_t\}$ è una successione *completa* di polinomi linearmente indipendenti e ortogonali in C nelle coordinate x_1, x_2, x_3, indicato con il soprassegno il valor medio in C di una qualunque funzione di x_1, x_2, x_3 e posto

$$\rho_t^2 = \frac{1}{C}\int_C P_t^2 dC\,, \qquad (t = 0, 1, 2, \dots), \tag{13}$$

$$X_r^{(m)} = \sum_{t=0}^{m} \frac{\overline{X_r P_t}}{\rho_t^2} P_t\,, \qquad (r = 1, 2, \dots, 6), \tag{14}$$

i $\lim\limits_{m\to\infty} X_r^{(m)}$ — se esistono — verificano le equazioni di equilibrio quando e soltanto quando gli $\overline{X_r P_t}$ soddisfano — per ogni t — alle proprietà di media conseguenti alle equazioni di equilibrio stesse [nel senso specificato in loco cit. in nota (1)]. La soluzione effettiva si ottiene come limite delle $X_r^{(m)}$ che minimizzano l'espressione corrispondente agli sviluppi (14) di $W^{(s)}$ nel caso stazionario, di $W^{(a)}$ in quello adiabatico.

In questo secondo caso le $X_r^{(m)}$ minimizzanti verificano — qualunque sia m — le condizioni di integrabilità. Nel caso di propagazione stazionaria, invece, è bene tener presente che

---

[5]) Vedi loco cit. in nota ([1]).

l' espressione $W_m^{(s)}$ corrispondente in base alle (14) alla $W^{(s)}$ è data da [6])

$$W_m^{(s)} = C\sum_{t=0}^{m}\sum_{rs}{}_1^6 m_{rs}\frac{(\overline{X_rP_t} - L_r\overline{\tau P_t})(\overline{X_sP_t} - L_s\overline{\tau P_t})}{\rho_t^2} + \tag{15}$$

$$+ C\sum_{r,s}{}_1^6 m_{rs}L_rL_s\sum_{t=m+1}^{\infty}\frac{\overline{\tau P_t}^2}{\rho_t^2}.$$

Di conseguenza le $X_r^{(m)}$ che rendono minima $W_m^{(s)}$ verificano le condizioni di congruenza non rispetto alla effettiva temperatura ma soltanto in relazione alla sua espressione di m-esima approssimazione,

$$\tau^{(m)} = \sum_{t=0}^{m}\frac{\overline{\tau P_t}}{\rho_t^2}P_t. \tag{16}$$

In tutti e due i casi è quindi possibile determinare le corrispondenti espressioni delle componenti di spostamento integrando le espressioni di approssimazione fornite dalle (3) o dalle (10) ma nel caso stazionario si deve avere l' avvertenza di sostituire nelle (2) [affinchè le (3) risultino integrabili] non solo le X_r con le $X_r^{(m)}$ minimizzanti $W_m^{(s)}$ ma anche τ con $\tau^{(m)}$.

§ 3. - Una limitazione inferiore per il massimo modulo della variazione di temperatura nel caso adiabatico.

Qui con $P_0, P_1, \dots, P_m$ indico $m+1$ polinomi qualsiasi in x_1, x_2, x_3 ortogonali in C e con m_{rs}^* i coefficienti costanti di una qualunque forma quadratica in sei variabili definita o almeno semidefinita positiva.

Com' è noto [7]), sussiste la disuguaglianza

$$\sum_{rs}{}_1^6\int_C m_{rs}^* X_rX_s dC \geq C\sum_{t=0}^{m}\sum_{rs}{}_1^6 m_{rs}^*\frac{\overline{X_rP_t}\cdot\overline{X_sP_t}}{\rho_t^2}, \tag{17}$$

ove i ρ_t^2 sono definiti in base a (13).

---

[6]) La τ è certamente esprimibile in serie dei P_t. Sulla (15) si riconosce che la determinazione delle $X_r^{(m)}$ minimizzanti $W_m^{(s)}$ richiede solo la conoscenza delle coordinate di Fourier della r rispetto a $P_0, P_1, \dots P_m$.

[7]) Vedi loco cit. in nota ([3]).

Da (6), (10) segue

$$\tau = \frac{1}{c} \sum_{p=1}^{6} c_p X_p \,, \tag{18}$$

con

$$c_p = \sum_{s=1}^{6} L_s m_{sp}^{(a)} . \tag{19}$$

Supposto il corpo omogeneo basta allora identificare gli m_{rs}^* con i coefficienti della espressione quadratica nelle X_r che esprime τ^2 in base a (18) perchè da (17) si deduca

$$|\tau|_{\max} \geq \frac{1}{c} \sqrt{\sum_{t=0}^{m} \frac{1}{\rho_t^2} \left[\sum_{s=1}^{6} c_s \overline{X_s P_t} \right]^2} . \tag{20}$$

Gli $\overline{X_r P_t}$ vengono determinati dalle proprietà di media e dalla condizione di rendere minimo il secondo membro di (20) [vedi loco cit. in nota (3)].

Se la sollecitazione è ovunque assegnata, assumendo $P_0 \equiv 1$, $P_i \equiv x_i, (i = 1, 2, 3)$, $P_i \equiv 0$, per $i > 3$ e identificando la terna di riferimento con quella centrale di C, il secondo membro di (20) risulta noto ed espresso in funzione delle coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione esterna.

Ad es., nel caso dei corpi isotropi — detto L il coefficiente di tensione termica λ e μ le costanti di Lamé ed I_1 l' invariante di tensione — da (20) si deduce [per $m > 3$ e $P_i \neq 0$ se $i > 3$]

$$|\tau|_{\max} \geq \frac{L}{\left[3\left(\lambda + \frac{L^2}{c}\right) + 2\mu\right] c} \sqrt{\sum_{t=0}^{m} \frac{1}{\rho_t^2} \overline{I_1 P_t}^2} \geq \tag{21}$$

$$\geq \frac{L}{\left[3\left(\lambda + \frac{L^2}{c}\right) + 2\mu\right] c} \sqrt{\overline{I}_1^2 + \sum_{t=0}^{3} \frac{\overline{I_1 x_t}^2}{\rho_t^2}} \,,$$

con il terzo membro noto [8]) in funzione delle coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione esterna.

---

[8]) Se nel terzo membro di (21) si trascura il gruppo di termini della sommatoria la disuguaglianza che ne deriva coincide con quella direttamente deducibile dalla relazione che intercorre tra il valore medio della temperatura in C e la variazione di volume del corpo.