RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

Sul minimo relativo nei problemi di calcolo delle variazioni d'ordine *n*

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__1_0>

SUL MINIMO RELATIVO NEI PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI D'ORDINE n

Memoria (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Padova*)

1. - Generalità e posizione del problema [1]). — I problemi di minimo relativo per gli integrali

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

vengono di solito trattati introducendo la metrica lagrangiana di ordine n (*minimo debole*) o di ordine $n-1$ (*minimo forte*); nel presente lavoro verranno invece studiati introducendo una metrica lagrangiana d' ordine q, essendo q un qualunque intero compreso tra 0 e n. Precisiamo il problema.

Sia $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ una funzione di classe C^3 almeno [2]) per (x, y) variabile in un certo campo A e per ogni valore di $y', \dots, y^{(n)}$.

Diremo *curve ordinarie* C quelle di equazione

$$y = y(x) \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

con $y(x)$ funzione assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini e tale inoltre che esista finito l' integrale secondo Lebesgue

(*) Pervenuta in Redazione il 12 gennaio 1952.

[1]) I risultati contenuti nel presente lavoro sono stati comunicati al IV Congresso dell' U.M.I. (Taormina 25-30 ottobre 1951).

[2]) Seguendo la terminologia del BOLZA, diremo che una funzione di una o più variabili è di classe C^s in un certo insieme in cui è definita se è continua ivi insieme alle derivate fino all'ordine s.

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))dx. \tag{1}$$

Il problema che noi ci proponiamo è quello di dare *condizioni sufficienti perchè una data curva ordinaria* C_0 $(y_0(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, *che supporremo senz'altro di classe* C^n *e interna al campo* A [3]), *dia a* $I(C)$ *il valore minimo relativamente a tutte le curve ordinarie* C *soddisfacenti a certe condizioni agli estremi e appartenenti ad un « opportuno intorno » di* C_0.

Per fissare le idee [4]), prendiamo come condizioni agli estremi le seguenti

$$\begin{cases} x_1 = \text{cost.} & x_2 = \text{cost.} \\ y^{(i)}(x_1) = y_0^{(i)}(x_1) \quad , & y^{(i)}(x_2) = y_0^{(i)}(x) \end{cases} \tag{2}$$

$$(i = 0,\ 1, \dots,\ n-1\,;\ y_0^{(0)}(x) = y_0(x),\ y^{(0)}(x) = y'x)$$

essendo $y = y(x)$ e $y = y_0(x)$ $(x_1 \leq x \leq x_2)$ le equazioni rispettivamente delle curve C e C_0.

È noto che si è soliti considerare come *intorno* di C_0 quello *lagrangiano di ordine* $n-1$ (minimo *forte*), vale a dire ci si limita alle curve ordinarie C per le quali, oltre alle (2), è in tutto (x_1, x_2)

$$|\, y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x) \,| \leq \rho \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1) \tag{3}$$

ρ essendo un numero positivo *sufficientemente piccolo*; oppure si considera quello *lagrangiano di ordine* n (minimo *debole*), per il quale oltre alle (2) e alle (3) deve essere anche soddisfatta, quasi dappertutto in (x_1, x_2), la

$$|\, y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x) \,| \leq \rho. \tag{4}$$

---

[3]) Cioè tale che i punti $(x, y_0(x))$ sono tutti interni ad A.

[4]) Ci limitiamo a considerare come condizioni agli estremi le (2) per semplicità; ma quanto diremo rimane valido, facendo uso degli ovvi accorgimenti del caso, anche per condizioni agli estremi generali, del tipo:

$$\psi_u(x_1, y(x_1), y'(x_1), \dots, y^{(n-1)}(x_1), x_2, y(x_2), y'(x_2), \dots, y^{(n-1)}(x_2)) = 0$$
$$u = 1, 2, \dots, \beta,\ \beta \leq 2n+2$$

Accanto ad essi viene considerato anche il minimo *semiforte*, per il quale l'intorno di C_0 è determinato dalle curve C soddisfacenti alle (2), (3) e quasi-dappertutto in (x_1, x_2)

$$|y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)| \leq L$$

L essendo un numero positivo *prefissato.*

In una sua fondamentale memoria del 1923 [11] [5]) E. E. LEVI osservò per primo come fosse opportuno, se è $n > 1$, porsi il problema di « allargare » l'intorno di C_0, assumendo come metrica quella lagrangiana di ordine q, con $0 \leq q \leq n$; più precisamente egli formulò, in sostanza, questi due tipi di problemi: *dare condizioni sufficienti perchè* C_0 *sia minimamente tra le curve ordinarie* C *soddisfacenti alle* (2) *e alle*

$$(5) \qquad |y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x)| \leq \rho \qquad (i = 0, 1, \ldots, q, \ 0 \leq q \leq n)$$

ρ *essendo un numero positivo* SUFFICIENTEMENTE PICCOLO, oppure *tra le curve ordinarie* C *soddisfacenti alle* (2), *alle* (5) *e inoltre alla*

$$(6) \qquad |y^{(q+1)}(x) - y_0^{(q+1)}(x)| \leq L$$

L *essendo un numero positivo* PREFISSATO (naturalmente se è $q = n$ la $|y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)| \leq \rho$ va verificata quasi-dappertutto e il secondo caso non si presenta; se è $q = n - 1$ la (6) va verificata quasi-dappertutto).

Seguendo una nomenclatura del LEVI, chiameremo i due tipi di problemi rispettivamente problema di *minimo relativo di ordine* q *nel campo illimitato e nel campo limitato.* Gli abituali problemi di minimo *debole, forte* e *semiforte* diventano così rispettivamente problemi di ordine n, di ordine $n - 1$ nel campo illimitato, di ordine $n - 1$ nel campo limitato.

È noto [6]) che per questi ultimi sono sufficienti le classiche

---

[5]) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

[6]) Si veda ad es. [2], [10], [11]; è noto anche che i problemi sull'integrale $I(C)$ possono riportarsi a problemi di Lagrange e come tali essere studiati (si veda ad es. [1] e [14]); da questo punto di vista l'impostazione del presente lavoro va messa in relazione con [12].

condizioni di EULERO, di LEGENDRE, di WEIERSTRASS e quella sulla *variazione seconda*.

La *Condizione I* (di EULERO) si esprime dicendo che la funzione $y_0(x)$ è un' *estremale* del problema, cioè è soluzione dell' *equazione* di EULERO:

$$(7)\quad f_y - \frac{d}{dx}\left[f_{y'} - \left\{f_{y''} - \dots - \frac{d}{dx}\left(f_{y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx}f_{y^{(n)}}\right)\right\}\right] = 0$$

gli argomenti di $f_y, f_{y'}, \dots, f_{y^{(n)}}$ essendo $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$.

La *Condizione* II'_N (di WEIERSTRASS) consiste nel fatto che esista un numero positivo N tale che per

$$x_1 \leq x \leq x_2\ , \qquad |y^{(i)} - y_0^{(i)}(x)| \leq N \qquad (i = 0, 1, \dots, n;\ y^{(0)} = y)$$

e per $Y^{(n)} \neq y^{(n)}$ sia

$$(8)\qquad \mathcal{E}(x\ \ y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)};\ Y^{(n)}) > 0,$$

la funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS essendo al solito definita da

$$(9)\quad \mathcal{E}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)};\ Y^{(n)}) = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}, Y^{(n)}) -$$
$$- f(x, y, \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) - (Y^{(n)} - y^{(n)}) f_{y^{(n)}}(x, y, \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}).$$

La *Condizione III'* (di LEGENDRE) è data dalla

$$(10)\qquad f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x,\ y_0(x), \dots, y_0^{(n)}(x)) > 0$$

per ogni x di (x_1, x_2).

Infine la *Condizione IV'* consiste nel fatto che la variazione seconda lungo la curva C_0

$$(11)\quad I_2(y_0, \eta) = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{0 \leq i, k \leq n} f_{y^{(i)}y^{(k)}}(x, y_0(x), \dots, y_0^{(n)}(x))\eta^{(i)}(x)\eta^{(k)}(x)dx$$

sia positiva per ogni variazione «ammissibile» non identicamente nulla, cioè per ogni funzione $\eta(x)$, non identicamente nulla in (x_1, x_2), assolutamente continua con le sue derivate fino all' ordine $n-1$, con derivata n-sima a quadrato sommabile, e soddisfacente alle $\eta^{(i)}(x_1) = \eta^{(i)}(x_2) = 0$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

È noto [7]) che le Condizioni I, III′, IV′ sono sufficienti per il minimo *debole* e quelle I, II′$_N$, III′, IV′ per il minimo *forte*; per il minimo *semiforte* bastano invece le Condizioni I, III′, IV′ e la

$$(12) \qquad \mathcal{E}(x,\ y_0(x),\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}(x),\ y_0^{(n)}(x);\ Y^{(n)}) > 0$$

per $x_1 \leq x \leq x_2$, $0 < | Y^{(n)} - y_0^{(n)}(x) | \leq L.$

Il LEVI ha dimostrato che condizioni di tipo analogo alle I, II′$_N$, III′, IV′ sono sufficienti per il minimo d'ordine $n-2$ nel campo limitato, bastando aggiungere che le condizioni sulle $\mathcal{E}$ e sulla $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$ siano soddisfatte in un insieme di valori più ampio che nelle III′ e II′$_N$; mentre per il minimo d'ordine $n-2$ nel campo illimitato o quelli di ordine minore di $n-2$ si è limitato a mostrare con un opportuno esempio che per studiarli occorre introdurre delle condizioni di tipo essenzialmente nuovo, senza peraltro indicarle.

Nel presente lavoro riprendo il problema ottenendo criteri sufficienti *per i problemi di minimo d'ordine zero* e quindi a maggior ragione per quelli d'ordine maggiore di zero. L'idea che mi è risultata più utile è stata quella di cercare di sostituire ad ogni curva variata C, appartenente ad un intorno «d'ordine zero» di C_0 sufficientemente piccolo, una curva C_* che stesse in un opportuno intorno «d'ordine $n-1$» della C_0 e soddisfacesse alla condizione $I(C) \geq I(C_*)$, onde poter dedurre dalle Condizioni I, II′$_N$, III′, IV′: $I(C_*) \geq I(C_0)$ e quindi $I(C) \geq I(C_0)$; mi è riuscito di determinare tale curva C_* servendomi tra l'altro dei risultati noti sull'esistenza del minimo *assoluto* di $I(C)$, dovuti sopratutto a S. CINQUINI, e di ragionamenti già usati in Calcolo delle Variazioni nello studio del minimo «in piccolo» (v. [15] e [8]); il risultato (n. 3) è che basta aggiungere alle Condizioni I, II′$_N$, III′, IV′ una condizione che potremmo chiamare del tipo NAGUMO - MC. SHA-

---

[7]) Le dimostrazioni di questi teoremi sono fatte solitamente limitandosi a considerazione, nell'intorno voluto di C_0, curve C di classe D^n (cioè di classe C^{n-1} e con derivata n-1-esima avente un numero finito di punti angolosi); ma esse valgono più in generale anche per curve C ordinarie. La cosa è per es. esplicitamente rilevata in REID [14; pag. 678].

NE (v. condizione b) n. 3 o le altre condizioni citate nelle osservazioni I e II, n. 3).

Altri criteri sufficienti si ottengono (n. 4) riportando il problema d'ordine zero a quello studiato dal LEVI.

Il lavoro termina (n. 5) con alcune osservazioni sulle condizioni sufficienti per la *semicontinuità* « di ordine zero » di $I(C)$ e sui teoremi di esistenza del minimo *assoluto* di $I(C)$.

2. - Una costruzione preliminare. — Ci sarà utile in seguito la costruzione di una certa funzione che stabiliremo nel presente numero.

Siano dati il numero intero positivo n, un intervallo finito dell'asse delle x: $x_1 \leq x \leq x_2$ e due numeri positivi qualunque, ma fissati: δ_0 e M.

Si divida l'intervallo (x_1, x_2) in m parti uguali di lunghezza più piccola di δ_0, mediante i punti $\xi_1 = x_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < < \xi_{m+1} = x_2$.

Dopo di che si divida ciascuno degli intervalli (ξ_r, ξ_{r+1}) $(r = 1, 2, \dots, m-1)$ in $n+2$ parti uguali mediante i punti $x_{r,0} = \xi_r < x_{r,1} < \dots < x_{r,n+1} < x_{r,n+2} = \xi_{r+1}$, e si dica δ l'ampiezza di ciascuna di esse; si divida anche l'intervallo (ξ_m, x_2) in $n+2$ parti uguali e si indichino con $x_{m,0} = = \xi_m < x^*_{m,0} < x_{m,1} < x_{m,2} < \dots < x_{m,n} < x_{m,n+1} = x_2$.

Si osservi poi che considerato il determinante

$$D' = \begin{vmatrix} (n\delta + a_1)^n & ((n-1)\delta + a_1)^n & \dots & (\delta + a_1)^n \\ (n\delta + a_2)^{n-1} & ((n-1)\delta + a_2)^{n-1} & \dots & (\delta + a_2)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n\delta + a_n & (n-1)\delta + a_n & \dots & \delta + a_n \end{vmatrix}$$

si può determinare un numero positivo δ_n tale che qualunque siano le quantità $a_1, a_2, \dots, a_n$, purchè in modulo minore di δ_n, D' sia $\neq 0$ e anzi in modulo maggiore di un certo $m_1 > 0$; basta infatti pensare che per $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ esso è $\neq 0$.

Fissato il numero δ_n, che potremo senz'altro supporre minore di δ, consideriamo gli intervalli $(x_{r,n+1}, x_{r,n+1} + \delta_n)$

$(r = 1, 2, \ldots, m-1)$; e sia $z(x)$ una *qualunque* funzione di classe C^{n-1} in (x_1, x_2) e soddisfacente alle

$$z^{(i)}(x_1) = z^{(i)}(x_2) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{13}$$

Ci proponiamo di far vedere che, *se il* $\max\limits_{(x_1, x_2)} |z(x)|$ *è sufficientemente piccolo, è sempre possibile trovare dei punti* x_r^i $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ *appartenenti all'intervallo* $(x_{r,n+1}, x_{r,n+1} + \delta_n)$ $(r = 1, 2, \ldots, m-1)$ *e una funzione* $\gamma(x)$ *di classe* D^n *in* (x_1, x_2) *soddisfacente ivi alla*

$$|\gamma^{(n)}(x)| \leq M \tag{14}$$

e alle

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma^{(i)}(x_1) = \gamma^{(i)}(x_2) = 0 \\ \gamma^{(i)}(x_r^i) = z^{(i)}(x_r^i) \end{array}\right. \qquad (i=0, 1, \ldots, n-1;\ r=1, 2, \ldots, m-1) \tag{15}$$

I punti x_r^i e la funzione $\gamma(x)$ dipenderanno naturalmente dalla funzione $z(x)$.

Sarà bene perciò richiamare una proposizione che segue ad es. immediatamente dal lemma XI, cap. II, della memoria [11] di Levi; precisamente:

« *Se* $y(x)$ *è una funzione di classe* C^{n-1} *almeno nell'intervallo* (a, b) *allora i* $\min |y^{(i)}(x)|$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *tendono a zero al tendere a zero del* $\max |y(x)|$ ».

Essa ci assicura che prefissato un $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\rho > 0$ tale che per ogni funzione $z(x)$ di classe C^{n-1} in (x_1, x_2) e soddisfacente alle (13) per la quale sia $|z(x)| \leq \rho$ in (x_1, x_2), si possono per $r = 1, 2, \ldots, m-1$ determinare dei punti x_r^i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ appartenenti all'intervallo $(x_{r,n+1}, x_{r,n+1} + \delta_n)$ tali che

$$|z^{(i)}(x_r^i)| < \varepsilon \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{16}$$

Per costruire la funzione $\gamma(x)$ si consideri allora, per $r = 1, 2, \ldots, m$, il seguente sistema di $2n$ equazioni nelle

$2n+1$ incognite $\gamma^0_{r,1}, \gamma^1_{r,1} \ldots, \gamma^{n-1}_{r,1}, M_{r,0}, M_{r,1} \ldots, M_{r,n}$

$$(17)\left\{\begin{aligned} z^{(i)}(x^i_{r-1}) &= \gamma^i_{r,1} + \gamma^{i+1}_{r,1}(x^i_{r-1} - x_{r,1}) + \gamma^{i+2}_{r,1}\frac{(x^i_{r-1} - x_{r,1})^2}{2!} + \\ &+ \ldots + \gamma^{n-1}_{r,1}\frac{(x^i_{r-1} - x_{r,1})^{n-i-1}}{(n-i-1)!} + \frac{1}{(n-i-1)!}\int_{x_{r,1}}^{x^i_{r-1}}(x^i_{r-1} - t)^{n-i-1}M_{r,0}\,dt \\ z^{(i)}(x^i_r) &= \gamma^i_{r,1} + \gamma^{i+1}_{r,1}(x^i_r - x_{r,1}) + \gamma^{i+2}_{r,1}\frac{(x^i_r - x_{r,1})^2}{2!} + \ldots + \\ &+ \gamma^{n-1}_{r,1}\frac{(x^i_r - x_{r,1})^{n-i-1}}{(n-i-1)!} + \\ &+ \frac{1}{(n-i-1)!}\sum_{l=1}^{n-1}\int_{x_{r,l}}^{x_{r,l+1}}(x^i_r - t)^{n-i-1}M_{r,l}\,dt + \\ &+ \frac{1}{(n-i-1)!}\int_{x_{r,n}}^{x^i_r}(x^i_r - t)^{n-i-1}M_{r,n}\,dt \end{aligned}\right.$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ x^i_0 = x_1,\ x^i_m = x_2)$$

Il primo gruppo di n equazioni permette, fissato che si sia un valore di $M_{r,0}$, di determinare univocamente le $\gamma^i_{r,1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, poichè si ha a che fare ovviamente con una sistema di n equazioni in n incognite (le $\gamma^i_{r,1}$) il cui determinante dei coefficienti è uguale ad 1: ed è importante osservare che le $\gamma^i_{r,1}$ risultano così funzioni continue dei numeri $M_{r,0}$ e $z^{(i)}(x^i_{r-1})$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, le quali tendono a zero al tendere a zero di $M_{r,0}$ e degli $z^{(i)}(x^i_r)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Determinate così le $\gamma^i_{r,1}$ sostituiamole nel secondo gruppo di equazioni di (17); otteniamo un sistema di n equazioni in n incognite (le $M_{r,l}$, $l = 1, 2, \ldots, n$) il cui determinante D dei coefficienti risulta dopo ovvie modifiche

$$\frac{1}{n!(n-1)!\dots 2!}\begin{vmatrix} (x_r^0-x_{r,1})^n & (x_r^0-x_{r,2})^n & \dots & (x_r^0-x_{r,n})^n \\ (x_r^1-x_{r,1})^{n-1} & (x_r^1-x_{r,2})^{n-1} & \dots & (x_r^1-x_{r,n})^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_r^{n-1}-x_{r,1} & x_r^{n-1}-x_{r,2} & & x_r^{n-1}-x_{r,n} \end{vmatrix}$$

e quindi, se si tiene presente che è $x_r^i - x_{r,p} = (n-p+1)\delta + (x_r^i - x_{r,n+1})$ $(i=0, 1, \dots, n-1;\ p=1, 2, \dots, n)$ e $0 \leq x_r^i - x_{r,n+1} \leq \delta_n$ $(i=0, 1, \dots, n-1)$, D risulta, *qualunque* siano i valori x_r^i, purchè appartenenti all'intervallo $(x_{r,n+1}\, x_{r,n+1}+\delta_n)$, in modulo maggiore di $\dfrac{m_1}{n!\,(n-1)!\,\dots\,2!}$ per quanto si è più sopra detto sui determinanti di tipo D'.

Ciò basta per assicurare che si possono determinare univocamente mediante il secondo gruppo di equazioni le incognite $M_{r,1}, \dots, M_{r,n}$, in modo che risultino funzioni dei valori $z^{(i)}(x_r^i)$ e $\gamma_{r,1}^i$ $(i=0, 1, \dots, n-1)$ e quindi di $z^{(i)}(x_r^i)$, $z^{(i)}(x_{r-1}^i)$ e di $M_{r,0}$ $(i=0, 1, \dots, n-1)$ e che tendono a zero al tendere a zero di questi ultimi.

Dopo di che è facile vedere come si possa procedere alla costruzione della funzione $\gamma(x)$ voluta. Si fissi un valore per $M_{1,0}$; risulteranno determinati dal sistema (17) scritto per $r=1$, nel modo ora detto, i valori $\gamma_{1,1}^0$, $\gamma_{1,1}^1$, ..., $\gamma_{1,1}^{n-1}$, $M_{1,1}, M_{1,2}, \dots, M_{1,n}$, i quali saranno in modulo sufficientemente piccoli se tali saranno $M_{1,0}$ e i valori $z^{(i)}(x_1^i)$ $(i=0, 1, \dots, n-1)$; si faccia allora $M_{2,0} = M_{1,n}$ nel sistema (17) scritto per $r=2$; risulteranno così determinati $\gamma_{2,1}^0, \dots, \gamma_{2,1}^{n-1}$, $M_{2,1}, \dots, M_{2,n}$, che saranno in modulo sufficientemente piccoli se tali saranno $M_{1,0}$, $z^i(x_1^i)$ e $z^i(x_2^i)$ $(i=0, 1, \dots, n-1)$. Si prosegua poi analogamente fino a determinare tutti i valori $\gamma_{r,1}^i$ e $M_{r,l}$ $(i=0, 1, \dots, n-1;\ r=1, 2, \dots, m;\ l=0, 1, \dots, n)$.

Risulterà, per quanto si è visto, certamente

$$|M_{r,l}| \leq M$$

se $M_{1,0}$ e gli $z^{(i)}(x_r^i)$ $(i=0, 1, \dots, n-1;\ r=1, 2, \dots, m-1)$ saranno in modulo minori di un certo ε; ma per quanto si è più sopra osservato gli $z^{(i)}(x_r^i)$ saranno tali se $z(x)$ sarà in modulo minore in tutto (x_1, x_2) di un opportuno ρ.

Determinati così i numeri $M_{r,l}$ definiamo in (x_1, x_2) la funzione $\varphi(x)$ ponendo

$$\begin{cases} \varphi(x) = M_{r,n} = M_{r+1,0} \quad \text{per} \quad x_{r,n} \leq x \leq x_{r+1,1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots, m-1) \\ \varphi(x) = M_{r,l} \quad \text{per} \quad x_{r,l} \leq x \leq x_{r,l+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \varphi(x) = M_{m,n} \quad \text{per} \quad x_{m,n} \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

La funzione $\gamma(x)$ è allora ovviamente costruita se poniamo

$$\gamma(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t) dt$$

Osservazione. - È opportuno osservare che risulta

$$\max_{(x_1,x_2)} |\gamma(x)| \leq \frac{M(x_2 - x_1)^n}{n!}.$$

3. - Il minimo d'ordine zero nel campo illimitato. — Dimostreremo ora il seguente

TEOREMA I: *Sia $C_0(y_0(x), x_1 \leq x \leq x_2)$ una curva di classe C^n interna al campo A, tale che*

a) *siano soddisfatti su di essa le Condizioni* I, II'$_N$, III', IV';

b) *esistano un intorno (ρ_1) di ordine zero di C_0* [8]) *tutto costituito di punti di A e una funzione $\Phi(r)$ definita in $(0, +\infty)$, inferiormente limitata e tale che $\Phi(r) : r \to +\infty$ per $r \to +\infty$ in modo che per tutti gli (x, y) del detto intorno*

---

[8]) Per intorno ρ_1 d'ordine q di $C_0 (0 \leq q \leq n$, intendiamo l'insieme dei punti $(x, y, y', \ldots, y^{(q)})$ soddisfacenti alle

$$|y - y_0(x)| \leq \rho_1, \ |y' - y_0'(x)| \leq \rho_1, \ldots, |y^{(q)} - y_0^{(q)}(x)| \leq \rho_1, \ x_1 \leq x \leq x_2$$

e per ogni valore di $y', y'', \dots, y^{(n)}$ *sia*

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq 0 \tag{18}$$

$$f(x, y, \dots y^{(n)}) \geq \Phi(|y^{(n)}|); \tag{19}$$

allora C_0 *è minimamente relativa d'ordine zero nel campo illimitato per* $I(C)$, *vale a dire esiste un numero positivo* ρ *tale che per tutte le curve ordinarie* $C(y(x), x_1 \leq x \leq x_2)$ *soddisfacenti alle* (2) *e alla*

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \rho \quad x_1 \leq x \leq x_2 \tag{20}$$

sia $I(C) \geq I(C)$.

Osserviamo anzitutto che le ipotesi enunciate in a) ci permettono di dire, in virtù dei risultati noti sul minimo *forte*, che esiste un numero $\rho_0 > 0$ tale che, per tutte le curve ordinarie C soddisfacenti alle (2) e alle

$$|y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x)| \leq \rho_0 \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1), \tag{21}$$

sia

$$I(C) \geq I(C_0)$$

Fissiamo dunque questo ρ_0, che supporremo senz' altro minore di 1, e consideriamo una *qualunque* curva ordinaria $C(y(x), x_1 \leq x \leq x_2)$ soddisfacente solamente alle (2) e alla (20).

Dico che *se* ρ *è sufficientemente piccolo è possibile determinare in corrispondenza di* C *un'altra curva ordinaria* C^* *soddisfacente alle* (2) *e alle* (21) *e tale inoltre che sia*

$$I(C) \geq I(C_*).$$

Per dimostrare ciò incominciamo col porre

$$M^* = 1 + \max_{(x_1, x_2)} |y_0^{(n)}(x)|$$

e sia poi H_2 il massimo modulo di $f(x, y, \dots, y^{(n)})$ per

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ |y^{(i)}| \leq |y_0^{(i)}(x_1)| + |y_0^{(i+1)}(x_1)|(x_2 - x_1) + \dots +$$

$$+ \frac{|y_0^{(n-1)}(x_1)|}{(n-i-1)!}(x_2 - x_1)^{n-i-1} + M^* \frac{(x_2 - x_1)^{n-1}}{(n-i)!}$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$|y^{(n)}| \leq M^*.$$

In virtù della (19) esiste un numero non positivo H_1 tale che per ogni (x, y) dell'intorno (ρ_1) di C_0 e per ogni valore di $y', \dots, y^{(n)}$, sia

$$f(x, y, \dots, y^{(n)}) \geq H_1 \tag{22}$$

Prendiamo allora $H > 0$ e così grande che risulti soddisfatta la

$$\frac{H\rho_0}{8} + H_1(x_2 - x_1) - H_2(x_2 - x_1) - \frac{1}{2} > 0. \tag{23}$$

In corrispondenza di H esiste in virtù dell'ipotesi *b*) un numero $H_0 > 0$ tale che per $|y^n| > H_0$ risulti per ogni (x, y) dell'intorno (ρ_1) di C_0 e ogni valore di $y', \dots, y^{(n)}$

$$f > H\,|\,y^{(n)}|\,. \tag{24}$$

Fissati così H e H_0 si prenda δ_0 positivo e soddisfacente alle

1) $HH_0\delta_0 < \frac{1}{2}$

2) $\delta_0 < 1$;

3) $\delta_0^2 + 2n\delta_0^2[(nA + n)2^n]^2 < \frac{\rho_0^2}{16}$ dove A è il più grande dei $\max\limits_{(x_1, x_2)} |\,y_0^{(i)}(x)\,|$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$.

4) diviso (x_1, x_2) in m parti uguali di lunghezza minore di δ_0, mediante i punti $x_1 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < \xi_{m+1} = x_2$ risulti per $\xi_r \leq x \leq \xi_{r+1}$.

$$(x - \xi_r)^2 + (y_0(x) - y_0(\xi_r))^2 + \dots + (y_0^{(n-1)}(x) - y_0^{(n-1)}(\xi_r))^2 < \frac{\rho_0^2}{128n}$$
$$(r = 1, 2, \dots, m) \quad .$$

Determinato così δ_0 e diviso l'intervallo (x_1, x_2), come si è ora visto, in m parti uguali, si prenda M positivo, minore di 1 e tale che sia $\dfrac{M(x_2 - x_1)^n}{n\,!} < \rho_1$ e si ponga $z(x) = y(x) - y_0(x)$; in corrispondenza all'M così fissato e a $z(x)$ si faccia la costruzione della funzione $\gamma(x)$ del n. 2; essa è possibile non appena ρ sia sufficientemente piccolo; prendiamo ρ in modo anche che sia minore di ρ_0 e di ρ_1 e che detti al solito x_r^i $(i = 0, 1, \dots, n-1$;

$r = 1, 2, \ldots, m-1$) i punti di cui alla costruzione del n. 2, risultino verificati le

$$(25) \qquad | z^{(i)}(x_r^i) | = | y^{(i)}(x_r^i) - y_0^{(i)}(x_r^i) | < \frac{\rho_0}{2\sqrt{32n}}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1, \; r = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Determinato così anche il numero ρ veniamo senz' altro alla dimostrazione del teorema.

Anzitutto poniamo $y_\gamma(x) = y_0(x) + \gamma(x)$; otteniamo così una funzione di classe D^n in (x_1, x_2) e ivi soddisfacente alla

$$(26) \qquad | y_\gamma^{(n)}(x) | \leq \max_{(x_1 x_2)} | y_0^{(n)}(x) | + M < M^*$$

e alle

$$(27) \qquad y_\gamma^{(i)}(x_r^i) = y^{(i)}(x_r^i)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1; \; r = 0, 1, \ldots, m; \; x_0^i = x_1, \; x_m^i = x_2)$$

Inoltre, in virtù dell' *osservazione* finale del n. 2 e di come si è preso M, la curva C_γ di equazione $y = y_\gamma(x)$ appartiene all' intorno (ρ_1) di ordine zero di C_0.

Dopo di che consideriamo la classe K di tutte le curve ordinarie $\overline{C}$ $(\overline{y}(x), \; x_1 \leq x \leq x_2)$ appartenenti all' intorno (ρ_1) di ordine zero di C_0 e soddisfacenti alle

$$(28) \qquad \overline{y}^{(i)}(x_r^i) = y^{(i)}(x_r^i)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1; \; r = 0, 1, \ldots, m; \; x_0^i = x_1, \; x_m^i = x_2)$$

Osserviamo che a K appartengono sia la curva C che quella C_γ. L' ipotesi *b*) e le (28) ci assicurano, in virtù di un teorema di S. CINQUINI [5; n. 2] l'esistenza di almeno una curva minimante assoluta per $I(C)$ nella classe K; sia $C_*(y_*(x), \; x_1 \leq x \leq x_2)$ una tale curva; per essa è in particolare vera la

$$I(C) \geq I(C_*).$$

Vogliamo ora dimostrare che essa soddisfa anche alle (21). Basterà evidentemente, in virtù della condizione 4) imposta a δ_0, dimostrare che per ogni x di $(\xi_r, \xi_{r+1})(r = 1, \ldots, m)$ è soddisfatta la

$$\Delta_r(x) = (x-\xi_r)^2 + (y_*(x) - y_0(\xi_r))^2 + \dots + (y_*^{(n-1)}(x) - \\ - y_0^{(n-1)}(\xi_r))^2 \le \frac{\rho_0^2}{4}.$$

Supponiamo per assurdo che ci sia un r e un punto x^* di (ξ_r, ξ_{r+1}), in cui è

$$\Delta_r(x^*) > \frac{\rho_0^2}{4}. \tag{29}$$

Sia allora (a_r, a_{r+1}) il massimo intervallo di (ξ_r, ξ_{r+1}) contenente x^*, in cui è verificata la $\Delta_r(x) > \frac{\rho_0^2}{32n}$; (a_r, a_{r+1}) esiste certamente in virtù della (29).

Si può dimostrare facilmente che il massimo modulo di $y_*^{(n-1)}(x) - y_*^{(n-1)}(a_r)$ è in (a_r, a_{r+1}) maggiore di $\rho_0/8$; supponiamo che ciò non sia; tre casi sono allora possibili: o a_r è interno a (ξ_r, ξ_{r+1}), oppure lo è a_{r+1}, oppure risulta $a_r = \xi_r$ e $a_{r+1} = \xi_{r+1}$. Nel primo caso si avrà per ogni x di (a_r, a_{r+1})

$$\Delta_2(x) \le (x-\xi_r)^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} [y_*^{(i)}(a_r) - y_0^{(i)}(\xi_r)]^2 + 2\sum_{i=0}^{n-2} [y_*^{(i)}(x) - \\ - y_*^{(i)}(a_r)]^2 + 2[y_*^{(n-1)}(x) - y_*^{(n-1)}(a_r)]^2;$$

ma per $i = 0, 1, \dots, n-2$ è

$$y_*^{(i)}(x) - y_*^{(i)}(a_r) = y_*^{(i+1)}(a_r) + y_*^{(i+2)}(a_r)\frac{(x-a_r)^2}{2} + \dots + \\ + y_*^{(n-1)}(a_r)\frac{(x-a_r)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} + \frac{(x-a_r)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}[y_*^{(n-1)}(\tilde{a}_{r,i}) - y_*^{(n-1)}(a_r)]$$

dove $\tilde{a}_{r,i}$ è compreso tra a_r e a_{r+1}, e, quindi, poichè è $\delta_0 < 1$:

$$|y_*^{(i)}(x) - y_*^{(i)}(a_r)| \le \delta_0 \sum_{s=1}^{n-1} |y_*^{(s)}(a_r)| + \delta_0 \max |y_*^{(n-1)}(x) - \\ - y_*^{(n-1)}(a_r)| \le \delta_0 [\sum_{s=1}^{n-1} |y_*^{(s)}(a_r) - y_0^{(s)}(\xi_r)| + \sum_{s=1}^{n-1} |y_0^{(s)}(\xi_r)|] + \\ + \delta_0 \frac{\rho_0}{8} \le \delta_0 \left[\frac{(n-1)\rho_0}{\sqrt{32n}} + \sum_{s-1}^{n-1} \max |y_0^{(s)}(x)| + \frac{\rho_0}{8}\right] < \delta_0(n + nA).$$

Perciò

$$\Delta_r(x) < \delta_0^2 + \frac{2n\rho_0^2}{32n} + 2n\delta_0^2[n + nA]^2 + \frac{2\rho_0^2}{64}$$

da cui, per la condizione 3) imposta a δ_0, si ha

$$\Delta_r(x) < \frac{\rho_0^2}{4}$$

in contraddizione con la (29).

In modo perfettamente analogo si ragiona se è a_{r+1} interno a (ξ_r, ξ_{r+1}); basta sostituire nel ragionamento precedente a_r con a_{r+1} e tenere presente che è

$$| y_*^{(n-1)}(x) - y_*^{(n-1)}(a_{r+1}) | \leq | y_*^{(n-1)}(x) - y_*^{(n-1)}(a_r) | +$$
$$+ | y_*^{(n-1)}(a_r) - y_*^{(n-1)}(a_{r+1}) | .$$

Nel caso in cui $a_r = \xi_r$ e $a_{r+1} = \xi_{r+1}$, si osservi anzitutto che allora in (a_r, a_{r+1}) cadono i punti x_r^i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ in cui sono verificate, per le (28) e le (25) o le (2), le

$$(30) \qquad | y_*^{(i)}(x_r^i) - y_0^{(i)}(x_r^i) | < \frac{\rho_0}{2\sqrt{32n}} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Si avrà allora

$$\Delta_r(x) \leq (x - \xi_r)^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} [y_*^{(i)}(x_r^i) - y_0^{(i)}(\xi_r)]^2 + 2\sum_{i=0}^{n-2} [y_*^{(i)}(x) -$$
$$- y_*^{(i)}(x_r^i)]^2 + 2[y_*^{(n-1)}(x) - y_*^{(n-1)}(x_r^{n-1})]^2 ;$$

e per le (30) e la condizione 4) imposta a δ_0:

$$| y_*^{(i)}(x_r^i) - y_0^{(i)}(\xi_r) | \leq | y_*^{(i)}(x_r^i) - y_0^{(i)}(x_r^i) | + | y_0^{(i)}(x_r^i) - y_0^{(i)}(\xi_r) | <$$
$$< \frac{\rho_0}{2\sqrt{32n}} + \frac{\rho_0}{2\sqrt{32n}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{32n}}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1) .$$

D' altra parte è pure per $i = 0, 1, \dots, n-2$

$$y_*^{(i)}(x) - y_*^{(i)}(x_r^i) = (x - x_r^i)\{[y_*^{(i+1)}(x_r^i) - y_*^{(i+1)}(x_r^{i+1})] + y_*^{(i+1)}(x_r^{(i+1)})\} + \frac{(x - x_r^i)^2}{2!}\{[y_*^{(i+2)}(x_r^i) - y_*^{(i+2)}(x_r^{i+2})] + y_*^{(i+2)}(x_r^{(i+2)})\} + \dots + \frac{x - x_r^i)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\{y_*^{(n-1)}(\tilde{a}_{r,i}) - y_*^{(n-1)}(x_r^{n-1})] + y_*^{(n-1)}(x_r^{n-1})\}$$

con $\xi_r < \tilde{a}_{r,i} < \xi_{r+1}$; e perciò in virtù anche delle (30) e della $\rho_0 < 1$

$$(31) \qquad |y_*^{(i)}(x) - y_*^{(i)}(x_r^i)| \leq \delta_0[\sum_{s=1}^{n-1} |y_*^{(s)}(x_r^s)| + |y_*^{(i+1)}(x_r^i) - y_*^{(i+1)}(x_r^{i+1})| + |y_*^{(i+2)}(x_r^i) - y_*^{(i+2)}(x_r^{i+2})| + \dots + |y_*^{(n-1)}(a_{r,i}) - y_*^{(n-1)}(x_r^{n-1})|] \leq \delta_0[n + nA + |y_*^{(i+1)}(x_r^i) - y_*^{(i+1)}(x_r^{i+1})| + |y_*^{(i+2)}(x_r^i) - y_*^{(i+2)}(x_r^{i+2})| + \dots + |y_*^{(n-1)}(\tilde{a}_{r,i}) - y_*^{(n-1)}(x_r^{n-1})|]$$

Ma è pure:

$$|y_*^{(n-1)}(x) - y_*^{(n-1)}(x_r^{n-1})| \leq |y_*^{(n-1)}(x) - y_*^{(n-1)}(\xi_r)| + |y_*^{(n-1)}(\xi_r) - y_*^{(n-1)}(x_r^{n-1})| \leq \frac{\rho_0}{4} < n + nA$$

e quindi le (31), scritte successivamente per $i = n-2, n-3, \dots, 0$, danno

$$|y_*^{(n-2)}(x) - y_*^{(n-2)}(x_r^{n-2})| < \delta_0[n + nA + nA + n] = \delta_0 2(n + nA)$$

$$|y_*^{(n-3)}(x) - y_*^{(n-3)}(x_r^{n-3})| < \delta_0[n + nA + 2(n + nA) + n + nA] = \delta_0 2^2(n + nA)$$

. . . .

$$|y_*(x) - y_*(x_r^0)| < \delta_0 2^{n-1}(n + nA).$$

Sicchè infine sarà:

$$\Delta_r(x) < \delta_0^2 + \frac{2n\rho_0^2}{32n} + 2n\delta_0^2[2^n(n + nA)]^2 + \frac{2\rho_0^2}{16} < \frac{\rho_0^2}{4}$$

in contraddizione con la (29).

Dunque il massimo di $|y_*^{(n-1)}(x) - y_*^{(n-1)}(a_r)|$ in (a_r, a_{r+1}) è $> \rho_0/8$.

E allora tenendo presenti le (22) e (24) risulta

$$I(C_*) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_*(x), \ldots, y_*^{(n)}(x))dx \geq H_1(x_2 - x_1) +$$
$$+ H \int_{a_r}^{a_{r+1}} |y_*^{(n)}(x)|\, dx - HH_0(a_{r+1} - a_r)$$

e poichè l'oscillazione di $y_*^{(n-1)}(x)$ in (a_r, a_{r+1}) è almeno $\rho_0/8$ si ha

$$I(C_*) \geq H_1(x_2 - x_1) + \frac{H\rho_0}{8} - HH_0\delta_0$$

vale a dire per la (23)

$$I(C_*) > H_2(x_2 - x_1)\,.$$

D' altra parte è pure $I(C_\gamma) \leq H_2(x_2 - x_1)$ e poichè C_γ appartiene a K si verrebbe all'assurdo $I(C_*) > I(C_\gamma)$.

Resta dunque dimostrato che pur di prendere ρ sufficientemente piccolo è possibile far corrispondere ad ogni C soddisfacente alle (2) e alle (20) un' altra curva ordinaria C_* soddisfacente alle (2) e alle (21) e alla $I(C) \geq I(C_*)$.

Ma poichè per C_* risulta in virtù dell' ipotesi a) $I(C_*) \geq I(C_0)$ ne segue che è pure $I(C) \geq I(C_0)$.

OSSERVAZIONE I: L' ipotesi *b*) può sostituirsi con la seguente, che le è equivalente [9]:

[9]) Si veda [5; n. 8].

b') esistano un intorno (ρ_1) di ordine zero di C_0 e numero H_1 tali che per ogni (x, y) di detto intorno e per ogni valore di $y', y'', \dots, y^n$ sia $f(x, y, \dots, y^{(n)}) \geq H_1$; $f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, \dots, y^{(n)}) \geq 0$

$$\lim_{|y^n| \to \infty} \left| \frac{f}{y^{(n)}} \right| = \infty \text{ uniformemente rispetto a } (x, y, y' \dots, y^{(n-1)}).$$

OSSERVAZIONE II: L'ipotesi b) del teorema I può essere sostituita con diverse altre e più generali ipotesi, come ora vedremo.

Si osservi infatti che evidentemente ci si può limitare nella dimostrazione alle curve ordinarie C che soddisfano alla disuguaglianza

$$I(C) \leq I(C_0) + 1 \tag{32}$$

Orbene, supponiamo che, in certe ipotesi sulla f, si possa dimostrare che per tutte le curve C soddisfacenti alla (32) e alle (2) le funzioni $y(x)$ e le loro derivate fino all'ordine $n-1$ siano equilimitate (e precisamente minori in modulo di un certo B); risulta allora dalla dimostrazione ora data del teorema I che basterà enunciare la condizione b) solamente per (x, y) nell'intorno (ρ_1) di C_0 e per $|y'| \leq B$, $|y''| \leq B$, ..., $|y^{(n-1)}| \leq B$.

Ora è noto che nelle ricerche sul problema del minimo *assoluto* in campi illimitati è stato appunto incontrato e studiato ampiamente, sopratutto da S. CINQUINI [10]), il problema di dare condizioni sulla f perchè dalla (32) e dalle (2) seguano l'equilimitatezza delle $y(x)$ e delle loro derivate fino all'ordine $n-1$; una di queste condizioni è anche la b) del Teorema I [5, n. 2]; ma altre se ne possono dare, come risulta dai lavori citati in [10]); ognuna di esse può essere utilmente adoperata per ottenere altre condizioni sufficienti per il minimo relativo di ordine zero, secondo l'idea che ci ha precedentemente guidato.

4. - I risultati di E. E. Levi e alcune estensioni. — Si è già detto che, seguendo il metodo da Lui ideato, il LEVI ha dato condizioni sufficienti per il minimo d'ordine $n-2$ nel

---

[10]) [3], [5], [6], [7], [9].

campo limitato; precisamente il risultato del Levi è il seguente [11, n. 6, cap. II].

Ammessa sulla f l'ipotesi che sia di classe C^5 per (x, y) in A e $y', y'', \dots, y^{(n)}$ qualunque, se $C_0(y_0(x), x_1 \leq x \leq x_2)$ è una curva di classe C^n, interna al campo A, tale che:

a) siano verificate su di essa le condizioni I e IV';

b) fissato un numero $L > 0$, per

$$| y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}(x) | \leq L$$

$$| y^{(n)} - y_0^{(n)}(x) | \leq A$$

A essendo un numero che dipende in modo opportuno [11]) da C_0 e da L, siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1) $$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x), y^{(n-1)}, y^{(n)}) > 0$$
$$x_1 \leq x \leq x_2$$

2) esista un numero $N > 0$ tale che per

$$| y - y_0(x) | \leq N, \ | y' - y_0'(x) | \leq N, \ \dots, \ | y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}(x) | \leq N,$$
$$x_1 \leq x \leq x_2$$

e per $Y^{(n)} \neq y^{(n)}$ sia

$$\mathcal{E}(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}; Y^{(n)}) > 0,$$

allora C_0 è minimante relativa d'ordine $n - 2$ nel campo limitato, vale a dire esiste un $\rho > 0$ tale che per tutte le curve ordinarie C soddisfacenti alle (2) e alle

$$|y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x)| \leq \rho \ \ (i = 0, 1, \dots, n-1), \ |y^{(n-1)}(x) - y_0^{(n-1)}(x)| \leq L$$

sia $I(C) \geq I(C_0)$.

La dimostrazione del Levi è condotta considerando solo curve C di classe D^n; ma essa vale senz'altro anche per curve C ordinarie, pur di adoperare l'integrazione secondo Lebesgue

---

11) Precisamente A dipende da L e dal sistema di soluzioni associate dell'equazione di Jacobi a Wronskiano non nullo in (x_1, x_2) di cui è assicurata l'esistenza dalla Condizione IV' [11 n. 2 e 6 cap. II].

e modificare certi punti in modo analogo a quanto ha fatto il REID per i problemi di BOLZA [14] (si tratta in sostanza di sostituire ai lemmi del cap. I e di [11] le disuguaglianze del n. 5 di [14]).

È possibile sfruttare questo risultato anche per il minimo d'ordine zero, mediante un'osservazione che si è in sostanza già fatta alla fine del n. precedente: poichè ci si può limitare a considerare le curve C soddisfacenti alle (2) e alla (32), ogni condizione, che assicuri l'equilimitatezza delle derivate $(n-1)$-esime delle $y(x)$, ci permette, in virtù di una osservazione del LEVI [12]), di riportarci al caso da Lui trattato. Si ha così il

TEOREMA II: *Se f è di classe C^5 almeno e C_0 interna ad A ed è tale che:*

a) *sono verificate su di essa le Condizioni I e IV';*

b) *risulta, per ogni $y^{(n-1)}$ e $y^{(n)}$ e per $x_1 \leq x \leq x_2$:*

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x), y^{(n-1)}, y^{(n)}) > 0$$

c) *esiste un $N > 0$ tale che per*

$$| y - y_0(x) | \leq N, \dots, | y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}(x) | \leq N \quad x_1 \leq x \leq x_2,$$

per ogni valore di $y^{(n-1)}$ e $y^{(n)}$ e per $Y^{(n)} \neq y^{(n)}$ sia

$$\mathcal{E}(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}; Y^{(n)}) > 0$$

d) *per tutte le curve ordinarie C soddisfacenti alle* (2) *e alla* (32) *e appartenenti ad un opportuno intorno* (ρ_1) *di ordine zero di C_0 le derivate $(n-1)$-esime delle $y(x)$ sono equilimitate;*

allora C_0 è minimante di ordine zero nel campo illimitato.

Per le ipotesi sulla funzione f, che assicurano il verificarsi della condizione d), rimando senz'altro ai lavori citati in ([10]); si osservi naturalmente che basta che esse siano verificate in un certo intorno (ρ_1) di ordine zero della curva C_0.

Potremo anche aggiungere che nel nostro caso, date le con-

---

[12]) v. n. 1 cap. II di [11], in particolare il lemma XII.

dizioni ai limiti che le curve C devono verificare, precisamente le (2), se ne possono trovare di nuove; per es.

d$_1$) *per tutti gli* (x, y) *di un certo intorno* (ρ_1) *di ordine zero di* C_0 *e per ogni valore di* $y', y'', \dots, y^{(n)}$ *sia*

$$f > A_1|y^{(n)}| + B_1 + \varphi_x(x, y, \dots, y^{(n-1)}) + y'\varphi_y(x, y, \dots, y^{(n-1)}) + \\ + \dots + y^{(n)}\varphi_{y^{(n-1)}}(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

essendo A_1 *e* B_1 *costanti di cui* $A_1 > 0$ *e* $\varphi_x, \varphi_y, \dots, \varphi_{y^{n-1}}$ *le derivate parziali di una funzione* $\varphi(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ *differenziabile.*

Ed infatti si avrebbe per ogni curva $C\,(y(x),\ x_1 \leq x \leq x_2)$ soddisfacente alle (2) e (32)

$$|y^{(n-1)}(x)| \leq |y^{(n-1)}(x_1)| + \int_{x_1}^{x_2} |y^{(n)}(x)|\,dx \leq |y_0^{(n-1)}(x_1)| + \\ + \frac{1}{A_1}\Big\{ I(C_0) + 1 + |B_1|(x_2 - x_1) + [\varphi(x_1, y_0(x_1), \dots, y_0^{(n-1)}(x_1)) - \\ - \varphi(x_2, y_0(x_2), \dots, y_0^{(n-1)}(x_2))] \Big\}.$$

5. - Osservazioni sulla semicontinuità e sull'esistenza del minimo assoluto di $I(C)$. — L'impostazione del presente lavoro suggerisce alcune osservazioni ulteriori.

La prima riguarda le *condizioni sufficienti per la semicontinuità inferiore di* $I(C)$ su una curva C_0. Ovviamente come per il minimo relativo, si potrà parlare di *semicontinuità inferiore di ordine* q *nel campo illimitato o limitato*; si dirà precisamente che $I(C)$ è semicontinuo inferiormente di ordine q nel campo illimitato sulla curva C_0 se in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho > 0$ tale che per tutte le curve C soddisfacenti alle (5) risulta

$$I(C) \geq I(C_0) - \varepsilon.$$

Analogamente si definisce la semicontinuità nel campo limitato.

Solitamente viene considerata la semicontinuità di ordine $n - 1$ nel campo illimitato e sono note le classiche condizioni sufficienti di WEIERSTRASS e di LEGENDRE ([3], [4], [15; vol. I pag. 407 e seg.]).

Orbene la costruzione della curva C fatta nel n. 3 ci permette senz'altro di enunciare [13]) un *criterio sufficiente per la semicontinuità di ordine zero nel campo illimitato su una curva C_0 di classe C^n: precisamente esso si ottiene aggiungendo alle suddette condizioni di* WEIERSTRASS *e* LEGENDRE *per la semicontinuità di ordine $n-1$, la condizione* b) *del Teorema I* n. 3 (o una delle altre citate nelle Osservazioni I e II dello stesso numero).

Una seconda osservazione riguarda il problema dell'esistenza del minimo *assoluto* per $I(C)$. L'impostazione del presente lavoro suggerisce naturalmente la domanda: *che può dare l'introduzione della metrica lagrangiana d'ordine q* (con $0 \leq q \leq n$) *nel problema dell'esistenza del minimo assoluto di $I(C)$, volendo ovviamente sempre considerare classi di curve* C *ordinarie?* E la domanda è ben giustificata, essendo in ogni problema di minimo *assoluto* di somma importanza la scelta della metrica più opportuna [14]).

I risultati sul minimo *assoluto* finora noti, dovuti soprattutto a S. CINQUINI [15]), sono stati ottenuti, adoperando la metrica lagrangiana d'ordine $n-1$; questi criteri di esistenza sono stati enunciati in classi K di curve ordinarie che, secondo una nomenclatura del TONELLI, son dette *complete* (di ordine $n-1$), vale a dire per cui ogni *curva di accumulazione* (di curve di K), nella metrica lagrangiana d'ordine $n-1$, che sia anche ordinaria, appartenga alla classe stessa.

Introduciamo invece la metrica lagrangiana d'ordine q

---

[13]) La dimostrazione è analoga a quella del n. 1: la costruzione della C_* permette di riportare il problema al caso classico della metrica d'ordine $n-1$. Quanto alla costruzione della C_* si osservi che in questo caso le (28) andranno scritte per $i=0, 1, \dots, n-1$, $r=1, \dots, m-1$, mancando le condizioni (2) e che una ovvia modifica andrà anche fatta nella costruzione della $y_\gamma^{(x)}$ per la stessa ragione; ma il procedimento è sempre in sostanza quello dei n. 2 e 3.

[14]) Si vedano per questa osservazione le due conferenze di M. PICONE [13].

[15]) v. [3], [5], [6], [7], [9].

qualunque; evidentemente potremo allora parlare di *curve di accumulazione d' ordine q* e di *classi complete d' ordine q*, con ovvio significato dei termini [16]). E risulterà così ampliato l' insieme delle classi complete, se è $q < n-1$, potendo ovviamente una classe essere completa d' ordine q senza esserlo d' ordine $n-1$. Ciò può far pensare che le ipotesi fatte sulla funzione $f(x, y, \ldots, y^{(n)})$ nei suddetti criteri di esistenza non siano più sufficienti per l' esistenza del minimo *assoluto* in una classe completa d' ordine q. Orbene si vede immediatamente che esse lo sono ancora, *qualunque* sia q, potendosi le stesse dimostrazioni ripetere esattamente anche in questo caso.

È poi possibile fare un' altra osservazione significativa: nella nota [7] S. CINQUINI ha illustrato, mediante alcuni opportuni esempi, il significato delle varie ipotesi che intervengono nei succitati criteri di esistenza del minimo assoluto, facendo in sostanza vedere come ben difficilmente se ne possano trovare altre *sostanzialmente diverse e più generali*. Orbene *quelle stesse considerazioni si possono fare anche se si vuol studiare l'esistenza del minimo assoluto in classi complete d'ordine* $< n-1$; basta osservare che gli esempi del CINQUINI si riferiscono sempre a classi di curve che sono complete non solo di ordine $n-1$ ma addirittura di ordine zero.

BIBLIOGRAFIA

1. G. A. BLISS, *Lectures on the Calculus of Variation*. Chicago, 1946.
2. O. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Leipzig, 1909.
3. S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni d' ordine n* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2), vol. V, 1936, pp. 169-190).
4. — — *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n* (Ann. di Mat. pura e appl. (4), t .XV. 1936-37, pp. 77-86).

---

16) Si osservi, per evitare equivoci, che nel caso abituale, $q = n-1$, la nostra nomenclatura differisce leggermente da quella usata da S. CINQUINI (v. [3, n. 1].

5. — — *Nuovi teoremi di esistenza dell' estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2), vol. VI, 1937, pp. 191-209).

6. — — *Un teorema di esistenza dell' estremo in campi illimitati* (Rend. Ist. Lombardo Scienze, vol. LXX, 1938, pp. 211-218).

7. — — *Sopra l' esistenza dell' estremo in campi illimitati* (Rend. Acc. Lincei (2), vol. IV, 1948, pp. 675-682).

8. — — *Sopra l' equazione di Eulero dei problemi variazionali di ordine n* (Ann. Mat. pura e appl (4), vol. XVI, 1937, pp. 61-100).

9. S. FAEDO, *Su un teorema di esistenza del Calcolo delle Variazioni e una proposizione generale del Calcolo Funzionale* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2), vol. XII, 1943, pp. 119-134).

10. J. HADAMARD, *Leçon sur le Calcul des Variations*. Paris, 1910.

11. E. E. LEVI, *Sui criteri sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle Variazioni* (Ann. Mat. pura e appl. (3), t. XXI, 1913, pp. 173-219).

12. E. MAGENES, *Condizioni sufficienti per il minimo relativo in certi problemi di Mayer* (Rend. Sem. Mat. Padova, val. XX, 1951, pp. 78-98).

13. M. PICONE, *Due conferenze sui fondamenti del « Calcolo delle Variazioni »* (Giornale di Mat. di Battaglini, vol. LXXX, 1950-51, pp. 50-79).

14. W. T. REID, *Sufficient Conditions by Expansion Methods for the Problem of Bolza in the Calculus of Variations* (Annals of Math., vol. XXXVIII, 1937, pp. 662-678).

15. L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna, 1921-23.