

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO BALDASSARRI

I sistemi algebrici di spazi e l'insieme dei loro spazi totali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 171-197

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__171_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

I SISTEMI ALGEBRICI DI SPAZI E L'INSIEME DEI LORO SPAZI TOTALI

Memoria () di MARIO BALDASSARRI (a Padova)*

La nozione di spazio totale S_t per un complesso lineare φ_{h+1} di spazi S_h di un dato spazio S_r compare, sin dal secolo scorso, incidentalmente, in numerosi lavori: l'unico fra questi in cui però si considerino proprietà generali dell'insieme Σ di quegli spazi S_t , e si ponga, fra l'altro, la questione fondamentale della sua esistenza, almeno nel caso $h=1$, è la memoria [3] di S. KANTOR, dove si trova la condizione $r > 2t$, per l'esistenza di spazi S_t totali per un complesso di rette.

L'argomento fu ripreso da U. MORIN [4] e da A. COMESATTI [2] come ricerca sussidiaria ad un problema relativo alle varietà abeliane. Benchè l'interesse precipuo dei due Autori sia rivolto ai complessi lineari di rette, compaiono nelle loro ricerche importanti proprietà generali dell'insieme Σ . Nel primo lavoro si studiano le condizioni d'esistenza di Σ , e si dimostra, nel caso $h=1$, il teorema fondamentale ¹⁾ che caratterizza Σ come intersezione di $\binom{r+1}{t-h}$ complessi lineari κ_{t+1} di spazi S_t dello S_r . Nel secondo s'introduce la feconda analogia fra i complessi lineari e le forme differenziali esterne di CARTAN, che conduce l'Autore alle nozioni di prodotto fra complessi e di complessi in involuzione, mediante le quali giunge agilmente a dimostrare una parte del teorema suddetto per h qualsiasi. Entrambi questi Autori risolvono inoltre la que-

*) Pervenuta in Redazione il 3 giugno 1952.

¹⁾ Indicheremo questo teorema, per comodità di riferimento, con tale aggettivo.

stione dell'indipendenza o no di quei complessi α_{t+1} nel caso $h = 1$.

Più tardi M. SELABASSO, allieva di A. COMESSATTI, studiando tutti casi di prodotto fra complessi lineari in uno spazio di dimensione $r \leq 5$, trovava interessanti e dirette caratterizzazioni geometriche di Σ [7].

Infine B. SEGRE ha ripreso ex-novo l'argomento nel recente trattato sulle forme differenziali esterne [5], dandone una trattazione unitaria e rigorosa, in cui s'inserisce con singolare eleganza la dimostrazione del teorema fondamentale senza più alcuna restrizione.

Dopo queste ricerche restano aperti i due importanti problemi:

A) *Decidere se gli $\binom{r+1}{t-h}$ complessi α_{t+1} che danno per intersezione Σ siano o no indipendenti,*

B) *Trovare una condizione necessaria e sufficiente perchè esistano spazi totali di dimensione t , e determinare la dimensione δ del loro insieme.*

Si noterà che il problema (B) non è, almeno immediatamente, in sottordine al problema (A), perchè, anche se si conoscesse la soluzione di quest'ultimo, si avrebbe solo una valutazione per difetto di δ^2 .

* * *

Passiamo ora a riassumere rapidamente il contenuto delle tre parti di questo lavoro.

Nella prima si tratta il problema (A) nel caso che si considerino gli spazi totali S_{h+1} d'un φ_{h+1} ; caso che, sebbene particolare, riveste un certo interesse per la semplice risposta che consente e per le osservazioni che suggerisce. Il risultato principale si riassume nel teorema:

« *Se un complesso φ_{h+1} di S_h dello S_r , possiede τ iperpiani totali, l'insieme Σ è intersezione di $r + 1 - \tau$ complessi α_{t+1}*

²⁾ Infatti può essere, a priori, che l'intersezione con la grassmanniana $G(t, r)$ dello spazio in cui si segano gli iperpiani immagini dei α_{t+1} , risulti sovrabbondante.

indipendenti fra loro. L'insieme Σ resta, ciononostante, determinato come intersezione di soli $h + 2 - \tau$ fra tali complessi α_{t+1} , di guisa che tutti gli S_t comuni a questi complessi, stanno ancora in altri $r - h - 1$ complessi indipendenti dai primi.

La ricerca, condotta con diretti metodi geometrici, fra i quali particolarmente utile la nozione di complessi in involuzione qual'è in [2], forma anche una specie d'introduzione alla parte II^a. Si troverà inoltre completata la dimostrazione del teorema fondamentale con i metodi di [2], nonchè un teorema di carattere generale sulla determinazione d'un complesso (n. 5)³).

La seconda parte è dedicata al problema (B), ma generalizzato al caso che si consideri anzichè un complesso, una varietà L , che sia *intersezione d'un certo numero q di complessi lineari $\varphi_{h+1}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$)*. Esso viene completamente risolto per valori qualsiasi di h, r, t e q , dal seguente teorema:

« *Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà L di spazi S_h dello S_r , ammetta spazi totali di dimensione t ($t > h$), è — se essa è intersezione di $q > 1$ complessi lineari indipendenti — che l'espressione:*

$$(r - t)(t + 1) - q \binom{t + 1}{h + 1},$$

risulti non negativa. Se L si riduce ad un complesso ($q = 1$), ciò è ancor vero eccetto quando esso sia:

- a) *un complesso di rette, se $r > 2t$,*
- b) *un complesso di spazi S_h , se $r = h + 2$, $t = h + 1$, ed h è dispari,*
- c) *un complesso di piani dello spazio S_6 , se $t = 4$.*

Inoltre, se la varietà è generica nella sua famiglia, il sistema degli spazi S_t è una varietà algebrica irriducibile, la cui dimensione è appunto fornita dall'espressione precedente ».

³) Questo teorema in effetti ha carattere istituzionale, e riesce utile, oltrechè nel nostro caso, anche in svariate applicazioni.

Da ciò si può far seguire l'altro fatto notevole:

« *L'insieme degli spazi totali S_t d'una varietà L di spazi S_h dello S_r , resta determinato come intersezione di soli $\binom{t+1}{h+1}$ complessi lineari κ_{t+1} fra quelli considerati nel teorema fondamentale ».*

Si ottiene così, ed in generale, quella riduzione del numero di complessi κ_{t+1} occorrenti per individuare l'insieme Σ , già vista nel caso particolare della prima parte, ma resta impregiudicata la questione (A), ivi, invece, direttamente risolta se $t = h + 1$. In questa parte si fa uso ripetuto del principio del computo delle costanti in una forma analoga a quella esposta da F. SEVERI nella memoria [6].

Una caratteristica assai notevole del procedimento impiegato nella seconda parte è che esso non si esaurisce nel caso ivi trattato, ma può anzi, e variamente, esser esteso sia passando a tipi più elevati di varietà di spazi, che ampliando l'oggetto della ricerca occupandosi anziché degli spazi totali, dei cosiddetti nuclei (cfr. [4]); la terza parte si occupa appunto di una siffatta estensione qualora si consideri un complesso algebrico d'ordine $n > 1$. Si dimostra a questo proposito il teorema:

« *Condizione necessaria e sufficiente perchè un complesso algebrico K , irriducibile e d'ordine n , di spazi S_h dello S_r , ammetta spazi totali di dimensione $t(t > h)$, è che l'espressione*

$$(r - t)(t + 1) - \binom{R_1 + n}{n}, \left[R_1 = \binom{t + 1}{h + 1} - 1 \right],$$

risulti non negativa. Inoltre, se il complesso è generico nella sua famiglia, il sistema Σ dei suoi spazi totali è una varietà algebrica irriducibile, la cui dimensione è appunto fornita dall'espressione precedente.

Questo teorema che trova il suo interesse nel fatto che informa dell'esistenza di alcune fra le sottovarietà più semplici contenute in un complesso algebrico, può ulteriormente estendersi, senza difficoltà, alle totalità di spazi intersezioni complete di complessi algebrici.

I.

1. - Sia φ_{h+1} un complesso lineare di spazi S_h dello S_r , e sia Σ l'insieme dei suoi spazi totali S_t ($t > h$), cioè di quegli S_t che hanno tutti i loro S_h appartenenti al complesso φ_{h+1} . Se ψ_{t-h} è un complesso arbitrario di spazi S_{t-h-1} si sa — ed è del resto subito visto ⁵⁾ — che il complesso prodotto $\psi_{t-h} \cdot \varphi_{h+1} = \kappa_{t+1}$ contiene Σ ; anzi si può vedere ⁶⁾ che Σ è precisamente l'intersezione di tutti i κ_{t+1} ottenuti al variare di ψ_{t-h} entro la totalità dei complessi lineari di spazi S_{t-h-1} . Ciò può esser dimostrato usando della nozione di complessi in involuzione ⁷⁾, nel modo seguente.

In uno S_t i complessi φ_{h+1} e ψ_{t-h} inducono due complessi $\overline{\varphi}_{h+1}$ e $\overline{\psi}_{t-h}$, i quali sono in involuzione quando S_t appartiene a κ_{t+1} , e viceversa ⁸⁾; quindi, se S_t sta in tutti i κ_{t+1} , $\overline{\varphi}_{h+1}$ dovrà essere in involuzione con ogni $\overline{\psi}_{t-h}$ di S_t , in quanto, essendo ψ_{t-h} generico in S_r , lo è anche $\overline{\psi}_{t-h}$ in S_r . Si tratta di dimostrare che, di conseguenza, $\overline{\varphi}_{h+1}$ è *identico* ⁹⁾, e che quindi lo S_t appartiene a Σ .

Si assuma perciò in S_t come $\overline{\psi}_{t-h}$ un complesso speciale, cioè l'insieme S di tutti gli S_{t-h-1} appoggiati ad uno S_h . La condizione affinché $\overline{\varphi}_{h+1}$ e $\overline{\psi}_{t-h}$ siano involutori è allora che S appartenga a $\overline{\varphi}_{h+1}$ ¹⁰⁾; ma S è arbitrario in S_t e dunque $\overline{\varphi}_{h+1}$ deve contenere tutti gli S_h di S_t e perciò è identico.

2. - Il numero dei complessi indipendenti ψ_{t-h} è $\binom{r+1}{t-h}$, per cui Σ può determinarsi come intersezione di altrettanti complessi κ_{t+1} . Questi però possono non essere indipendenti,

4) Naturalmente Σ può risultare vuoto.

5) Cfr. [2], p. 12, e [5], p. 85.

6) Cfr. [5], p. 86-87.

7) Due complessi di spazi di dimensioni duali diconsi *in involuzione* quando il loro prodotto è identicamente soddisfatto. Cfr. [2], p. 11, e [7].

8) Cfr. [2], ultimo alinea p. 11.

9) Con ciò s'intende che la forma esterna prodotto delle due forme esterne associate ai dati complessi, ha tutti i coefficienti nulli: una siffatta forma può infatti concepirsi soddisfatta da tutti gli spazi di quella certa dimensione dello spazio ambiente. Cfr. [2], p. 11.

10) Cfr. [2], p. 11, nota ¹⁰⁾.

e l'indipendenza dei α_{t+1} è per ora assodata solo per il caso dei complessi di rette ($h = 1$) generali, di uno spazio pari ($r = 2p$) e per $t \leq p$ ¹¹⁾.

Per di più la stessa dimensione della varietà segata sulla grassmanniana degli S_h di S_r dallo spazio intersezione degli iperpiani immagini dei complessi α_{t+1} in $S_R \left(R = \binom{r+1}{h+1} - 1 \right)$, non è tuttora conosciuta con sufficiente rigore.

I numeri seguenti di questa prima parte sono dedicati alla risoluzione di questi due problemi quando ci si limiti a considerare gli spazi totali della dimensione più bassa, cioè quando si prenda $t = h + 1$.

3. - Se $t = h + 1$, $\psi_{t-h} = \psi_1$ è un complesso di punti, cioè un iperpiano U ed il numero dei complessi ψ_1 indipendenti è $r + 1$.

Il complesso $\alpha_{h+2} = \varphi_{h+1} \cdot \psi_1$ si lascia caratterizzare facilmente come l'insieme degli S_{h+1} che incidono U secondo spazi S_h del complesso $\bar{\varphi}_{h+1}$ ivi indotto da φ_{h+1} . Infatti se S_{h+1} è uno spazio del complesso α_{h+2} , i due complessi $\bar{\psi}_1^*$ e $\bar{\varphi}_{h+1}^*$, in esso subordinati da ψ_1 e φ_{h+1} , risultano involutori; vale a dire che lo S_h rappresentante lo $\bar{\psi}_1^*$ appartiene all'iperstella di S_h individuata da $\bar{\varphi}_{h+1}^*$. Ma lo $\bar{\varphi}_{h+1}^*$ è l'intersezione di S_h con U , quindi appartiene allo $\bar{\psi}_1^*$.

Nel caso considerato il problema d'indipendenza si risolve senza serie difficoltà nel senso seguente: « *Gli $r + 1$ complessi $\varphi_{h+1} \cdot \psi_1$ sono indipendenti, sempre che φ_{h+1} non ammetta iperpiani totali* ».

Tutto si riduce a provare che, se φ_{h+1} non ammette iperpiani totali, non può essere $\varphi_{h+1} \cdot \psi_1 = 0$ senza che sia $\psi_1 = 0$.

Ora l'ipotesi $\varphi_{h+1} \cdot \psi_1 = 0$ porta che ogni S_{h+1} di S_r appartenga a $\varphi_{h+1} \cdot \psi_1$, quindi, stante la generazione sopra ricordata, che $\bar{\varphi}_{h+1}$ sia identico, cioè che tutti gli S_h di U appartengono a φ_{h+1} , ed infine che U sia un iperpiano totale di φ_{h+1} .

Tenuto conto che ψ_1 ed U (geometricamente) s'identificano,

¹¹⁾ Cfr. [2], p. 13-24, e [4], p. 16-26.

ne consegue che, se φ_{h+1} ammette τ iperpiani totali indipendenti, il numero dei complessi $\kappa_{h+2} = \varphi_{h+1} \cdot \psi_1$ indipendenti è $r + 1 - \tau$. In tal caso, come si rileva facilmente dalla rappresentazione analitica, lo φ_{h+1} è l'insieme degli S_h che tagliano l' $S_{r-\tau}$, intersezione di quegli iperpiani, secondo spazi $S_{h-\tau}$ d'un complesso lineare $\varphi_{h-\tau+1}$. E gli S_{h+1} totali di φ_{h+1} son quelli passanti per gli $S_{h-\tau+1}$ totali di $\varphi_{h-\tau+1}$.

Nel caso estremo $h = \tau$, $\varphi_{h-\tau+1}$ è un complesso di punti, cioè un iperpiano $S_{r-\tau-1}$ di $S_{r-\tau}$. Il complesso φ_{h+1} è speciale ed allora il numero degli iperpiani totali indipendenti non è più h , ma $h + 1$ (ossia se esistono h iperpiani totali indipendenti, ne esistono di conseguenza $h + 1$). E' questo il caso dei complessi di rette, appena ammettano un iperpiano totale.

Comunque, poichè Σ è intersezione di $r + 1$ complessi lineari di spazi S_{h+1} , così esisteranno certo S_{h+1} totali se sarà

$$(h + 2)(r - h - 1) - (r + 1) \geq 0,$$

cioè se

$$(1) \quad (h + 1)(r - h - 2) \geq 1;$$

per il che basta, essendo $h + 1 \geq 1$, che sia $r - h - 2 > 0$, quindi $h < r - 2$. Pertanto un complesso lineare di spazi S_h in S_r ammette sempre S_{h+1} totali se $h < r - 2$.

Il caso $h = r - 2$, in cui l'esistenza di S_{h+1} totali non si può affermare in generale, si tratta facilmente dualizzando nello S_r . Infatti l'esistenza in tal caso di un iperpiano S_{r-1} totale porta nel complesso una particolarità duale di quella che, per un complesso di rette, è d'aver un punto singolare, quindi verificata sempre negli spazi pari, ma non necessariamente negli spazi dispari. Pertanto in uno spazio pari anche un complesso di spazi S_{r-2} ammette un S_{r-1} totale.

Si noti poi che per $r = 3$ l'esistenza di un piano totale porta che il complesso di rette sia speciale, nel qual caso v'è addirittura un fascio di piani totali.

4. - Poniamoci ora nel caso di un φ_{h+1} che non ammetta iperpiani totali (per quanto la parte sostanziale del ragionamento sia indipendente da tale restrizione), caso che compren-

de, in particolare, quello dei complessi di rette *non speciali*. Allora, poichè Σ è intersezione di $r + 1$ complessi indipendenti, si sarebbe tratti a credere che la sua dimensione fosse data da

$$(2) \quad \delta^* = (h+2)(r-h-1) - (r+1) = (h+1)(r-h-2) - 1.$$

Ma ora vedremo — e i primi esempi lo indicano — che la *dimensione di Σ è sempre maggiore di δ^* e che Σ stesso risulta dall'intersezione di $h + 2$ complessi α_{h+2} indipendenti, per guisa che tutti gli S_{h+1} comuni a tali complessi stanno ancora in altri $r + 1 - (h + 2) = r - h - 1$ complessi indipendenti¹².*

Scelti in S_r $r + 1$ iperpiani *generici* $U^{(i)}$ (che, come complessi di punti s'indicheranno con $\phi_i^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, r$)), da quanto precede risulta che Σ è l'intersezione degli $r + 1$ complessi $\varphi_{h+1} \cdot \phi_i^{(i)}$, cioè, stante la struttura di questi (cfr. n. 3), è l'insieme degli S_{h+1} che incidono ciascun $U^{(i)}$ in un S_h del complesso $\varphi_{h+1}^{(i)}$ ivi indotto da φ_{h+1} .

Ora sia \bar{S}_{h+1} uno spazio generico di Σ e siano $S_h^{(j)}$ gli spazi in cui esso incide i primi $h + 2$ iperpiani $U^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots, h + 1$) del nostro sistema. Attesa la genericità di quegl'iperpiani, tali $S_h^{(j)}$ saranno, entro lo \bar{S}_{h+1} , indipendenti, ed apparterranno ai rispettivi $\varphi_{h+1}^{(j)}$.

Se Σ' è il sistema degli S_{h+1} che incidono gli $U^{(j)}$ secondo $S_h^{(j)}$ del rispettivo $\varphi_{h+1}^{(j)}$, è chiaro che Σ' contiene Σ ; e poichè Σ' contiene lo \bar{S}_{h+1} così, nel generico S_{h+1} di Σ' gli $S_h^{(j)}$ d'appoggio saranno indipendenti. Ma tanto basta perchè S_{h+1} sia uno spazio totale di φ_{h+1} , poichè il complesso ivi indotto da φ_{h+1} (che, in generale, è un'iperstella) non può contenere $h + 2$ spazi *indipendenti*, come gli $S_h^{(j)}$, senz'essere identico. Si conclude che ogni S_{h+1} di Σ' sta in Σ e quindi che $\Sigma' = \Sigma$. In definitiva l'intersezione dei primi $h + 2$ complessi $\varphi_{h+1} \cdot \phi_i^{(i)}$ è contenuta anche negli altri $r - h - 1$ complessi del sistema, benchè questi siano *indipendenti* dai primi. L'interpretazione sulla grassmanniana è ovvia.

¹²) Se vi sono ancora τ iperpiani totali, Σ risulta invece intersezione $h + 2 - \tau$ complessi α_{h+1} . Cfr. il n. 3.

5. - La dimensione normale dell'intersezione di $h + 2$ complessi indipendenti di S_{h+1} è:

$$(3) \quad \delta = (h + 2)(r - h - 1) - (h + 2) = (h + 2)(r - h - 2),$$

e tale almeno, quindi, è la dimensione di Σ . Anzi è da ritenere che quando il complesso φ_{h+1} è generale, quella dimensione sia proprio δ ; al che inducono le seguenti considerazioni.

Anzitutto per i complessi di rette φ_2 di S_4 , la (3) dà $\delta = 3$, e questa è effettivamente la dimensione dell'insieme dei piani totali di φ_2 . Infatti si vede subito direttamente, ricordando la struttura di φ_2 ¹³⁾, che, detto O il punto singolare di φ_2 stesso, i relativi piani totali sono quelli del complesso indotto nella stella di centro O , cioè i piani che si ottengono proiettando da O la retta del $\overline{\varphi_2}$ indotto dal φ_2 in uno S_3 non passante per O . Inoltre per i complessi φ_2 generali di S_r , con $r > 4$, la (3) è ancora verificata: infatti se un tal φ_2 ha un piano totale, questo lo è pure per il $\overline{\varphi_2}$ subordinato dal φ_2 in un generico S_4 condotto in S_r per quel piano, e tanto basta per concludere che in tal caso la dimensione è $3(r - 3)$, in perfetto accordo con la (3).

Infine è da rilevarsi che gli $h + 2$ complessi $\varphi_{h+1}^{(j)}$ degli iperpiani $U^{(j)}$, dai quali è determinato Σ sono essenzialmente *generici*, come ora dimostreremo, e che quindi è da ritenere che impongano condizioni indipendenti agli S_{h+1} di Σ . L'affermazione scende dal teorema:

« Assunti in S_r $h + 2$ iperpiani indipendenti $U^{(j)}$ ed in essi dei complessi arbitrari $\varphi_{h+1}^{(j)}$ di spazi S_h — salva la condizione di subordinare il medesimo complesso nelle intersezioni a due a due, a tre a tre, etc. degli $U^{(j)}$ — è unico e determinato il complesso φ_{h+1} di S_r , che subordina negli iperpiani $U^{(j)}$ i complessi dati ».

Per evitare delle difficoltà puramente formali d'esposizione, ci limitiamo ad esporre la dimostrazione nel caso $r = 4$ ed $h = 1$, cioè per i complessi di rette in S_4 , avvertendo che nulla cambia della sostanza del ragionamento nel caso generale.

¹³⁾ Cfr. ad es. [1], p. 124.

I tre iperpiani indipendenti siano le faccie $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ della piramide fondamentale: e si tenga presente che nelle coordinate X_{ik} d'una retta giacente in $x_i = 0$, quelle contenenti l'indice i sono nulle, e le altre sei sono le coordinate grassmanniane indotte in quello spazio¹⁴).

Ora sia (prendendo nelle coppie i, k gli indici crescenti)

$$(4) \quad \Sigma A_{ik} X_{ik} = 0,$$

l'equazione d'un φ_2 in S_4 . I complessi indotti negli iperpiani $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, sono:

$$(5) \quad A_{12}X_{12} + A_{14}X_{14} + A_{15}X_{15} + A_{24}X_{24} + A_{25}X_{25} + A_{45}X_{45} = 0,$$

$$(5') \quad A_{12}X_{12} + A_{13}X_{13} + A_{15}X_{15} + A_{23}X_{23} + A_{25}X_{25} + A_{35}X_{35} = 0,$$

$$(5'') \quad A_{12}X_{12} + A_{13}X_{13} + A_{14}X_{14} + A_{23}X_{23} + A_{24}X_{24} + A_{34}X_{34} = 0,$$

e, ad esempio, quello indotto nel piano $x_4 = x_5 = 0$, è

$$A_{12}X_{12} + A_{13}X_{13} + A_{23}X_{23} = 0,$$

etc...

Suppongasi ora dati nei tre piani predetti tre complessi

$$(6) \quad a_{12}X_{12} + a_{14}X_{14} + a_{15}X_{15} + \dots = 0,$$

$$(6') \quad b_{12}X_{12} + b_{13}X_{13} + b_{15}X_{15} + \dots = 0,$$

$$(6'') \quad c_{12}X_{12} + c_{13}X_{13} + c_{14}X_{14} + \dots = 0,$$

assoggettati alla sola condizione di subordinare, a due a due, sui piani comuni lo stesso complesso (fascio di rette) e, per il resto, arbitrari.

Intanto potremo supporre $a_{12} = b_{12} = c_{12}$. L'identità dei due complessi indotti da (6') (6'') sul piano $x_4 = x_5 = 0$, porta che sia

$$b_{13} = c_{13} \quad , \quad b_{23} = c_{23} .$$

Analogamente si ottengono le relazioni

$$a_{14} = c_{14} \quad , \quad a_{24} = c_{24} ,$$

$$a_{15} = b_{15} \quad , \quad a_{25} = c_{25} .$$

¹⁴) Cfr. ad es. [6], n. 126, p. 135.

Dopodichè basta porre

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{12} = a_{12} = b_{12} = c_{12}, \\ A_{13} = b_{13} = c_{13}, \\ A_{14} = a_{14} = c_{14}, \\ A_{15} = a_{15} = b_{15}, \\ A_{23} = b_{23} = c_{23}, \\ A_{24} = a_{24} = c_{24}, \\ A_{25} = a_{25} = c_{25}, \\ A_{34} = c_{34}, \\ A_{35} = b_{35}, \\ A_{45} = a_{45}, \end{array} \right.$$

affinchè il complesso (4) subordini sui tre spazi dati i complessi dati. La determinazione univoca di (4) è senz'altro evidente.

Ci limitiamo qui a tali osservazioni rimandando lo studio più approfondito della questione alla seconda parte.

II.

6. - Gli S_h di S_r si rappresentano notoriamente¹⁵⁾ sulla varietà grassmanniana $G(h, r)$, di dimensione $d = (r - h)(h + 1)$, dello spazio S_R con $R = \binom{r+1}{h+1} - 1$.

Indicheremo con L una varietà di spazi che si rappresenti sulla intersezione di $G(h, r)$ con q iperpiani indipendenti dello S_R , cioè su di uno spazio S_{R-q} dello S_R : se questo spazio è generico la varietà L ha esattamente $d - q$ dimensioni, mentre per particolari spazi S_{R-q} essa può risultare più ampia¹⁶⁾. Nello S_r la varietà L risulta intersezione di q complessi lineari $\varphi_{h+1}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) indipendenti.

Uno spazio S_t ($t > h$) dello S_r si dice uno spazio totale per la varietà L , quando tutti i suoi S_h appartengono ad L : indicheremo ancora con Σ l'insieme di siffatti S_t per L relativi ad un dato valore di t .

¹⁵⁾ Cfr. ad es. [6], p. 132.

¹⁶⁾ Cfr. ad es. U. MORIN, *Contributi alla geometria degli S_h di S_n* , « Rend. Semin. Padova », 3 (1932), 1-13.

Dovremo poi considerare le sottovarietà $G(h, t)$ della $G(h, r)$, che rappresentano le totalità degli S_h di uno S_t , ed appartengono a spazi S_ρ dello S_R , con

$$(8) \quad \rho = \binom{t+1}{h+1} - 1.$$

L'insieme delle $G(h, t)$ si rappresenta biunivocamente sulla $G(t, r)$, immagine senza eccezioni degli S_h dello S_t , di dimensione $d' = (r-t)(t+1)$.

7. - Sia \mathcal{L} l'insieme degli S_{R-q} di S_R che contengono almeno una varietà $G(h, t)$ e di conseguenza il suo spazio di appartenenza S_ρ . La varietà ¹⁷⁾ \mathcal{L} è *irriducibile* perchè è mutata in se stessa dal gruppo infinito, transitivo e continuo, delle omografie dello S_R , immagini di quelle dello S_t .

Si consideri ora la varietà Γ delle coppie di spazi S_{R-} ed S_ρ appartenentisi: essa è un modello del prodotto della varietà degli S_ρ per la varietà degli S_{R-q} di S_R che contengono un dato spazio S_ρ ; vale a dire che la Γ è il prodotto della grassmanniana $G(t, r)$ per una stella di spazi S_{R-q} che abbia come spazio centro un S_ρ . La varietà Γ è dunque irriducibile.

D'altra parte al generico elemento della \mathcal{L} corrisponde su Γ una certa varietà in corrispondenza birazionale coll'insieme Σ delle $G(h, t)$ che stanno in uno S_{R-q} generico della \mathcal{L} stessa: ne segue che la Γ rappresenta anche il prodotto dell'insieme Σ delle $G(h, t)$ contenute nel generico spazio S_{R-q} della \mathcal{L} per la \mathcal{L} stessa. Poichè l'insieme \mathcal{L} è, come abbiamo già osservato, irriducibile, lo sarà pertanto anche il sistema Σ degli S_t totali appartenenti ad una varietà generica nell'insieme \mathcal{L} di quelle che ne possiedono: altrimenti si spezzerebbe anche la varietà Γ .

Cosicchè si può intanto enunciare il seguente

TEOREMA I. — *Le varietà L che contengono spazi totali S_t , per un qualsiasi dato valore di t , formano un insieme \mathcal{L} irri-*

¹⁷⁾ Useremo spesso questo termine anche se gli elementi dell'insieme non sono punti. Del resto si è liberi, preferendolo, di pensare ad un modello formato da punti.

ducibile, e la varietà generica dell'insieme contiene un sistema Σ pure irriducibile di spazi S_t totali.

8. - Quando si chiami Λ il sistema degli spazi S_{R-q} di S_R contenenti un certo S_ρ , si può esprimere la doppia composizione della varietà Γ , scrivendo:

$$(9) \quad \Gamma = G(t, r) \times \Lambda = \Sigma \times \mathcal{L}.$$

Questa relazione funzionale lega, in particolare, le dimensioni d' , λ , δ ed \bar{l} rispettivamente di $G(t, r)$, Λ , Σ ed \mathcal{L} , per le quali conviene ora scrivere delle opportune espressioni, che per d' e λ son subito date dalle

$$(10) \quad \begin{aligned} d' &= (r-t)(t+1), \\ \lambda &= q(R-q-\rho); \end{aligned}$$

ed invece per \bar{l} è data dalla

$$(11) \quad \bar{l} = q(R-q+1) - \nu,$$

dove ν è un intero *non negativo*, perchè il primo addendo dell'espressione fornisce già la dimensione di tutti gli S_{R-q} di S_R , che certamente non è superata da \bar{l} .

La (9) — sfruttando le espressioni (10) ed (11) — fornisce la relazione ¹⁸⁾:

$$(r-t)(t+1) + q(R-q-\rho) = \delta + q(R-q+1) - \nu,$$

dalla quale si ricava, usando della (8), la seguente espressione per la dimensione δ di Σ :

$$(12) \quad \delta = (r-t)(t+1) - q \binom{t+1}{h+1} + \nu = \delta' + \nu,$$

con

$$(13) \quad \delta' = (r-t)(t+1) - q \binom{t+1}{h+1}.$$

Le relazioni (12) e (13) permettono d'interpretare il significato del termine ν . Infatti, se $\nu = 0$, accade che una varie-

¹⁸⁾ In quanto precede si applica, in sostanza, una forma del principio della conservazione del numero, quale è esposta in (8), (M.S.), pag. 240.

tà L qualsiasi contiene spazi totali S_t , inquantochè la \mathcal{L} viene a coincidere con la totalità degli spazi S_{R-q} dello S_R , vale a dire con la famiglia delle L . In tal caso riesce $\delta = \delta'$, dimodochè la dimensione del sistema Σ è proprio fornita dalla (13), qualora si supponga che la L sia generica nella sua famiglia. Se è $\nu > 0$, invece, la L generica non contiene spazi totali, cioè la \mathcal{L} è un sottoinsieme proprio della totalità degli spazi S_{R-q} di S_R . E' importante osservare che ciò *accadrà di certo, in particolare, se l'espressione (13) fornisce per δ' un valore negativo.*

9. - Si può ora enunciare il

TEOREMA 2. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà L di spazi S_h dello S_r , ammetta spazi totali di dimensione t ($t > h$) è — se essa è intersezione di $q > 1$ complessi lineari — che l'espressione (13) per δ' risulti non negativa. Se L è un complesso ($q = 1$), ciò è ancor vero, esclusi i casi seguenti, nei quali il complesso non ha S_t totali anche se quell'espressione non è negativa:*

- a) un complesso di rette, se $r > 2t$,
- b) un complesso di spazi S_h di S_{h+2} , se $t = h + 1$ ed h è dispari,
- c) un complesso di piani dello spazio S_6 , se $t = 4$.

Inoltre, se la varietà è generica nella sua famiglia, quel sistema ha dimensione $\delta = \delta'$, fornita dalla (13), sempre esclusi i casi eccezionali suddetti.

La necessità della condizione enunciata segue senz'altro dalle osservazioni che chiudono il numero precedente. La sufficienza invece richiede delle considerazioni alle quali sono dedicati questo ed i numeri seguenti.

Si cominci a considerare la varietà $\bar{\Gamma}$ delle coppie (\bar{S}_{R-q}, S_ρ) nelle quali \bar{S}_{R-q} è uno spazio generico per uno S'_ρ , prefissato ma qualsiasi. Con gli stessi ragionamenti fatti al n. 3 per la varietà Γ , si osserva che ad ogni elemento di $\bar{\Gamma}$ è associata sia una coppia di elementi estratti rispettivamente da Σ e da Λ , che una coppia di elementi estratti rispettivamente l'uno dalla stella Λ^* di spazi S_{R-q} , che ha per centro lo spazio congiungente due S_ρ appartenenti ad un S_{R-q} , l'altro dalla varietà

\mathfrak{N} degli S_ρ appartenenti, con S'_ρ , ad un S_{R-q} . Pertanto si può scrivere la relazione:

$$(14) \quad \bar{\Gamma} = \Sigma \times \Lambda = \mathfrak{N} \times \Lambda^*.$$

Occorre ora determinare le dimensioni delle varietà \mathfrak{N} e Λ^* . A ciò distingueremo i due casi seguenti:

- a) due S_ρ appartenenti ad un generico S_{R-q} non sono incidenti,
- b) due S_ρ appartenenti ad un generico S_{R-q} sono incidenti.

10. - Consideriamo il caso (a). In tale ipotesi la varietà \mathfrak{N} è la varietà $G(t, r)$, grassmanniana degli S_t di S_r , e la stella Λ^* ha per centro lo spazio $S_{2\rho+1}$, congiungente lo S'_ρ con lo S_ρ . La (14) fornisce dunque subito, quando si eguagliano le dimensioni dei due membri:

$$q(R - q - \rho) + \delta' + \nu = (r - h)(h + 1) + q(R - 2\rho - q - 1),$$

cioè, tenendo presenti le (8) e (13),

$$\nu = q(\rho + 1) - q \binom{t + 1}{h + 1} = 0.$$

Si può dunque concludere, ricordando le osservazioni del n. 7, che nel caso (a), la \mathfrak{L} coincide con la totalità degli S_{R-q} di S_R , e che se è anche $\delta' \geq 0$, vi saranno spazi totali S_t il cui insieme Σ avrà dimensione δ eguale a δ' . E ciò esaurisce la dimostrazione del teorema nell'ipotesi (a).

11. - Consideriamo ora il caso (b), e cominciamo col verificare che: *affinchè due spazi S'_ρ ed S_ρ si seghino secondo uno S_j ($j \geq 0$) occorre e basta che i due S'_t ed S_t dello S_r ad essi associati, s'incontrino secondo uno S_l , con $l \geq h$.*

Si prendano perciò i due S'_t ed S_t come spazi fondamentali della piramide delle coordinate proiettive in S_r . In ciascuno di essi vi sono $\binom{t + 1}{h + 1} S_h$ fondamentali, che hanno tutte le coordinate grassmanniane nulle meno una, e quindi si rappresentano in vertici della piramide fondamentale dello S_R . Questi vertici sono dipendenti o no, secondo che qualcuno di

essi risulta ripetuto oppure no. Quindi la questione dell'incidenza o no degli spazi S'_ρ ed S_ρ — poichè $\rho = \binom{t+1}{h+1} - 1$ — si trasporta all'analogha questione della dipendenza od indipendenza di quei vertici.

D'altra parte è chiaro che, se i due S'_t ed S_t non sono incidenti, oppure se s'intersecano, secondo un S_l con $l < h$, quei vertici sono indipendenti, mentre non lo sono più se $l \geq h$. Se ne deduce che lo S_j , comune agli S'_ρ ed S_ρ , è lo spazio d'appartenenza della grassmanniana degli S_h dello S_t comune agli spazi S'_t ed S_t ; vale a dire che si ha:

$$(15) \quad j = \binom{l+1}{h+1} - 1.$$

12. - L'osservazione sopra esposta fa vedere che, nel caso (b), la varietà \mathfrak{N} è formata da quegli S_ρ che sono spazi d'appartenenza delle $G(h, t)$ relative a quegli S_t che incidono lo S'_t secondo un S_l ; la sua dimensione m vale dunque:

$$(16) \quad m = (t-1)(r-t+l+1).$$

Inoltre i due spazi S'_ρ ed S_ρ , avendo uno S_j in comune, giacciono ora entro uno $S_{2\rho-j}$, e quindi la stella Λ^* ha la dimensione

$$(17) \quad \lambda^* = q(R - 2\rho - q + j).$$

La relazione (14) — se si tien conto di questo valore — fornisce subito:

$$(18) \quad q(R - q - \rho) + \delta' + \nu = (t-l)(r-t+l+1) + q(R - 2\rho - q + j).$$

13. - Dalla (18), confrontando con le (8), (13) e (15), si ricava il seguente valore per ν :

$$(19) \quad \nu = q \binom{l+1}{h+1} - (r-2t+l)(l+1).$$

D'altra parte affinché la varietà L possa avere spazi totali S_t occorre, in seguito ad un'osservazione del n. 9, che δ' non

sia negativa, il che, grazie alla (13), si esprime nella condizione:

$$(r - t)(t + 1) - q \binom{t + 1}{h + 1} \geq 0,$$

ovvero nell'altra:

$$(20) \quad r \geq t + q \frac{t(t - 1) \dots (t - h + 1)}{(h + 1)!}.$$

Dalle (19) e (20) si ricava la seguente limitazione per il valore di v :

$$v \leq q \binom{l + 1}{h + 1} - \left\{ t + q \frac{t(t - 1) \dots (t - h + 1)}{(h + 1)!} - 2t + l \right\} (l + 1),$$

dalla quale, con qualche modificazione, si ottiene l'altra:

$$(21) \quad v \leq - \frac{l + 1}{(h + 1)!} \left\{ qt(t - 1) \dots (t - h + 1) - \right. \\ \left. - ql(l - 1) \dots (l - h + 1) - (h + 1)! (t - l) \right\}.$$

Se in questa si pone: $t - 1 = p$ ($p \geq 0$), essa diventa:

$$(22) \quad v \leq - \frac{l + 1}{(h + 1)!} \left\{ q(l + p)(l - 1 + p) \dots (l - h + 1 + p) - \right. \\ \left. - ql(l - 1) \dots (l - h + 1) - (h + 1)! p \right\},$$

ossia:

$$(23) \quad v \leq - \frac{l + 1}{h + 1} \left\{ q \binom{l + p}{h} - q \binom{l}{h} - p(h + 1) \right\}.$$

La quantità A nella parentesi a graffa può essere altrimenti scritta nella forma:

$$A = q \cdot \sum_{i=0}^h \binom{l}{h-i} \binom{p}{i} - q \binom{l}{h} - p(h + 1),$$

ovvero:

$$A = q \cdot \sum_{i=1}^h \binom{l}{h-i} \binom{p}{i} - p(h + 1).$$

Da qui si ricava:

$$A \geq pq \binom{l}{h-1} - p(h+1),$$

e, se si suppone che sia $q > 1$, riesce sempre $A \geq 0$. Se poi si ha $q = 1$ e si suppone che sia $l > h + 1$, si trova:

$$A \geq p \binom{h+1}{2} - p(h+1) = \frac{p}{2}(h+1)(h-2)$$

e quindi è ancora $A \geq 0$, purchè sia $h > 1$.

Segue quindi subito, quando si osservi la (23), che, se è $q > 1$, ν dev'esser negativo o nullo, e siccome, per sua natura (n. 8), negativo non può essere, esso sarà nullo. Ancora una volta si conclude dunque che δ è eguale a δ' , e che, analogamente al n. 10, il teorema è vero. Lo stesso si può dire se $q = 1$, con $l > h + 1$ ed $h > 1$. Restano i due casi $h = 1$ ovvero $l \leq h + 1$ che discuteremo direttamente.

14. - Consideriamo qui il primo caso: la varietà L è allora un complesso di rette. Il valore di ν , come si ricava dalla (19), è:

$$\nu = (l+1)(2t-r-l/2).$$

Si ha dunque $\nu \leq 0$, se:

$$r \geq 2t - l/2$$

mentre la condizione $\delta' \geq 0$ dà, per un φ_2 , l'altra limitazione:

$$r \geq \frac{3}{2}t.$$

Pertanto il caso è dubbio solo se è $3t/2 \leq r < 2t - 1/2$. Ma è ben noto ¹⁹⁾ che un φ_2 di S_r ha S_t totali solo se $r \geq 2t$, e quindi il caso è in effetti d'eccezione pel teorema, non essendovi in esso spazi totali pur essendo $\delta' \geq 0$. Se si suppone invece $r \geq 2t$, la dimensione δ dell'insieme Σ del φ_2 è eguale a:

$$\delta = (h+1)(2r-3h)/2.$$

¹⁹⁾ Cfr. [1].

15. - Consideriamo ora il rimanente caso d'un complesso φ_{h+1} per cui accada che l non superi $h + 1$. Essendo certo $l \geq h$, restan da discutere solo i due casi: $l = h$, ed $l = h + 1$. Vediamo il primo. Dalla (19) si ha:

$$v = 1 - (r - 2t + h)(h + 1).$$

Affinchè sia $v \leq 0$ è necessario e sufficiente che riesca:

$$r - 2t + h \geq \frac{1}{h + 1},$$

ovvero:

$$r \geq 2t - h + \frac{1}{h + 1},$$

e quindi (poichè $h > 0$)

$$r > 2t - h.$$

Dunque, se insieme alla $\delta' \geq 0$, si ha $r > 2t - h$ il teorema non subisce eccezioni. Se invece, sempre per $\delta' \geq 0$, si ha $r \leq 2t - h$ il caso è dubbio. Una nota analisi [4] fa subito vedere che gli unici casi che così si ottengono, sono appunto quelli enunciati ai capi (b) e (c) del teorema.

Se infine si ha $l = h + 1$ non si ottengono casi di eccezione. Infatti dalla (23) si ha:

$$v \leq - \frac{h + 2}{(h + 1)!} \left\{ t(t - 1) \dots (t - h + 1) - (h + 1)! - \right. \\ \left. - (t - h - 1)(h + 1)! \right\},$$

cioè:

$$v \leq - \frac{h + 2}{(h + 1)!} \left\{ t(t - 1) \dots (t - h + 1) - (h + 1)! (t - h) \right\};$$

e l'espressione in parentesi non è mai negativa; si conclude quindi, col solito procedimento, che $v = 0$. Con ciò il teorema enunciato è completamente dimostrato.

16. - Il valore dato dalla (13) per la dimensione δ del sistema Σ coincide con la dimensione che compete alla varietà intersezione di $q \binom{t + 1}{h + 1}$ complessi generici χ_{t+1} dello S_r . Se si

ricorda che il sistema è effettivamente intersezione di al più $q\binom{r+1}{t-h}$ complessi κ_{t+1} (cfr. n. 1), se ne deduce che, pur rimanendo impregiudicata la questione dell'indipendenza o no di questi complessi, tutti i punti della $G(t, r)$ che stanno in $q\binom{t+1}{h+1} = q\binom{t+1}{t-h}$ fra essi, giacciono di conseguenza nei rimanenti complessi κ_{t+1} . Questo fatto interessante conferma quanto abbiamo già trovato, per altra strada, nella prima parte di questo lavoro, per il caso $t = h + 1$. Terminiamo questa seconda parte enunciando il:

TEOREMA 3. — *L'insieme Σ degli spazi totali $S_t (t > h)$ d'una varietà L di spazi S_h dello S_r , resta determinato come intersezione di $q\binom{t+1}{h-1}$ complessi lineari κ_{t+1} .*

III.

17. - In questa terza parte estenderemo al caso di un complesso algebrico K , d'ordine $n > 1$, quanto si è visto, nella seconda parte, per le varietà L di spazi S_h dello S_r . E' noto che un complesso algebrico K si rappresenta sulla $G(h, r)$ con una varietà algebrica V_{a-1} , base per un sistema di forme d'ordine n dello S_R ²⁰⁾, una qualsiasi delle quali indicheremo col simbolo K^* . La nozione di spazio totale S_t per K si pone in modo analogo a quello seguito per le varietà L , e Σ ²¹⁾ indicherà ancora l'insieme di siffatti S_t .

²⁰⁾ Vale a dire che, se $n > 1$, la corrispondenza fra K e K^* non è biunivoca. Precisamente la postulazione d'un complesso algebrico d'ordine n è data dalla:

$$f(n) = \frac{(n+r)! (n+r-1)! \dots (n+r-h)! 1! 2! \dots h!}{(n+h)! n! (r+h)! (r+h-1)! \dots r!},$$

in cui le lettere hanno il nostro solito significato. Cfr. HODGE, « Proc. Cambridge Phil. Soc. » (1942), 129-143.

²¹⁾ L'uso degli stessi simboli, qui e nel seguito, già usati nella parte seconda del lavoro, anzichè dar luogo ad ambiguità, mette in più chiara luce il parallelismo dei procedimenti.

18. - Sia \mathcal{L} l'insieme delle forme K^* , che contengono almeno una $G(h, t)$: la varietà risulta irriducibile perchè è mutata in se stessa dal gruppo infinito, transitivo e continuo, di omografie dello S_R , immagini di quelle dello S_r . Si consideri poi la varietà Γ delle coppie $K^*, G(h, t)$ appartenentisi. Essa risulta un modello del prodotto dell'insieme delle $G(h, t)$, cioè della grassmanniana $G(t, r)$ degli S_t di S_r , per l'insieme delle K^* appartenenti ad una qualsiasi, fissata, $G(h, t)$ e perciò anch'essa è irriducibile. Inoltre ad un elemento generico di \mathcal{L} corrisponde nella Γ una certa varietà birazionale al sistema Σ delle $G(h, t)$ esistenti in quell'elemento; anzi la Γ può pensarsi come il prodotto della totalità Σ delle $G(h, t)$ appartenenti ad una forma K^* , generica fra quelle di \mathcal{L} , per la varietà \mathcal{L} stessa. Siccome quest'ultima è irriducibile; lo sarà anche il sistema Σ , cosicchè si può intanto enunciare la proprietà seguente:

TEOREMA 4. — *Se esistono spazi totali S_t per un generico complesso algebrico K , il loro insieme è una varietà algebrica irriducibile.*

19. - Quando si chiami Λ il sistema delle forme K^* contenenti una certa $G(h, t)$, si può esprimere la doppia composizione della varietà Γ scrivendo

$$(24) \quad \Gamma = G(t, r) \times \Lambda = \Sigma \times \mathcal{L}.$$

Questa relazione funzionale lega, in particolare, le dimensioni d', λ, δ ed \bar{l} rispettivamente di $G(t, r)$, Λ , Σ ed \mathcal{L} , per le quali conviene ora trovare delle opportune espressioni. Intanto è subito:

$$(25) \quad d' = (r - t)(t + 1).$$

Se poi si pone:

$$(25) \quad R_1 = \binom{t + 1}{h + 1} - 1,$$

la dimensione D della totalità delle forme K^* (d'ordine n dello S_R) vale ²²⁾:

²²⁾ Cfr. ad es. [1], p. 189.

$$(27) \quad D = \binom{R+n}{n} - 1,$$

cosicchè quella, λ , delle forme K^* contenenti la $G(h, t)$, viene espressa dalla scrittura:

$$(28) \quad \lambda = \binom{R+n}{n} - \binom{R_1+n}{n} - 1.$$

Convieni infine scrivere \bar{l} nella forma seguente:

$$(29) \quad \bar{l} = \binom{R+n}{n} - \nu - 1 = D - \nu,$$

dove ν è un intero *non negativo*, perchè \bar{l} non può superare D .

La (24) allora porge subito la relazione:

$$(r-t)(t+1) + \binom{R+n}{n} - \binom{R_1+n}{n} - 1 = \delta + \binom{R+n}{n} - \nu - 1,$$

che, con alcune semplificazioni, fornisce:

$$(30) \quad \delta = (r-t)(t+1) - \binom{R_1+n}{n} + \nu = \delta' + \nu,$$

colla posizione:

$$(31) \quad \delta' = (r-t)(t+1) - \binom{R_1+n}{n}.$$

Le relazioni (30) e (31) permettono subito d'interpretare il significato del termine ν : infatti, se $\nu = 0$, accade che un generico complesso K contiene spazi totali S_t , inquantochè la \mathcal{L} viene a coincidere con la totalità delle forme d'ordine n dello S_R ed, in tal caso, riesce $\delta' = \delta$, dimodochè la dimensione del sistema Σ è quella fornita dalla (31). Invece, se $\nu > 0$, un generico complesso K non contiene spazi totali, vale a dire che la \mathcal{L} è un sottoinsieme proprio della totalità delle forme K^* . E' importante osservare che *ciò accadrà certo, in particolare, se la espressione (31) fornisce per δ' un valore negativo.*

20. - Si può ora enunciare il

TEOREMA 5. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè un complesso algebrico K , d'ordine $n > 1$, ammetta spazi totali S_t ($t > h$), è che l'espressione data dalla (31) per δ' risulti non negativa. La dimensione δ del sistema Σ di quegli spazi coincide, se K è generico nella famiglia dei complessi d'ordine n , col valore fornito per δ' dalla (31).*

La necessità della condizione enunciata deriva subito dalle osservazioni che concludono il numero precedente. Per dimostrare la sufficienza si consideri la varietà $\bar{\Gamma}$ delle coppie \bar{K}^* , $G(h, t)$ in cui la \bar{K}^* varia intorno ad una prefissata $G'(h, t)$. Se \mathfrak{N} è l'insieme delle $G(h, t)$ che con la $G'(h, t)$ appartengono ad una forma \bar{K}^* generica che contenga la $G'(h, t)$ e se Λ^* è l'insieme delle forme \bar{K}^* passanti per due generiche $G(h, t)$, si può subito scrivere:

$$(32) \quad \bar{\Gamma} = \Sigma \times \Lambda = \mathfrak{N} \times \Lambda^*.$$

Cerchiamo ora le dimensioni delle varietà \mathfrak{N} e Λ^* per cui conviene distinguere fra i due casi seguenti:

- a) due $G(h, t)$ appartenenti ad una generica forma \bar{K}^* non sono incidenti,
- b) due $G(h, t)$ appartenenti ad una generica forma \bar{K}^* sono incidenti,

21. - Consideriamo il caso (a). In tal ipotesi la varietà \mathfrak{N} è birazionale alla grassmanniana $G(t, r)$ degli S_t di S_r e le due $G(h, t)$ impongono condizioni indipendenti fra loro alle forme \bar{K}^* che le contengono entrambe, cioè alle \bar{K}^* di Λ^* . Se ne deduce subito che la dimensione λ^* di Λ^* vale:

$$\lambda^* = \binom{R+n}{n} - 2 \binom{R_1+n}{n} - 1.$$

Tanto basta perchè, dalla (32), si ricavi la relazione:

$$\begin{aligned} \delta + \nu + \binom{R+n}{n} - \binom{R_1+n}{n} - 1 &= (r-t)(t+1) + \\ &+ \binom{R+n}{n} - 2 \binom{R_1+n}{n} - 1; \end{aligned}$$

che, con la (31), porge $\nu = 0$. Ma ciò comporta, secondo quanto si è avvertito al n. 19, che la generica forma K^* è una \bar{K}^* , ossia, che la generica K^* contiene delle $G(h, t)$, ed anzi in modo che il sistema Σ di queste abbia appunto dimensione δ eguale al valore fornito per δ' dalla (31).

22. - Nel caso (b), come abbiamo dimostrato al n. 11, i due S'_t ed S_t associati nello S_r alle $G'(h, t)$ e $G(h, t)$ devono incontrarsi secondo uno spazio S_l , con $l \geq h$. Quindi, la varietà intersezione della $G'(h, t)$ con la $G(h, t)$ è la grassmanniana $G(h, l)$ degli S_h di questo S_l , contenuta nello S_j , $j = \binom{l+1}{h+1} - 1$, comune agli spazi S'_ρ ed S_ρ a cui rispettivamente appartengono le $G'(h, t)$ e $G(h, t)$.

Ma allora la dimensione di \mathfrak{N} è eguale a quella della varietà degli S_t di S_r che incidono un dato S'_t secondo un S_l cioè vale $(t-l)(r-t+l+1)$, mentre la dimensione λ^* di Λ^* è ora data dalla:

$$\lambda^* = \binom{R+n}{n} - 2 \binom{R_1+n}{n} + \binom{R_2+n}{n} - 1,$$

in cui si è posto:

$$(33) \quad R_2 = \binom{l+1}{h+1} - 1.$$

Sostituendo le espressioni trovate nella relazione numerica fra le dimensioni delle varietà presenti nella (32) si trova:

$$\begin{aligned} \delta' + \nu + \binom{R+n}{n} - \binom{R_1+n}{n} - 1 &= (t-l)(r-t+l+1) + \\ &+ \binom{R+n}{n} - 2 \binom{R_1+n}{n} + \binom{R_2+n}{n} - 1, \end{aligned}$$

che, con qualche trasformazione, fornisce il seguente valore per ν :

$$(34) \quad \nu = \binom{R_2+n}{n} - (r-2t+l)(l+1).$$

D'altra parte per un'osservazione del n. 19, affinchè il complesso K abbia St totali occorre che sia $\delta' \geq 0$, il che si traduce, tenendo presente la (31), nella condizione

$$(r - t)(t + 1) - \binom{R_1 + n}{n} \geq 0,$$

ovvero nell'altra:

$$r \geq t + \frac{1}{t + 1} \binom{R_1 + n}{n},$$

che, insieme alla (34), fornisce per v la limitazione:

$$v \leq \binom{R_2 + n}{n} - \left\{ t + \frac{1}{t + 1} \binom{R_1 + n}{n} - 2t + l \right\} (l + 1),$$

o, in miglior forma, la seguente:

$$(35) \quad v \leq \binom{R_2 + n}{n} - \frac{l + 1}{t + 1} \binom{R_1 + n}{n} + (t - l)(l + 1).$$

23. - Il secondo membro della disequaglianza precedente, se si tien conto delle (26) e (33), risulta, se $n > 0$, una funzione $f(n)$ decrescente²³⁾ della variabile intera n . Quindi riesce sempre:

$$f(n) \leq f(1) \quad (n > 0).$$

D'altra parte $f(1)$ è il valore che la funzione assume nel caso che il complesso K sia lineare, ed ho già dimostrato nella parte II, che, esclusi i casi $h = 1$ o $t = h + 1$ ($l = h$), quel valore è sempre non positivo. Ne segue che, per la (35), si ha:

$$v \leq f(n) \leq f(1) \leq 0,$$

ed in definitiva, ricordando che v è essenzialmente non negativo, si conclude che dev'esser $v = 0$.

Nei casi che, momentaneamente, si sono esclusi, si ritrova direttamente, sempre che sia $n > 1$, la stessa conclusione.

²³⁾ Ciò si verifica subito calcolando la differenza $f(n + 1) - f(n)$

Infatti sia dapprima $h = 1$. Dalle (26) e (33) si ha allora :

$$R_1 = \binom{t+1}{2} - 1, \quad R_2 = \binom{l+1}{2} - 1,$$

e se si prende in esame l'espressione

$$\varphi(t) = \frac{1}{t+1} \binom{R_1+n}{n} - t,$$

è subito visto che, per $n > 1$, essa è funzione crescente di t , cosicchè la quantità $\varphi(l) - \varphi(t)$ è negativa perchè $l < t$. Ma la (35) si scrive subito nella forma :

$$v \leq \{ \varphi(l) - \varphi(t) \} (l+1),$$

che porge ancora $v \leq 0$, ossia $v = 0$.

Analogamente si discute il caso $t = h+1$ ($l = h$), per il quale si ha :

$$\varphi(t) = \varphi(h+1) = \frac{1}{h+2} \binom{h+n+1}{n} - (h+1).$$

Anche adesso, se $n > 1$, si ha :

$$\varphi(t) > \varphi(l) = \varphi(h) = \frac{1}{h+1} - h,$$

e quindi si ottiene un'altra volta, come sopra, $v = 0$.

Concludendo — per il che occorre tener presente il significato di v (n. 21) — si può affermare che un complesso generico K , d'ordine n , contiene o no spazi totali S_t ($t > h$) secondo che l'espressione δ' fornita dalla (31) è non negativa o negativa. Il sistema Σ di questi spazi ha, se $\delta' \geq 0$, dimensione δ eguale a δ' , data appunto dalla formola (31). E ciò dimostra completamente il teorema enunciato.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. (Pisa, Principato, 1923).
- [2]. A. COMESSATI, *Sugli indici di singolarità a più dimensioni delle varietà abeliane*. « Rend. Semin. Padova », 5, (1934), 1-30.

- [3]. S. KANTOR, *Theorie der linearen Strahlenkomplexe im Raume von r Dimensionen*. « Journ. für Math. », 118, (1897).
- [4]. U. MORIN, *Sul sistema degli S_r totali di un complesso lineare di S_n* . « Rend. Semin. Padova », 5, (1934), 1-26.
- [5]. B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*. (Roma, Docet, 1951), 81-87.
- [6]. B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*. (Bologna, Zanichelli, 1948), Vol. 1°.
- [7]. M. SELARASSO, *I complessi lineari involutori*. « Rend. Semin. Padova », 16, (1947), 159-211.
- [8]. F. SEVERI, *I fondamenti della geometria numerativa*. « Annali di Mat. » (4), 19 (1940), 153-252; *Memorie Scelte* (Bologna, Zuffi, 1950), 1°, 223-323.