

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

**Sull'equazione del calore : teoremi di unicità e
teoremi di completezza connessi col metodo
d'integrazione di M. Picone. Nota II**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 136-170

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__136_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULL'EQUAZIONE DEL CALORE: TEOREMI DI UNICITÀ E TEOREMI DI COMPLETEZZA CONNESSI COL METODO D'INTEGRAZIONE DI M. PICONE

Nota II () di ENRICO MAGENES (a Padova)*

Questa nota fa seguito alla Nota I dallo stesso titolo, contenuta in questi stessi *Rendiconti* (v. pag. 99 e seg.); ad essa rimando per l'introduzione al problema che tratterò, per le notazioni e la nomenclatura e per la bibliografia.

Nella Nota I si sono dimostrati teoremi di unicità (e quindi teoremi di completezza ad essi connessi) per vari problemi al contorno relativi all'equazione del calore

$$(I) \quad \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1, x_2, \dots, x_m, y).$$

Si è però solamente dato un cenno (v. n. 6 della suddetta Nota) del cosiddetto problema « misto », consistente nell'assegnare la soluzione u sulla « base » inferiore del dominio τ , in cui si considera la (I), ancora la u su una parte della superficie « laterale » s di τ e una combinazione lineare di u e di $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sulla rimanente parte di s ; e si è messa in luce la difficoltà che si incontra se lo si vuol studiare con lo stesso metodo adoperato per gli altri problemi al contorno tipici della (I).

In questa Nota II il problema « misto » viene studiato appoggiandosi ad un'estensione opportuna di una nota identità

*) Pervenuta in Redazione il 2 giugno 1952.

integrale, secondo un procedimento sviluppato da G. FICHERA nell'analogo problema misto per le equazioni di tipo ellittico [8] ¹⁾. La maggior difficoltà si è incontrata nello stabilire alcune maggiorazioni di integrali (n. 2), necessarie per l'applicazione del metodo (n. 3). Queste maggiorazioni hanno permesso anche di sviluppare uno studio, più approfondito di quello che era stato finora fatto, delle equazioni integrali a nucleo singolare che compaiono nella teoria dell'equazione del calore, in particolare per quanto riguarda il nucleo risolvete.

Conseguenza immediata del teorema di unicità sono poi i teoremi di completezza hilbertiana di taluni sistemi di funzioni e in particolare quella di un sistema di funzioni ottenute opportunamente dai cosiddetti polinomi parabolici omogenei e dalle loro derivate normali (n. 4).

Nel n. 5 vengono rapidamente estese le proprietà dei noti integrali analoghi ai potenziali di semplice e di doppio strato, già considerati nel n. 2 della Nota I nel caso di « distribuzioni » della temperatura sommabili, anche al caso di « distribuzioni » non sommabili mediante l'uso dell'integrazione secondo STIELTJES; queste estensioni permettono poi di dimostrare, in un modo analogo a quello sviluppato dal FICHERA nei lavori [9] e [10] relativi alle equazioni di tipo ellittico, proprietà di completezza nello spazio delle funzioni continue per i sistemi dei polinomi parabolici omogenei e delle loro derivate normali, ritrovando tra l'altro nel caso $m = 1$ risultati di G. CIMMINO (v. la nota ²⁾ del n. 5).

Nel n. 6 viene infine dato un cenno sull'applicazione dei teoremi di completezza hilbertiana di questa Nota e della precedente al metodo dei minimi quadrati per il calcolo della soluzione nei problemi al contorno per la (I).

1. - Teoremi preliminari. — Mettiamoci nelle ipotesi sul dominio τ del n. 1 della Nota I, usando esattamente le definizioni e il simbolismo ivi introdotti.

¹⁾ I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia finale della Nota I.

LEMMA I: Posto per ogni coppia $N(x'_1, x'_2, y')$ e $M(x'', x'', y)$ di punti di s

$$\begin{aligned}
 G(M, N) &= \int_s \frac{\partial F(M, Q)}{\partial v_Q} \frac{\partial F(N, Q)}{\partial v_Q} dQs \\
 \bar{G}(M, N) &= \int_s F(M, Q) F(N, Q) dQs \\
 \tilde{G}(M, N) &= \int_s F(M, Q) \frac{\partial F(N, Q)}{\partial v_Q} dQs
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

risulta per ogni $y' \neq y''$

$$\left. \begin{aligned}
 |G(M, N)| \\
 |\bar{G}(M, N)| \\
 |\tilde{G}(M, N)|
 \end{aligned} \right\} \leq \sqrt{\frac{K}{|y' - y''|}}
 \tag{2}$$

essendo K una costante positiva (indipendente da M e N).

Dimostriamo il lemma per $G(M, N)$; in modo analogo si può dimostrarlo per $\bar{G}(M, N)$ e $\tilde{G}(M, N)$.

Possiamo supporre, senza ledere la generalità, date le ipotesi di regolarità fatte sulla superficie s , che il punto N abbia coordinate $(0, 0, y')$ con $y' > 0$, il punto M coordinate (x''_1, x''_2, y'') con $y'' < y'$ e che l'asse x_2 sia parallelo ed ugualmente orientato alla normale a s in N cosicchè la superficie s in un intorno s_ω di N si possa rappresentare con l'equazione $x_2 = \psi(x_1, y)$ con $\psi(x_1, y)$ continua con le sue derivate prime e seconde, per (x_1, y) variabile in un certo intorno ω di $(0, y')$ sul piano (x_1, y) , e per di più costante rispetto a y .

Ricordiamo poi che, se R e S sono due punti di s , E. E. LEVI ha dimostrato che è

$$\left| \frac{\partial F(R, S)}{\partial v_S} \right| \leq B[h_{2,2}(R, S) + h_{1,1}(R, S) + h_{0,1}(R, S)]
 \tag{3}$$

B essendo una costante positiva indipendente da R e S ²).

²) La (3) segue dai n. 5 (in particolare formula (5)) e 3 (in particolare formula (6)) di [13].

Inoltre osserviamo che la funzione $G(M, N)$ è funzione continua di (M, N) in ogni coppia (M_0, N_0) di punti di s non coincidenti ³⁾.

Possiamo quindi affermare che, fissato un intorno s'_ω di N , chiuso e tutto interno ad s_ω , esiste una costante k^* tale che, per ogni punto M esterno a s'_ω si abbia

$$(4) \quad |G(M, N)| \leq k^*.$$

Supposto allora M appartenente ad s'_ω si avrà

$$G(M, N) = \int_{s-s_\omega} \frac{\partial F(M, Q)}{\partial v_Q} \frac{\partial F(N, Q)}{\partial v_Q} d_{Qs} + \int_{s_\omega} \frac{\partial F(M, Q)}{\partial v_Q} \frac{\partial F(N, Q)}{\partial v_Q} d_{Qs}.$$

L'integrale esteso a $s - s_\omega$ è funzione continua del punto M per M variabile in s'_ω e quindi in modulo minore di una certa costante k^{**} ; sicchè, indicata con $\omega(y')$ la parte di ω per cui è $y \geq y'$ e con (x_1, x_2, y) le coordinate di Q , si avrà per M variabile in s'_ω

$$(5) \quad |G(M, N)| \leq k^{**} + B^* \int_{\omega(y')} [h_{2,2}(x_1'', x_2'', y''; x_1, x_2, y) + h_{1,1}(x_1'', x_2'', y''; x_1, x_2, y) + h_{0,1}(x_1'', x_2'', y''; x_1, x_2, y)] [h_{2,2}(0, 0, y'; x_1, x_2, y) + h_{1,1}(0, 0, y'; x_1, x_2, y) + h_{0,1}(0, 0, y'; x_1, x_2, y)] dx_1 dy,$$

B^* essendo un'opportuna costante positiva.

Si tratterà quindi di studiare gli integrali del tipo

$$\Phi(M, N, \alpha, \beta; \alpha', \beta') = \int_{\omega(y')} h_{\alpha, \beta}(x_1'', x_2'', y''; x_1, x_2, y) h_{\alpha', \beta'}(0, 0, y'; x_1, x_2, y) dx_1 dy,$$

³⁾ Ciò si ottiene immediatamente, con artifici noti in questioni di questo tipo, dai ragionamenti citati nel n. 2 della Nota I, che servono per dimostrare la continuità rispetto a N variabile su s dell'integrale

$$\int_s \varphi(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} d_M s, \text{ se } \varphi(M) \text{ è continua su } s.$$

ricordando che è $x_2'' = \psi(x_1'', y')$, $x_2 = \psi(x_1, y)$ e che la quaterna $(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ assume i valori $(2, 2; 2, 2)$, $(2, 2; 1, 1)$, $(2, 2; 0, 1)$, $(1, 1; 2, 2)$, $(1, 1; 1, 1)$, $(1, 1; 0, 1)$, $(0, 1; 2, 2)$, $(0, 1; 1, 1)$, $(0, 1; 0, 1)$.

Si osservi allora anzitutto che essendo $\psi(x_1, y)$ costante rispetto a y si ha

$$|x_2 - x_2''| = |\psi(x_1, y) - \psi(x_1'', y')| \leq A |x_1 - x_1''|,$$

A essendo il massimo del modulo di $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ in ω ; ; in particolare anche

$$|x_2| \leq A |x_1|.$$

Sicchè si avrà

$$\begin{aligned} (6) \quad \Phi(M, N; \alpha, \beta; \alpha', \beta') &= \int_{\omega(y')} \frac{[(x_1 - x_1'')^2 + (x_2 - x_2'')^2]^{\frac{\alpha}{2}} [x_1^2 + x_2^2]^{\frac{\alpha'}{2}}}{(y - y')^\beta (y - y')^{\beta'}} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-\frac{(x_1 - x_1'')^2 + (x_2 - x_2'')^2}{4(y - y')}} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4(y - y')}} dx_1 dy \leq \\ &\leq A^* \int_{\omega(y')} \frac{|x_1 - x_1''|^\alpha |x_1|^{\alpha'}}{(y - y')^\beta (y - y')^{\beta'}} \cdot e^{-\frac{(x_1 - x_1'')^2}{4(y - y')}} - \frac{x_1^2}{4(y - y')}} dx_1 dy, \end{aligned}$$

A^* essendo un'opportuna costante. Senza togliere generalità, potremo supporre che $\omega(y')$ sia un rettangolo del tipo $-\delta \leq x_1 \leq \delta$, $y' \leq y \leq y' + \mu$; sicchè l'ultimo integrale ora scritto, posto

$$x_1 = x \quad x_1'' = x'' \quad y - y' = t \quad y' - y'' = \varepsilon,$$

diventerà

$$(7) \quad \int_0^\mu \int_{-\delta}^\delta \frac{|x - x''|^\alpha |x|^{\alpha'}}{(t + \varepsilon)^\beta t^{\beta'}} e^{-\frac{(x - x'')^2}{4(t + \varepsilon)}} - \frac{x^2}{4t}} dt dx;$$

lo indicheremo con $\chi(x'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta')$ e sarà funzione di x'' e di ε per $-\delta < x'' < \delta$ e per ε variabile in un intorno destro limitato dello zero, lo zero stesso escluso.

Si consideri ora la funzione delle 4 variabili reali x, t, ϵ, x''

$$f(x, t, \epsilon, x'') = \frac{|x - x''|^\alpha}{(t + \epsilon)^\beta} \cdot e^{-\frac{(x-x'')^2}{4(t+\epsilon)}}$$

per $t \geq 0, \epsilon > 0, x$ e x'' qualunque; fissati t, ϵ, x studiamola come funzione della sola x'' .

Se $\alpha = 0$ f è sempre positiva; inoltre è $\lim_{x'' \rightarrow \infty} f = 0$ e

$$f'_{x''} = \frac{x - x''}{2(t + \epsilon)^{\beta+1}} e^{-\frac{(x-x'')^2}{4(t+\epsilon)}}$$

perciò il massimo di f si ottiene per $x'' = x$ ed è uguale a $\frac{1}{(t + \epsilon)^\beta}$. Dunque per $\alpha = 0$ è sempre

$$(8) \quad 0 < f \leq \frac{1}{(t + \epsilon)^\beta}.$$

Per $\alpha > 0$ f è positiva per $x'' \neq x$, si annulla per $x'' = x$ ed ha ivi il minimo assoluto; inoltre derivando per $x'' \neq x$ si ha

$$\begin{aligned} f'_{x''} &= \frac{1}{(t + \epsilon)^\beta} \left\{ \pm \alpha |x - x''|^{\alpha-1} e^{-\frac{(x-x'')^2}{4(t+\epsilon)}} + \right. \\ &\quad \left. + |x - x''|^\alpha e^{-\frac{(x-x'')^2}{4(t+\epsilon)}} \cdot \frac{x - x''}{2(t + \epsilon)} \right\} = \\ &= \frac{|x - x''|^{\alpha-1}}{(t + \epsilon)^\beta} e^{-\frac{(x-x'')^2}{4(t+\epsilon)}} \left\{ \pm \alpha + |x - x''| \frac{x - x''}{2(t + \epsilon)} \right\}, \end{aligned}$$

valendo il segno $+$ o il $-$ secondo che è $x'' > x$ oppure $x'' < x$; si ha dunque $f'_{x''} = 0$ se $x'' = x \pm \sqrt{2\alpha(t + \epsilon)}$. Inoltre è ancora

$\lim_{x'' \rightarrow \infty} f = 0$, sicchè la f assume il suo massimo assoluto nei punti $x'' = x \pm \sqrt{2\alpha(t + \epsilon)}$, risultando ivi uguale a

$$\frac{|2\alpha(t + \epsilon)|^{\frac{\alpha}{2}}}{(t + \epsilon)^\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Dunque, se $\alpha > 0$, risulta sempre

$$(9) \quad 0 \leq f \leq \frac{(2\alpha)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}}}{(t + \varepsilon)^{\beta - \frac{\alpha}{2}}}$$

Facendo la convenzione che sia $0^0 = 1$, la (8) si può far rientrare nella (9); con ciò riterremo in ogni caso valida la (9).

Riprendiamo ora la funzione $\chi(x'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta')$ e ricordiamo che (v. [12, pag. 231]) la funzione

$$\frac{x^{\alpha'} e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^{\beta'}},$$

è integrabile nel campo $0 < t \leq \mu, 0 \leq x < +\infty$, se $\alpha' + 1 > 0$ e $\alpha' + 3 - 2\beta' > 0$, e quindi lo è nel nostro caso (in cui (α', β') assume i valori (2, 2), (1, 1) e (0, 1)); sicchè sfruttando la (9) si ottiene

$$(10) \quad \chi(x'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta') \leq (2\alpha)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^\mu \int_{-\delta}^\delta \frac{|x|^{\alpha'} e^{-\frac{x^2}{4t}}}{(t + \varepsilon)^{\beta - \frac{\alpha}{2}} t^{\beta'}} dt dx < \\ < 2(2\alpha)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^\mu \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha'} e^{-\frac{x^2}{4t}}}{(t + \varepsilon)^{\beta - \frac{\alpha}{2}} t^{\beta'}} dt dx.$$

Operiamo ora la sostituzione di variabili

$$\frac{x^2}{4t} = p \quad t = q \quad \text{cioè} \quad x = 2\sqrt{pq} \quad t = q.$$

Si ha

$$(11) \quad \int_0^\mu \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha'} e^{-\frac{x^2}{4t}}}{(t + \varepsilon)^{\beta - \frac{\alpha}{2}} t^{\beta'}} dt dx = \\ = 2^{\alpha'} \int_0^{+\infty} e^{-p} p^{\frac{\alpha'-1}{2}} dp \int_0^\mu \frac{dq}{(q + \varepsilon)^{\beta - \frac{\alpha}{2}} q^{\beta' - \frac{\alpha'+1}{2}}} = \\ = 2^{\alpha'} \Gamma\left(\frac{\alpha' + 1}{2}\right) \int_0^\mu \frac{dq}{(q + \varepsilon)^{\beta - \frac{\alpha}{2}} q^{\beta' - \frac{\alpha'+1}{2}}},$$

Γ indicando la funzione di EULERO.

Studiamo ora l'integrale

$$(12) \quad I = \int_0^\mu \frac{dq}{(q + \varepsilon)^{\beta - \frac{\alpha}{2}} q^{\beta' - \frac{\alpha' + 1}{2}}}$$

dando a (α, β) , (α', β') i valori che ci interessano. Si ottengono in definitiva per I i seguenti 4 integrali

$$(13_1) \quad \int_0^\mu \frac{dq}{(q + \varepsilon)q^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} t_3 \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} < \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$(13_2) \quad \int_0^\mu \frac{dq}{(q + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}}} = \log \left(\mu + \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\mu^2 + \varepsilon\mu} \right) - \log \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(13_3) \quad \int_0^\mu \frac{dq}{q + \varepsilon} = \log(\mu + \varepsilon) - \log \varepsilon,$$

$$(13_4) \quad \int_0^\mu \frac{dq}{(q + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\mu + \varepsilon} - \sqrt{\varepsilon}.$$

E allora dalle (10), (11), (13₁), (13₂), (13₃), (13₄), tenendo presente anche che $\log \varepsilon$ è infinito di ordine inferiore a $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ per $\varepsilon \rightarrow 0+$, otteniamo, per $-\delta < \alpha'' < \delta$ e per ε variabile in un intorno destro limitato dello zero

$$(14) \quad \chi(\alpha'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta') < \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

C essendo un'opportuna costante.

Segue quindi dalle (4), (5), (6), (14)

$$|G(M, N)| \leq H^* + \frac{H^{**}}{\sqrt{|y' - y''|}},$$

H^* e H^{**} essendo opportune costanti e di qui ovviamente, poichè y' e y'' variano in un intervallo $(0, y_0)$ limitato, scende la (2).

Si osservi che, dalla dimostrazione data e dai risultati richiamati, segue che le costanti adoperate successivamente nella dimostrazione si possono determinare indipendentemente dalla scelta dei punti M e N di s (ciò dipende in sostanza dalle ipotesi di « regolarità » ammesse sulla superficie s); sicchè in definitiva anche la costante K che compare nella (2) non dipende da M e N .

Osservazione I: In modo analogo si può vedere che il risultato del *Lemma I* vale anche per gli integrali ottenuti dai precedenti scambiando l'ordine delle variabili nelle funzioni che vi compaiono; per es. per l'integrale

$$\int_s F(Q, M)F(Q, N)d_{QS}.$$

Osservazione II: Sarà anche bene osservare che dalla dimostrazione stessa risulta che il lemma, cioè la disuguaglianza (2), vale anche per gli integrali ottenuti dai precedenti sostituendo le funzioni integrande con il loro modulo; così per es. è

$$\int_s \left| \frac{\partial F(M, Q)}{\partial v_Q} \frac{\partial F(N, Q)}{\partial v_Q} \right| d_{QS} \leq \frac{K}{\sqrt{|y' - y''|}},$$

LEMMA II: Posto per ogni coppia $N(x'_1, x'_2, y')$ e $M(x''_1, x''_2, y'')$ di punti di s

$$G_1(M, N) = \int_s \frac{\partial F(M, Q)}{\partial v_Q} \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} d_{QS},$$

$$G_1^{(1)}(M, N) = \int_s F(M, Q)F(Q, N)d_{QS},$$

$$G_1^{(2)}(M, N) = \int_s \frac{F(M, Q)}{\partial v_Q} \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_Q} d_{QS},$$

$$G_1^{(3)}(M, N) = \int_s \frac{\partial F(M, Q)}{\partial v_M} F(Q, N)d_{QS},$$

$$G_1^{(4)}(M, N) = \int_s \frac{\partial F(M, Q)}{\partial v_M} \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_Q} d_{QS},$$

risulta per $y' \neq y''$

$$(15) \quad \left. \begin{array}{l} |G_1(M, N)| \\ |G_1^{(i)}(M, N)| \end{array} \right\} \leq \frac{K_1}{\sqrt{|y' - y''|}} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

essendo K_1 una costante (indipendente da M e N).

Questo lemma si dimostra con ragionamenti dello stesso tipo di quelli fatti per il *Lemma I*. Dimostriamolo per $G_1(M, N)$, la stessa dimostrazione valendo anche per $G_1^{(i)}(M, N)$ ($i = 1, 2, 3, 4$)⁴.

Osserviamo anzitutto che se è $y' \leq y''$ risulta come conseguenza della definizione di $F(M, N)$ che è

$$G_1(M, N) = 0.$$

Basterà quindi considerare il caso $y'' < y'$. Mettiamoci allora nelle stesse ipotesi circa i punti M e N del *Lemma I* e determiniamo gli intorni s_ω , s'_ω ed ω sopradetti.

Anche in questo caso si vede subito che $G_1(M, N)$ è funzione continua di (M, N) in ogni coppia (M_0, N_0) di punti di s non coincidenti. Possiamo quindi anche ora supporre senz'altro il punto M appartenente ad s'_ω . Indicata allora con $\omega(y', y'')$ la parte di ω per cui è $y'' \leq y \leq y'$ e con (x_1, x_2, y) le coordinate di Q e osservato che l'integrale

$$\int_{s-s_\omega} \frac{\partial F(M, Q)}{\partial v_Q} \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} dQs,$$

è funzione continua di M per M variabile in s'_ω si avrà

$$(16) \quad \begin{aligned} |G_1(M, N)| \leq & k_1^{**} + B_1^* \int_{\omega(y', y'')} [h_{2,2}(x_1'', x_2'', y''; x_1, x_2, y) + \\ & + h_{1,1}(x_1'', x_2'', y''; x_1, x_2, y) + \\ & + h_{0,1}(x_1'', x_2'', y''; x_1, x_2, y)] [h_{2,2}(x_1, x_2, y; 0, 0, y') + \\ & + h_{1,1}(x_1, x_2, y; 0, 0, y') + h_{0,1}(x_1, x_2, y; 0, 0, y')] dx_1 dy, \end{aligned}$$

k_1^{**} e B_1^* essendo opportune costanti.

⁴) Per $G_1^{(i)}(M, N)$ ($i = 2, 3, 4$) sarà bene ricordare, anziché la (3),

Sono quindi da studiare ora gli integrali del tipo

$$\begin{aligned} \Phi^*(M, N; \alpha, \beta; \alpha', \beta') &= \\ &= \int_{\omega(y', y'')} h_{\alpha, \beta}(x_1'', x_2'', y''; x_1, x_2, y) h_{\alpha', \beta'}(x_1, x_2, y; 0, 0, y') dx_1 dy, \end{aligned}$$

In modo analogo a quanto si è fatto per $\Phi(M, N; \alpha, \beta; \alpha', \beta')$ si ottiene

$$(17) \quad \begin{aligned} \Phi^*(M, N; \alpha, \beta; \alpha', \beta') &\leq \\ &\leq A^* \int_{\omega(y', y'')} \frac{|x_1 - x_1''|^\alpha |x_1|^{\alpha'}}{(y - y'')^\beta y' - y)^{\beta'}} e^{-\frac{(x_1 - x_1'')^2}{4(y - y'')} - \frac{x_1^2}{4(y' - y)}} dx_1 dy, \end{aligned}$$

Supponiamo che $\omega(y', y'')$ sia un rettangolo del tipo $-\delta \leq x_1 \leq \delta$, $y'' \leq y \leq y'$ e poniamo $y' - y'' = \varepsilon$; l'ultimo integrale di (17) si potrà scrivere dunque così

$$(18) \quad \begin{aligned} \int_{\omega(y', y'')} \{ \dots \} dx_1 dy &= \int_{-\delta}^{\delta} \int_{y''}^{y'} \{ \dots \} dx_1 dy = \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \int_{y''}^{y'' + \frac{\varepsilon}{2}} \{ \dots \} dx_1 dy + \int_{-\delta}^{\delta} \int_{y'' + \frac{\varepsilon}{2}}^{y'} \{ \dots \} dx_1 dy, \end{aligned}$$

avendo per brevità tralasciato di scrivere la funzione integranda.

Si consideri ora il primo integrale dell'ultimo membro di (18); posto $x_1'' = x''$, $x_1 - x_1'' = x$, $y - y'' = t$, esso diventa

$$\int_{-\delta - x''}^{\delta - x''} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{|x|^\alpha |x + x''|^{\alpha'}}{t^\beta (\varepsilon - t)^{\beta'}} e^{-\frac{x^2}{4t} - \frac{(x + x'')^2}{4(\varepsilon - t)}} dx dt;$$

lo indicheremo con $\chi_1(x'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta')$ e sarà funzione di x''

la seguente relazione dimostrata dal LEVI in [12, pag. 257]

$$\left| \frac{\partial F(E, S)}{\partial v_R} \right| \leq B_1 [h_{3,2}(E, S) + h_{0,1}(E, S)]$$

B_1 essendo una opportuna costante indipendente da R e S .

e ε per $-\delta < x'' < \delta$ e per ε variabile in un intorno destro limitato dello zero, lo zero stesso escluso. In modo analogo a quanto si è fatto per il *Lemma I* e con analogha convenzione sul significato di 0^0 si ottiene poi, per $\varepsilon > 0$, $0 \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2}$, x e x'' qualunque

$$0 \leq \frac{|x + x''|^{\alpha'}}{(\varepsilon - t)^{\beta'}} e^{-\frac{(x+x'')^2}{4(\varepsilon-t)}} \leq \frac{(2\alpha')^{\frac{\alpha'}{2}}}{(\varepsilon - t)^{\beta' - \frac{\alpha'}{2}}} e^{-\frac{\alpha'}{2}}$$

e quindi anche la

$$(19) \quad \chi_1(x'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta') < < 2 \cdot (2\alpha')^{\frac{\alpha'}{2}} e^{-\frac{\alpha'}{2}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^\beta (\varepsilon - t)^{\beta' - \frac{\alpha'}{2}}} dt dx .$$

Mediante la sostituzione $\frac{x^2}{4t} = p$, $t = q$ risulta

$$\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^\beta (\varepsilon - t)^{\beta' - \frac{\alpha'}{2}}} dt dx = 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{dq}{q^{\beta - \frac{\alpha + 1}{2}} (\varepsilon - q)^{\beta' - \frac{\alpha'}{2}}},$$

e l'integrale

$$I_1 = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{dq}{q^{\beta - \frac{\alpha + 1}{2}} (\varepsilon - q)^{\beta' - \frac{\alpha'}{2}}},$$

può essere maggiorato in modo analogo a quanto si è fatto per l'integrale I nella dimostrazione del *Lemma I*, ottenendo

$$(20) \quad I_1 \leq \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}},$$

h essendo una costante opportuna; sicchè dalle (19) e (20) si ha, C_1 essendo una opportuna costante

$$(21) \quad \chi_1(x'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta') \leq \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

Si passi poi al secondo integrale dell'ultimo membro della (18).

Posto $w_1'' = w''$, $w_1 = w$, $y' - y = t$ esso diventa

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{|x - x''|^\alpha |x|^{\alpha'}}{(\varepsilon - t)^{\beta} t^{\beta'}} e^{-\frac{(x-x'')^\beta}{4(\varepsilon-t)} - \frac{w^2}{4t}} dx dt = \chi_2(w'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta'),$$

e in modo analogo a quanto si è fatto per $\chi_1(w'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta')$ si può maggiorare con l'integrale

$$\begin{aligned} (2\alpha)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha'} e^{-\frac{w^2}{4t}}}{t^{\beta'} (\varepsilon - t)^{\beta - \frac{\alpha}{2}}} dt dx = \\ = (2\alpha)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}} 2^{\alpha'} \Gamma\left(\frac{\alpha' + 1}{2}\right) \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{dq}{(\varepsilon - q)^{\beta - \frac{\alpha}{2}} q^{\beta' - \frac{\alpha' + 1}{2}}}. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale scritto è salvo lo scambio di α con α' e β con β' l'integrale I_1 ; risulta perciò verificata anche ora la

$$(22) \quad \chi_2(w'', \varepsilon; \alpha, \beta; \alpha', \beta'') \leq \frac{C_2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

con C_2 costante opportuna.

Dalle (16), (17), (18), (21) e (22) si ottiene allora la (15).

Osservazione III: Vale anche per il *Lemma II* un'osservazione analoga all'*Osservazione II* fatta a proposito del *Lemma I*.

Ferme restando le notazioni fino ad ora adottate dimostriamo il

LEMMA III: *Gli integrali*

$$\begin{aligned} G_2(M, N) = \int \underset{\cdot}{G_1(M, Q)} \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} d_{Q^s}, \\ \int \underset{\cdot}{G_1^{(i)}(M, Q)} F(Q, N) d_{Q^s} \quad , \quad \int \underset{\cdot}{G_1^{(i)}(M, Q)} \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_Q} d_{Q^s}, \\ (i = 1, 2, 3, 4), \end{aligned}$$

sono funzioni continue della coppia (M, N) di punti di s .

Dimostriamo il lemma per $G_2(M, N)$. Osserviamo anzitutto che segue anche ora immediatamente dalle proprietà delle funzioni $\frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N}$ e $G_1(M, N)$ che $G_2(M, N)$ è funzione continua di (M, N) in ogni coppia di punti (M_0, N_0) di s non coincidenti.

Dimostriamo ora che, supposto fissato N , $G_2(M, N)$ è funzione continua di M anche per $M = N$.

Anzitutto osserviamo che se è $y' \leq y''$ risulta

$$G_2(M, N) = 0$$

sicchè ci possiamo limitare a considerare punti M per cui è $y' < y'$. Mettiamoci nelle stesse ipotesi circa i punti M e N fatte nella dimostrazione del Lemma I e determiniamo gli intorno s_ω , s'_ω ed ω come si è ivi fatto. Possiamo senz'altro supporre M appartenente ad s'_ω ; si avrà

$$(23) \quad G_2(M, N) = \int_{s-s_\omega} G_1(M, Q) \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} dQs + \int_{s_\omega} G_1(M, Q) \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} dQs.$$

L'integrale esteso ad $s - s_\omega$ è funzione continua di M al variare di M in s'_ω ; basterà dunque far vedere che il secondo integrale di (23) è infinitesimo col diametro di s_ω .

Detta ancora $\omega(y', y'')$ la parte di ω per cui è $y' \leq y \leq y''$, e ricordate la (3) e la (15), si ha

$$(24) \quad \left| \int_{s_\omega} G_1(M, Q) \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} dQs \right| \leq B_2^* \int_{\omega(y', y'')} [h_{2,2}(x_1, x_2, y; 0, 0, y') + h_{1,1}(x_1, x_2, y; 0, 0, y') + h_{0,1}(x_1, x_2, y; 0, 0, y')] \frac{1}{\sqrt{y' - y''}} dx_1 dy$$

B_2^* essendo un'opportuna costante.

Si studi l'integrale

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_{\omega(y', y'')} h_{\alpha, \beta}(x_1, x_2, y; 0, 0, y') \frac{1}{\sqrt{y' - y''}} dx_1 dy.$$

(α, β) assumendo i valori (2, 2), (1, 1), (0, 1). Si ha, con ragio-

namenti già fatti e supponendo al solito $\omega(y', y'')$ rettangolare ($-\delta \leq x_1 \leq \delta$, $y'' \leq y \leq y'$):

$$(25) \quad \Phi'(\alpha, \beta) \leq A' \int_{\omega(y', y'')} \frac{|x_1|^\alpha e^{-\frac{x_1^2}{4(y'-y)}}}{(y'-y)^\beta (y-y'')^\beta} dx_1 dy = \\ = 2A' \int_0^\delta \int_0^\varepsilon \frac{x^\alpha e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^\beta (\varepsilon - t)^{\frac{1}{2}}} dx dt,$$

A' essendo un'opportuna costante e avendo posto $x_1 = x$, $y' - y = t$, $y' - y'' = \varepsilon$.

Ora la funzione

$$\frac{x^\alpha e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^\beta (\varepsilon - t)^{\frac{1}{2}}},$$

è integrabile nella striscia $0 < t < \varepsilon$, $0 \leq x < +\infty$. Basta infatti fare la sostituzione $\frac{x^2}{4t} = p$, $t = q$ per ottenere, di più, una maggiorazione per l'integrale della funzione stessa, indipendente da ε ; inverso si ha

$$\int_0^{+\infty} \int_0^\varepsilon \frac{x^\alpha e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^\beta (\varepsilon - t)^{\frac{1}{2}}} dx dt = \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) \int_0^\varepsilon \frac{dq}{q^{\beta - \frac{\alpha + 1}{2}} (\varepsilon - q)^{\frac{1}{2}}};$$

e d'altra parte si ha, se $\alpha = 2$, $\beta = 2$ oppure $\alpha = 0$, $\beta = 1$:

$$\int_0^\varepsilon \frac{dq}{q^{\beta - \frac{\alpha + 1}{2}} (\varepsilon - q)^{\frac{1}{2}}} = \pi$$

e, se $\alpha = 1$, $\beta = 1$:

$$\int_0^\varepsilon \frac{dq}{(\varepsilon - q)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\varepsilon} \leq \sqrt{y_0}.$$

Ne segue allora che l'integrale

$$\int_0^\delta \int_0^\varepsilon \frac{x^\alpha e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^{\beta(\varepsilon-t)^{\frac{1}{2}}}} dx dt$$

tende a zero con δ .

E da ciò segue in virtù delle (24) e (25) che l'integrale

$$\int_{s_\omega} G_2(M, Q) \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} d_Q s$$

tende a zero col diametro di s_ω ; da cui la continuità di $G_2(M, N)$ al tendere di M a N .

Si osservi ora che, date le ipotesi di « regolarità » fatte sulla superficie s , la dimostrazione stessa ora data ci dice che questa continuità di $G_2(M, N)$ in quanto funzione di M è uniforme rispetto a N ; ne viene quindi la continuità di $G_2(M, N)$ rispetto al complesso (M, N) al variare comunque di M e N su s .

In modo analogo si dimostra la continuità degli altri integrali di cui nell'enunciato del Lemma.

Osservazione IV: Vale per il *Lemma III* un'osservazione analoga all'*Osservazione II*: così per es. è funzione continua di (M, N) l'integrale

$$\int_s \left| G_1(M, Q) \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} \right| d_Q s.$$

2. - Osservazioni su certe equazioni integrali. — I Lemmi del n. precedente ci permettono di fare alcune considerazioni su certe equazioni integrali che compaiono nello studio della equazione del calore.

Si consideri l'equazione integrale

$$(26) \quad z(N) + \frac{1}{2\pi} \int_s z(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} d_M s = g(N)$$

nella funzione incognita $z(N)$. Essa è un'equazione lineare di seconda specie del tipo misto di VOLTERRA-FREDHOLM. Si

supponga $g(N)$ continua su s ; il LEVI [13; pp. 448-450] ha dimostrato in questo caso l'esistenza e l'unicità della soluzione di (26) nel campo delle funzioni continue su s ; egli è arrivato al risultato dimostrando direttamente la convergenza della serie di NEUMANN relativa alla (26), senza occuparsi dello studio del nucleo risolvete della (26).

Aggiungeremo ora alcune considerazioni, riguardanti soprattutto il nucleo risolvete della (26), che ci saranno utili per il seguito.

Introduciamo la successione dei nuclei iterati del nucleo $\frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N}$

$$(27) \quad G_n(M, N) = \int G_{n-1}(M, Q) \frac{\partial F(Q, N)}{\partial v_N} d_Q s$$

$$G_0(M, N) = \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N}.$$

Il *Lemma II* ci dà una limitazione sul comportamento di $G_1(M, N)$ e il *Lemma III* ci assicura la continuità di $G_2(M, N)$; ne segue, con ragionamenti ormai immediati, la continuità dei nuclei iterati successivi.

Mediante calcoli analoghi a quelli svolti dal LEVI si può allora dimostrare la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=2}^{\infty} G_n(M, N)$. Si ottiene così lo sviluppo del nucleo risolvete di $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N}$

$$(28) \quad H(M, N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} G_n(M, N).$$

Da esso vengono esplicitamente rilevate le «singolarità» del nucleo risolvete stesso e si può ottenere di nuovo il teorema di esistenza e di unicità, riuscendo inoltre a esprimere la soluzione di (26) mediante la formula risolutiva

$$(29) \quad z(N) = g(N) + \int g(M) H(M, N) d_M s.$$

Insomma scende, dallo studio sopra fatto dei nuclei iterati

e del nucleo risolvete, la possibilità di sviluppare la classica teoria delle equazioni integrali lineari (v. ad es. [14, Cap. VII])⁵⁾.

Possiamo anzi ora dire di più che tale teoria vale anche se ci si pone per la funzione $g(N)$ e per la soluzione $z(N)$ nel campo delle funzioni solamente sommabili su s . Basta per questo osservare che, se $g(N)$ è sommabile, dalla (28), mediante il ragionamento più volte adoperato nel n. 2 della Nota 1 e basato sui teoremi di TONELLI e di FUBINI per gli integrali multipli, segue che la funzione (di M) $g(M)H(M, N)$ è sommabile su s per quasi-tutti gli N di s e l'integrale

$$\int_s g(M)H(M, N)d_M s$$

è funzione sommabile di N su s . Ne segue che si può considerare la funzione $z(N)$ data dalla (29) e verificare poi, mediante procedimenti ben noti nella teoria delle equazioni integrali lineari⁶⁾, che essa è soluzione della (26) e ne è l'unica soluzione (naturalmente si intende ora che la (26) sia verificata quasi-dappertutto su s).

Considerazioni del tutto analoghe alle precedenti, in virtù dei Lemmi II e III e di alcuni risultati del LEVI [12, pp. 260-263; 13, pp. 448-450], possono anche svolgersi per l'equazione integrale

$$z(N) - \frac{1}{2\pi} \int_s z(M) \left[\frac{\partial F(M, N)}{\partial v_M} - h(M)F(M, N) \right] d_M s = g(N)$$

essendo $h(M)$ una funzione quasi-continua e limitata in s .

⁵⁾ Si osservi a questo proposito che le inversioni nell'ordine delle integrazioni che vengono richieste in tale teoria sono senz'altro lecite anche per la (26); la cosa è per es. conseguenza immediata dei lemmi del n. precedente e dei teoremi di TONELLI e di FUBINI sugli integrali multipli, usati in modo analogo a quanto si è già fatto nel n. 2 della Nota I.

⁶⁾ Anche in queste ipotesi sono possibili le inversioni nell'ordine delle integrazioni che intervengono nei ragionamenti (si veda la precedente nota ⁵⁾).

Osservazione. — I risultati dei n. 1 e 2 valgono anche se il dominio τ non è cilindrico a generatrici parallele all'asse y , ma del tipo più generale considerato nel n. 6 nella Nota I. Solo per semplicità di esposizione ci siamo limitati a dimostrarli nel caso del dominio cilindrico.

3. - Il teorema di unicità. — In questo numero e nel successivo supporremo che il dominio τ sia cilindrico a generatrici parallele all'asse y , e precisamente ci metteremo nelle ipotesi del n. 1 della Nota I; ciò è essenziale per la validità di una certa relazione integrale che useremo (la (35)). Si osservi però che questo è il solo caso che ha un significato fisico relativamente al problema della propagazione del calore.

Dimostriamo ora il

LEMMA IV: *Se la funzione $e(N)$ è di quadrato sommabile su s allora tali sono pure le funzioni*

$$E_1(N) = \int_s e(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} d_M s, \quad E_2(N) = \int_s e(M) F(M, N) d_M s$$

$$E_3(N) = \int_s e(M) H(M, N) d_M s$$

Dimostriamo dapprima il lemma per $E_1(N)$. Si consideri la funzione dei tre punti M, N e R

$$(30) \quad e(M)e(R) \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} \frac{\partial F(R, N)}{\partial v_N},$$

Essa risulta sommabile su $s \times s \times s$; e infatti per quasi-tutti gli M e R di $s \times s$ la funzione è sommabile come funzione di N e risulta per il *Lemma I (Osservazione II)*

$$(31) \quad |e(M)| |e(R)| \int_s \left| \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} \frac{\partial F(R, N)}{\partial v_N} \right| d_N s \leq$$

$$\leq \frac{K}{\sqrt{|y_R - y_M|}} \cdot |e(M)| |e(R)|$$

dove con y_R e y_M si indica la coordinata y rispettivamente dei

punti R e M di s . Dimostriamo ora che la funzione

$$\frac{e(M)e(R)}{\sqrt{|y_R - y_M|}}$$

è sommabile su $s \times s$; infatti, in virtù della disuguaglianza di SCHWARZ e di note disuguaglianze integrali (v. ad es. [15, pag. 626]), detta y_Q la coordinata y di un punto Q variabile su s , si ha

$$\begin{aligned} (32) \quad & \left[\int_s \int_s \frac{|e(M)| |e(R)|}{\sqrt{|y_R - y_M|}} d_M s d_R s \right]^2 \leq \\ & \leq \int_s \left[\int_s \frac{|e(R)|}{\sqrt{|y_R - y_M|}} d_R s \right]^2 d_M s \cdot \int_s e^2(M) d_M s = \\ & = \left[\int_s \int_s |e(Q)| |e(R)| d_R s d_Q s \cdot \int_s \frac{1}{\sqrt{|y_R - y_M|} \sqrt{|y_M - y_Q|}} d_M s \right] \cdot \\ & \cdot \int_s e^2(M) d_M s \leq \left[\int_s \int_s |e(R)| |e(Q)| C^* \log \frac{C^{**}}{|y_R - y_Q|} d_Q s d_R s \right] \cdot \\ & \cdot \int_s e^2(M) d_M s \leq C^* \sqrt{\int_s \int_s \left(\log \frac{C^{**}}{|y_R - y_Q|} \right)^2 d_Q s d_R s} \cdot \left[\int_s e^2(M) d_M s \right]^2 \end{aligned}$$

C^* e C^{**} essendo costanti positive opportune.

Ne viene quindi la sommabilità su $s \times s$ della funzione a primo membro di (31) e quindi, per il teorema di TONELLI più volte citato, la sommabilità su $s \times s \times s$ della (30); e allora il teorema di FUBINI ci assicura la sommabilità su s di

$$\int_s \int_s e(M)e(R) \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} \frac{\partial F(R, N)}{\partial v_N} d_R s d_M s = [E_1(N)]^2.$$

In modo analogo, sfruttando sempre il *Lemma I*, si dimostra che è di quadrato sommabile su s $E_2(N)$.

Passando a $E_3(N)$ basterà ricordare (v. la (28)) che è

$$H(M, N) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} + \frac{1}{(2\pi)^2} G_1(M, N) + H_2(M, N),$$

con $H_2(M, N)$ funzione continua di (M, N) ; $E_3(N)$ si può quindi spezzare in tre integrali: il primo di essi risulta essere $E_1(N)$; agli altri due si possono applicare ragionamenti del tipo di quello ora fatto (e anzi più semplici), tenendo conto del *Lemma II* per l'integrale $\int_s e(M)G_1(M, N)d_Ms$.

Osservazione: Il *Lemma IV* vale anche se negli integrali ivi considerati si sostituiscono alle funzioni integrande i loro moduli; così per es. è di quadrato sommabile la funzione

$$\int_s \left| e(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} \right| d_Ms.$$

Si consideri ora nella classe Γ (v. n. 1 della Nota I) la sottoclasse Γ^* costituita dalle funzioni $u(P)$ di Γ per le quali le corrispondenti funzioni $A(M)$ sono uguali a zero quasi-ovunque su $p(0)$ e sono di quadrato sommabile su s e le funzioni $B(M)$ sono di quadrato sommabile su s . Ricordiamo poi che il Teorema VII della Nota I pone una corrispondenza biunivoca tra le funzioni $u(P)$ di Γ e le funzioni $\varphi(M)$ sommabili su $s + p(0)$, corrispondenza data dalla relazione, per P in $\tau - \sigma$

$$(33) \quad u(P) = \int_s \varphi(M)F(M, P)d_Ms + \int_{p(0)} \varphi(M)F(M, P)d\rho(0).$$

Le relazioni esistenti tra φ , A e B , rilevate appunto nella dimostrazione del suddetto Teorema VII, nel caso che u appartenga a Γ^* si riducono alle

$$(34) \quad \begin{cases} \varphi(N) = 0 & \text{quasi-dappertutto su } s \\ A(N) = \int_s \varphi(M)F(M, N)d_Ms & \text{quasi dappertutto su } s. \\ B(N) = -2\pi\varphi(N) + \int_s \varphi(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} d_Ms & \text{quasi-dappertutto su } s. \end{cases}$$

Indicata allora con $[\varphi]$ la classe delle funzioni $\varphi(N)$ quasi-ovunque nulle su $p(0)$ e di quadrato sommabile su s , si vede subito, in virtù del *Lemma IV* e dei risultati del n. 2 sull'equa-

zione integrale (26), che alle funzioni u di Γ^* corrispondono funzioni φ di $[\varphi]$ e viceversa.

Ci sarà utile introdurre anche una sottoclasse della $[\varphi]$ e precisamente quella $\{\varphi\}$ delle funzioni di $[\varphi]$ che sono continue su s ; ad essa corrisponderà una sottoclasse Γ^{**} di funzioni u di Γ^* .

Dimostriamo ora il

LEMMA V: Nella classe Γ^{**} vale la seguente identità integrale

$$(35) \quad - \int_{s(y')} A(N)B(N)ds = \frac{1}{2} \int_{p(y')} u^2(P)dx_1dx_2 + \int_{\tau(y')} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau$$

per ogni y' tale che $0 \leq y' \leq y_0$.

Si consideri infatti all'interno del dominio $D = p(0)$, base inferiore del cilindro τ un qualunque dominio regolare D' dello stesso tipo di D e si dica τ' il dominio spaziale costruito su D' come τ lo è su D (τ' è dunque il dominio dei punti (x_1, x_2, y) tali che (x_1, x_2) sia in D' e $0 \leq y \leq y_0$); si indichino poi con $\tau'(y')$, $s'(y')$, $p'(y')$ gli analoghi di $\tau(y)$, $s(y)$ e $p(y)$.

Ogni funzione $u(P)$ di Γ^{**} è biregolare in τ' ; basta pensare che una tale $u(P)$ è data dalla

$$(36) \quad u(P) = \int_s \varphi(M)F(M, P)d_Ms$$

con $\varphi(M)$ funzione continua su s . Dunque per essa vale la nota relazione, conseguenza della formula di GREEN:

$$(37) \quad - \int_{s'(y')} u(M) \frac{\partial u(M)}{\partial v} ds = \frac{1}{2} \int_{p'(y')} u^2(P)dx_1dx_2 + \int_{\tau'(y')} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau'$$

per ogni y' di $(0, y_0)$.

Dalla (37) facendo tendere in modo opportuno D' a D , e quindi τ' a τ , si ottiene allora la (35). Infatti il passaggio al limite è lecito nell'integrale

$$\int_{p'(y')} u^2(P)dx_1dx_2$$

poichè $u(P)$ essendo data dalla (36) con $\varphi(M)$ continua è funzione continua in tutto lo spazio, come è ben noto [12, pag. 253].

Quanto all' integrale

$$(38) \quad \int_{s(y')} u(M) \frac{\partial u(M)}{\partial v} ds$$

si pensi inoltre che, sempre poichè $\varphi(M)$ è continua, $\frac{\partial u(P)}{\partial v_N}$ tende a $B(N)$ in ogni punto N di s ad eccezione al più dei punti di $c(0)$, al tendere di P comunque a N , rimanendo inoltre sempre limitata [13, n. 5]; ciò basta per assicurare che anche nell' integrale (38) è lecito il passaggio al limite e quindi per arrivare alla (35).

Siamo ora in grado di dimostrare il

TEOREMA I: *Considerato per ogni y' di $(0, y_0)$ nella classe Γ^* il funzionale*

$$F(u, y') = - \int_s A(M)B(M)ds$$

esso risulta semidefinito positivo e si annulla per ogni y' di $(0, y_0)$ allora e allora solo che è $u(P) \equiv 0$ in $\tau - \sigma$.

Si osservi anzitutto che $F(u, y')$ si può considerare anche come un funzionale $I(\varphi, y')$ della φ nella classe $[\varphi]$; infatti se φ corrisponde ad u si ha

$$(39) \quad F(u, y') = I(\varphi, y') = 2\pi \int_{s(y')} \varphi(N) d_N s \int_{s(y')} \varphi(M) F(M, N) d_M s - \\ - \int_{s(y')} d_N s \int_{s(y')} \varphi(M) F(M, N) d_M s \int_{s(y')} \varphi(R) \frac{\partial F(R, N)}{\partial v_N} d_R s.$$

Dimostriamo che $I(\varphi, y')$ è continuo in $[\varphi]$ con la metrica di HILBERT. Indichiamo il primo e il secondo integrale del secondo membro della (39) rispettivamente con $I_1(\varphi, y')$ e con $I_2(\varphi, y')$ e dimostriamo separatamente la continuità di ciascuno di essi.

Detta ψ un'altra funzione di $[\varphi]$ si ha

$$(40) \quad I_1(\varphi + \psi, y') - I_1(\varphi, y') = \int_{s(y')} \int_{s(y')} \varphi(M)\psi(N)F(M, N)d_M s d_{Ns} + \\ + \int_{s(y')} \int_{s(y')} \psi(M)\varphi(N)F(M, N)d_M s d_{Ns} + \int_{s(y')} \int_{s(y')} \psi(M)\psi(N)F(M, N)d_M s d_{Ns}.$$

Consideriamo il primo degli integrali ora scritti; la disuguaglianza di SCHWARZ ed il *Lemma I* ci danno

$$\left[\int_{s(y')} \int_{s(y')} |\varphi(M)||\psi(N)|F(M, N)d_M s d_{Ns} \right]^2 \leq \int_{s(y')} \left[\int_{s(y')} |\varphi(M)|F(M, N)d_M s \right]^2 d_{Ns} \cdot \\ \cdot \int_{s(y')} \psi^2(N)d_{Ns} = \left[\int_{s(y')} \int_{s(y')} |\varphi(M)||\varphi(R)|d_M s d_{Rs} \cdot \int_{s(y')} F(M, N)F(R, N)d_{Ns} \right] \cdot \\ \cdot \int_{s(y')} \psi^2(N)d_{Ns} \leq K \int_{s(y')} \int_{s(y')} \frac{|\varphi(M)||\varphi(R)|}{\sqrt{|y_M - y_R|}} d_M s d_{Rs} \cdot \int_{s(y')} \psi^2(N)d_{Ns};$$

ripetendo allora il ragionamento già fatto per dimostrare la (32) si ottiene in definitiva, Δ essendo una costante opportuna

$$\left[\int_{s(y')} \int_{s(y')} |\varphi(M)||\psi(N)|F(M, N)d_M s d_{Ns} \right]^2 \leq \Delta \int_{s(y')} \varphi^2(M)d_M s \cdot \int_{s(y')} \psi^2(N)d_{Ns}.$$

Disuguaglianze analoghe valgono poi per gli altri due integrali della (40) (per il secondo si tenga presente l'*Osservazione I* seguente il *Lemma I* nel n. 1); esse ci assicurano quindi che $I_1(\varphi + \psi, y') - I_1(\varphi, y')$ tende a zero con la norma di ψ in $s(y')$.

Quanto a $I_2(\varphi, y')$ risulterà

$$I_2(\varphi, y') = \int_{s(y')} \int_{s(y')} \varphi(M)\varphi(R)d_M s d_{Rs} \int_{s(y')} F(M, N) \frac{\partial F(R, N)}{\partial v_N} d_{Ns} = \\ = \int_{s(y')} \int_{s(y')} \varphi(M)\varphi(R)\tilde{G}(M, R)d_M s d_{Rs}$$

e perciò la differenza $I_2(\varphi + \psi, y') - I_2(\varphi, y')$ sarà data da

$$\int_{s(y')} \int_{s(y')} \varphi(M) \psi(R) \tilde{G}(M, R) d_M s d_R s + \int_{s(y')} \int_{s(y')} \psi(M) \varphi(R) \tilde{G}(M, R) d_M s d_R s + \\ + \int_{s(y')} \int_{s(y')} \psi(M) \psi(R) \tilde{G}(M, R) d_M s d_R s,$$

dove, per il *Lemma I* e il ragionamento fatto a proposito della (32), si ha

$$\left| \int_{s(y')} \int_{s(y')} \varphi(M) \varphi(R) \tilde{G}(M, R) d_M s d_R s \right| \leq K \int_{s(y')} \int_{s(y')} \frac{|\varphi(M)| |\psi(R)|}{\sqrt{|y_M - y_R|}} d_M s d_R s \leq \\ \leq \Delta \left\{ \int \varphi^2(M) d_M s \cdot \int \psi^2(R) d_R s \right\}^{\frac{1}{2}}$$

e analogamente per gli altri due integrali, ciò che dimostra che anche $I_2(\varphi + \psi, y') - I_2(\varphi, y')$ tende a zero con la norma di ψ in $s(y')$.

Dimostrata così la continuità hilbertiana di $I(\varphi, y')$, segue subito il fatto che esso risulta semidefinito positivo in $[\varphi]$. Supponiamo per assurdo che ci sia una φ di $[\varphi]$ per cui risulti $I(\varphi, y') < 0$; e sia $\{f_r(M)\}$ un sistema di funzioni continue su s e ivi hilbertianamente completo. Esistono certamente di tali sistemi, per es. si potrebbe prendere il sistema delle funzioni $f_r(M)$ considerato nel n. 5 della Nota I. Si costruisca allora la serie di Fourier della $\varphi(M)$ rispetto a $\{f_r(M)\}$ e sia $\varphi_n(M)$ la sua ridotta n -esima. Posto

$$(41) \quad u_n(P) = \int_s \varphi_n(M) F(M, P) d_M s$$

per le $u_n(P)$ vale la (35) ed è dunque $I(\varphi_n, y') \geq 0$; e d'altra parte è pure $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\varphi_n, y') = I(\varphi, y')$; sicchè $I(\varphi, y')$ non può essere negativo.

Supponiamo ora che $F(u, y')$ si annulli per ogni y' di $(0, y_0)$ e dimostriamo che è $u(P) \equiv 0$ in $\tau - \sigma$. Sia per assurdo $P^* \equiv (x_1^*, x_2^*, y^*)$ un punto di $\tau - \sigma$ in cui è $u(P^*) \neq 0$. Allora

sarà per un opportuno dominio piano $D(y^*)$ interno a $p(y^*)$

$$\int_{D(y^*)} u^2(P) dx_1 dx_2 \geq \rho$$

ρ essendo un opportuno numero positivo.

D'altra parte è immediato vedere che le funzioni $u_n(P)$, definite dalle (41), convergono uniformemente a $u(P)$ in ogni dominio τ_* interno a τ . Basta infatti osservare che per la disuguaglianza di SCHWARZ si ha in τ_*

$$\begin{aligned} |u(P) - u_n(P)| &= \left| \int_s [\varphi(P) - \varphi_n(P)] F(M, P) d_M s \right| \leq \\ &\leq \left\{ \int [\varphi(M) - \varphi_n(M)]^2 d_M s \cdot \int [F(M, P)]^2 d_M s \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\{ \int [\varphi(M) - \varphi_n(M)]^2 d_M s \right\}^{\frac{1}{2}} \Delta_{\tau_*} \end{aligned}$$

Δ_{τ_*} essendo un numero che dipende dal massimo di $F(M, P)$ per M variabile su s e P in τ_* . In particolare sarà $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P) = u(P)$ uniformemente in $D(y^*)$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D(y^*)} u_n^2(P) dx_1 dx_2 = \int_{D(y^*)} u^2(P) dx_1 dx_2$$

e perciò, in virtù della (35) applicata alle $u_n(P)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n, y^*) \geq \rho,$$

il che è assurdo dovendo essere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n, y^*) = F(u, y^*) = 0.$$

Il Teorema I è dunque dimostrato.

Ne segue il teorema di unicità per il problema « misto ». Indichiamo con Γ' la sottoclasse di Γ per cui $A(M)$ è di quadrato sommabile su $p(0) + s$ e $B(M)$ lo è su s .

TEOREMA II: *Decomposto s in due insiemi misurabili s' e s'' , esiste in Γ' solo la funzione $u(P) \equiv 0$, che soddisfi alle*

$$(42) \quad \lim_{P \rightarrow N (su + v_N)} u(P) = 0 \quad \text{per quasi-tutti gli } N \text{ di } p(0)$$

$$(42') \quad \lim_{P \rightarrow N (su + v_N)} u(P) = 0 \quad \gg \gg \gg \gg \gg \gg s'$$

$$(42'') \quad \lim_{P \rightarrow N (su + v_N)} \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial v_N} - h(N)u(P) \right\} = 0 \quad \text{per quasi-tutti gli } N \text{ di } s''$$

$h(N)$ essendo una funzione quasi-continua, limitata e non negativa in s'' .

Infatti per la (42) la $u(P)$ deve appartenere a Γ^* ; e per la (42') e (42'') risulta per ogni y' da $(0, y_0)$

$$F(u, y') = - \int_{s'' \cdot s(y')} h(N) A^2(N) ds$$

Ne segue poichè è $h(N) \geq 0$

$$F(u, y') = 0$$

e quindi $u \equiv 0$.

Osservazione: Ovviamente tutti i risultati dei n. precedenti (1, 2, 3) e in particolare il teorema di unicità per il problema « misto » si possono dimostrare con gli stessi ragionamenti anche per l'equazione aggiunta $E^*(u) = f$ (v. n. 4 Nota I).

4. - I teoremi di completezza hilbertiani. — Il teorema di unicità dimostrato nel n. 3 ci permette, per quanto si è già detto nel n. 5 della Nota I, di enunciare teoremi di completezza hilbertiana dei sistemi di funzioni che intervengono nel metodo del PICONE.

In particolare sarà bene rilevare la completezza hilbertiana dei seguenti sistemi.

Si supponga che $D = p(0)$ sia semplicemente connesso, la superficie s sia decomposta in due insiemi misurabili s' e s'' , e $h(N)$ sia una funzione quasi-continua, limitata e non negativa; indicati, come nel n. 5 della Nota I, con v_r e w_r ($r = 1, 2, \dots$) i cosiddetti polinomi parabolici omogenei, si costrui-

scano i due sistemi di vettori nello spazio S_3 ,

$$\omega_r'' \text{ di componenti } -w_r \text{ su } p(y_0), -w_r \text{ su } s', \frac{\partial w_r}{\partial v} - hw_r \text{ su } s''$$

$$\bar{\omega}_r'' \text{ » » } -v_r \text{ su } p(0), -v_r \text{ su } s', \frac{\partial v_r}{\partial v} - hv_r \text{ su } s''$$

Allora il sistema $\{\omega_r''\} \{[\bar{\omega}_r'']\}$ è completo nella totalità dei vettori dello spazio S_3 di componenti di quadrato sommabile rispettivamente su $p(y_0)$, su s' e su s'' [su $p(0)$, su s' e su s''].

5. - Ulteriori estensioni di alcune formule integrali e loro applicazioni. — Si è già accennato nella Nota I (v. la nota ⁷) del n. 2, in particolare per le citazioni bibliografiche) alla possibilità di estendere le note proprietà degli integrali, che si presentano nello studio dell'equazione del calore e di cui ci siamo interessati ampiamente nel n. 2 della Nota I, anche al caso di « distribuzioni » di temperatura non sommabili, mediante l'uso dell'integrale di STIELTJES.

Questa estensione viene fatta senz'altro in modo rapido, sfruttando le proprietà classiche della soluzione fondamentale più volte richiamate (v. [12], [13], [11]) e sviluppando opportunamente un tipo di ragionamenti, che il FICHERA ha adoperato per lo studio delle analoghe proprietà dei potenziali di semplice e di doppio strato ([10], [9, cap. II]). La cosa non presenta ormai difficoltà dopo quanto si è detto e mi limito perciò a enunciare i risultati.

Indichiamo con $\alpha(T)$ una funzione additiva e a variazione limitata del generico insieme boreliano T di $s + p(0)$, con s_ρ^+ e s_ρ^- [$p_\rho^+(0)$ e $p_\rho^-(0)$] le superficie parallele a s [a $p(0)$] e avente da s distanza ρ , che si trovano rispettivamente dalla parte della conormale positiva e negativa a s [della normale positiva e negativa a $p(0)$]; con T_ρ^+ e T_ρ^- gli insiemi corrispondenti rispettivamente su s_ρ^+ e s_ρ^- [su $p_\rho^+(0)$ e $p_\rho^-(0)$] di un insieme T di s [di $p(0)$], con $s(T)$ [$x(T)$] la misura superficiale di T , se T appartiene a s [a $p(0)$]. Si hanno allora i seguenti teoremi.

TEOREMA III: *La funzione $F(M, N)$ per quasi-tutti gli N di s è funzione (di M) sommabile su s rispetto alla funzione $\alpha(T)$. Inoltre l'integrale*

$$\int_s F(M, N) d_M \alpha$$

è funzione (di N) sommabile su s rispetto a $\alpha(T)$ e si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{T_\rho^\pm} d_{Ps} \int_s F(M, P) d_M \alpha = \int_T d_N s \int_s F(M, N) d_M \alpha.$$

TEOREMA IV: *La funzione $\frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N}$ per quasi-tutti gli N di s è funzione (di M) sommabile su s rispetto ad $\alpha(T)$ e l'integrale*

$$\int_s \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} d_M \alpha$$

è funzione (di N) sommabile su s rispetto ad $\alpha(T)$. Indicata con Γ una porzione di superficie regolare contenuta in s e con $\mathfrak{F}\Gamma$ la sua frontiera in s , allora, se $\mathfrak{F}\Gamma$ ha massa nulla rispetto ad $\alpha(T)$ si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^\pm} d_{Ps} \int_s \frac{\partial F(M, P)}{\partial v_N} d_M \alpha = \mp 2\pi\alpha(\Gamma) + \int_\Gamma d_N s \int_s \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} d_M \alpha.$$

TEOREMA V: *La funzione $\frac{\partial F(M, N)}{\partial v_M}$ per quasi-tutti gli N di s è funzione (di M) sommabile su s rispetto ad $\alpha(T)$ e l'integrale*

$$\int_s \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_M} d_M \alpha$$

è funzione (di N) sommabile su s rispetto ad $\alpha(T)$. Nelle stesse ipotesi per Γ del teorema IV si ha poi

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^\pm} d_{Ps} \int_s \frac{\partial F(M, P)}{\partial v_M} d_M \alpha = \pm 2\pi\alpha(\Gamma) + \int_\Gamma d_N s \int_s \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_M} d_M \alpha.$$

TEOREMA VI: *Indicata con Γ una porzione di superficie regolare contenuta in $p(0)$ tale che la sua frontiera $\mathcal{F}\Gamma$ in $p(0)$ abbia massa nulla rispetto ad $\alpha(T)$, si ha*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^+} \int_{p^{(0)}} d_P \alpha \int F(M, P) d_M \alpha = 4\pi \alpha(\Gamma).$$

Questi teoremi valgono anche nel caso che la superficie s non sia cilindrica a generatrici parallele all'asse y , ma abbia la forma più generale indicata nel n. 6 della Nota I.

Inoltre teoremi analoghi si possono dimostrare anche per gli analoghi integrali relativi all'equazione aggiunta della (I).

Questi risultati permettono di stabilire proprietà di completezza nello spazio delle funzioni continue di taluni sistemi di funzioni⁷⁾ connessi con l'equazione del calore, in modo analogo a quello sviluppato dal FICHERA (v. [10], [9, cap. III]) per le equazioni della Fisica Matematica di tipo ellittico.

In particolare, nell'ipotesi che il dominio $D = p(0)$ sia semplicemente connesso, la superficie s potendo anche assumere la forma generale indicata nel n. 6 della Nota I, essi permettono di dimostrare la completezza dei sistemi vettori $\{\omega_r\}$ e $\{\omega_r'\}$ [$\{\bar{\omega}_r\}$ e $\{\bar{\omega}_r'\}$]⁸⁾ nella totalità dei vettori dello spazio S_2 di componenti continue su $p(y_0)$ e su s e raccordantisi con continuità su $c(y_0)$ [su $p(0)$ e su s e raccordantisi con continuità su $c(0)$]⁹⁾.

⁷⁾ Diremo che un sistema di funzioni $\{f_r\}$ è completo in un dato spazio di funzioni continue se ogni funzione di tale spazio si può approssimare uniformemente mediante combinazioni lineari di un numero finito di funzioni f_r .

⁸⁾ V. n. 5 Nota I; la funzione $h(M)$ che compare nei sistemi $\{\omega_r'\}$ e $\{\bar{\omega}_r'\}$ sarà ora supposta continua.

⁹⁾ Per $n = 1$ tale completezza di $\{\omega_r\}$ e $\{\bar{\omega}_r\}$ è già stata dimostrata da G. CIMMINO [4]; per $n = 2$, ma in ulteriori restrittive e semplificatrici ipotesi sulla superficie s , essa è stata dimostrata, seguendo lo stesso procedimento di [4], da un'allieva del prof. CIMMINO, C. GNUDI, in una tesi di laurea discussa all'Università di Bologna nel 1940 e non pubblicata. Sempre per $n = 1$ e per i sistemi $\{\omega_r\}$ e $\{\bar{\omega}_r\}$ il risultato è anche in sostanza contenuto nel lavoro [3] di C. CILIBERTO. Non mi risulta invece rilevata prima d'ora la proprietà per i sistemi $\{\omega_r'\}$ e $\{\bar{\omega}_r'\}$.

Dimostriamo, come esempio, la completezza del sistema $\{w_r\}$; in sostanza si tratta di dimostrare che ogni funzione continua su $s + p(y_0)$ si può approssimare uniformemente in $s + p(y_0)$ con combinazioni lineari di polinomi parabolici w_r . Per il che basta dimostrare per un noto teorema di HAHN che se $I(f)$ è un funzionale lineare nello spazio Ω delle funzioni continue su $s + p(y_0)$ per il quale sono verificate le

$$(43) \quad I(w_r) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots)$$

risulta necessariamente

$$I(f) = 0$$

qualunque sia la f in Ω .

Ora un tale funzionale è noto che ha la forma

$$I(f) = \int_{p(y_0)+s} f d\alpha = \int_{p(y_0)-c(y_0)} f d\alpha + \int_s f d\alpha$$

con $\alpha(T)$ funzione d'insieme additiva e a variazione limitata; dunque le (43) diventano

$$(44) \quad \int_{p(y_0)-c(y_0)} w_r d\alpha + \int_s w_r d\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Dimostriamo che da esse discende che è $\alpha(\Gamma) = 0$ su ogni porzione di superficie regolare contenuta in $p(y_0) - c(y_0)$ o in s e tale che $\mathfrak{F}\Gamma$ abbia massa nulla rispetto ad $\alpha(T)$: di qui viene necessariamente $I(f) = 0$ per ogni f di Ω .

Si consideri infatti per ogni P esterno a τ la funzione di P

$$V(P) = \int_s F(M, P) d_M \alpha + \int_{p(y_0)-c(y_0)} F(M, P) d_M \alpha.$$

La funzione $V(P)$ ammette per ogni P esterno a τ il seguente sviluppo in serie

$$(45) \quad V(P) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r(P) \left[\int_{p(y_0)-c(y_0)} w_r(M) d_M \alpha + \int_s w_r(M) d_M \alpha \right]$$

gli $a_r(P)$ essendo opportune funzioni di P . Infatti in ogni dominio τ' dello stesso tipo di τ , contenente τ nel suo interno

e al quale però P sia esterno, la funzione di M $F(M, P)$ è soluzione biregolare della $E^*(u) = 0$. Perciò si può sviluppare in serie di polinomi w_r , uniformemente convergente in ogni dominio interno a τ ¹⁰); e precisamente si avrà

$$F(M, P) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r(P)w_r(M);$$

da qui segue la (45).

Le (45) e (44) ci dicono allora che $V(P)$ si annulla per ogni P esterno a τ .

Ma allora dal teorema IV, tenendo presente anche che è $F(M, P) = 0$ se P ha ordinata y_P minore o uguale a quella y_M di M , si deduce la

$$0 = -2\pi\alpha(\Gamma) + \int_{\Gamma} d_N s \int_s \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_N} d_M \alpha$$

per ogni porzione Γ di superficie regolare contenuta in s , la cui frontiera abbia massa nulla rispetto ad $\alpha(T)$. Procedendo allora come nei lavori citati di FICHERA ([9] e [10]) e ricordando il teorema di unicità per l'equazione integrale (26) (n. 2) si ottiene che è $\alpha(\Gamma) = 0$.

¹⁰) Il fatto, qui adoperato, che ogni soluzione $u(P)$ della $E^*(u) = 0$ biregolare in un certo dominio (sia esso per es. il dominio τ) si possa sviluppare in serie di polinomi w_r , uniformemente convergente in ogni dominio interno a τ è per es. conseguenza immediata della completezza hilbertiana del sistema $\{w_r\}$ su $p(y_0) + s$ (v. n. 5 della Nota I); basta esprimere la $u(P)$ mediante i valori $A(M)$ che essa assume su $p(y_0) + s$, attraverso la classica formula che fa uso della funzione di GREEN $G(P, M)$ (v. in proposito GEVREY [11, memoria I, pag. 412 e seg.], e approssimare poi in media su $p(y_0) + s$ la funzione $A(M)$ mediante la sua serie di FOURIER relativa al sistema $\{w_r\}$: $\sum_{r=1}^{\infty} b_r w_r$. Si avrà

$$u(P) - \sum_{r=1}^n b_r w_r(P) = \frac{1}{4\pi} \int_s [A(M) - \sum_{r=1}^n b_r w_r(M)] \frac{\partial G(P, M)}{\partial v_M} d_M s + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{p(y_0)} [A(M) \sum_{r=1}^n b_r w_r(M)] G(P, M) d_M p(y_0);$$

e di qui, adoperando la disuguaglianza di SCHWARZ, si ottiene l'asserto.

Ne viene

$$V(P) = \int_{P(y_0) - \alpha(y_0)} F(M, P) d_M \alpha$$

e allora, poichè $V(P)$ si annulla per ogni P esterno a τ , applicando il teorema VI¹¹⁾ si ottiene che è anche $\alpha(\Gamma) = 0$ per ogni porzione Γ di superficie regolare appartenente a $p(y_0) - \alpha(y_0)$ la cui frontiera ha massa nulla rispetto ad $\alpha(T)$.

Dalla completezza ora dimostrata del sistema $\{\omega_r\}$ segue ovviamente, come conseguenza di note (v. ad es. [12, pag. 194 e 197] proprietà delle soluzioni dell'equazione $E^*(u) = 0$, la possibilità di *approssimare, mediante combinazioni lineari dei polinomi w_r , ogni soluzione della $E^*(u) = 0$, che sia continua in « tutto » il dominio τ , la convergenza essendo uniforme in « tutto » τ ; e analoga proprietà vale per le soluzioni di $E(u) = 0$.*

Osservazione: Si osservi che i teoremi III, IV, V, VI potrebbero servire agevolmente per ottenere tutti i teoremi di completezza hilbertiana che nella Nota I e in questa si sono ricavati dallo studio delle proprietà dei cosiddetti integrali classici nel caso di « distribuzioni » sommabili delle temperature (n. 2, Nota I); se ci è sembrato opportuno servirci di queste ultime proprietà è stato per metterle maggiormente in rilievo, dato l'interesse che esse presentano anche in sè, in quanto illustrano il comportamento « puntuale » dei suddetti integrali.

6. - Applicazione al metodo dei minimi quadrati. — Termineremo con un cenno sull'applicazione dei teoremi di completezza hilbertiana, stabiliti in questa Nota e nella precedente, al metodo dei minimi quadrati; essi infatti danno la

¹¹⁾ Nel caso che ci interessa il teorema VI diventa

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^+} d_P \alpha \int_{P(y_0) - \alpha(y_0)} F(M, P) d_M \alpha = 4\pi \alpha(\Gamma)$$

la normale su $p(y_0)$ essendo ora orientata nel verso crescente delle y , e il significato di Γ_ρ^+ essendo allora ovvio.

possibilità di dimostrare rigorosamente la convergenza del suddetto metodo quando lo si voglia usare per il calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per l'equazione del calore. Tutto ciò è ormai ovvio per chi conosca come il metodo dei minimi quadrati si applichi al calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali, secondo le vedute da tempo sostenute e illustrate da M. PICONE.

Mi limiterò perciò al seguente caso particolare. Si voglia calcolare la soluzione dell'equazione $E(u) = 0$ che si annulli su $p(0)$ e su s assuma valori prefissati, precisamente sia

$$u(N) = 0 \text{ su } p(0) \quad , \quad u(N) = A(N) \text{ su } s$$

$A(N)$ essendo una funzione continua su s , annullantesi su $c(0)$. Il metodo dei minimi quadrati consiste nell'assumere come n -esima approssimazione della u la funzione

$$(46) \quad u_n(P) = \sum_{r=1}^n c_r^{(n)} v_r(P)$$

v_r essendo i polinomi parabolici definiti nel n. 5 della Nota I e le costanti $c_r^{(n)}$ essendo determinate dalla condizione di render minima la forma quadratica nelle n variabili c_1, \dots, c_n

$$\int_s \left[A(M) - \sum_{r=1}^n c_r v_r(M) \right]^2 ds$$

La completezza del sistema $\{v_r\}$ su s , dimostrata col teorema VIII della Nota I, assicura quindi che la successione $\{u_n\}$ converge in media su s alla $A(M)$ cioè alla $u(M)$. Ne viene allora facilmente che la $\{u_n\}$ converge anche uniformemente insieme alle sue derivate prime in ogni insieme chiuso interno a τ .

Infatti si ricordi che la funzione $u(P)$ si può ottenere col metodo del LEVI [12] mediante la

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_s \varphi(M) \frac{\partial F(M, P)}{\partial v_M} d_M s$$

la funzione $\varphi(M)$ essendo la soluzione (unica e continua su s) dell'equazione integrale

$$\varphi(N) + \frac{1}{2\pi} \int_s \varphi(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_M} d_M s = A(N).$$

Per quanto si è visto nel n. 2 la funzione $\varphi(N)$, detto $K(M, N)$ il nucleo risolvante di $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial F(M, N)}{\partial v_M}$, è data da

$$\varphi(N) = A(N) + \int_s A(M)K(M, N)d_M s.$$

Si ha quindi

$$(47) \quad u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_s A(M) \left[\frac{\partial F(M, P)}{\partial v_M} + R(M, P) \right] d_M s$$

dove

$$R(M, P) = \int_s K(M, Q) \frac{\partial F(Q, P)}{\partial v_M} d_Q s$$

è funzione continua di M e P per M su s e P interno a τ , con derivate rispetto a P pure continue per M su s e P interno a τ .

Analogamente si possono esprimere le $v_r(P)$ e quindi si ottiene

$$u(P) - \sum_{r=1}^n c_r^{(n)} v_r(P) = \frac{1}{2\pi} \int_s \left[A(M) - \sum_{r=1}^n c_r^{(n)} v_r(M) \right] \left[\frac{\partial F(M, P)}{\partial v_M} + R(M, P) \right] d_M s$$

e di qui, adoperando la disuguaglianza di SCHWARZ, si ottiene l'asserita convergenza uniforme delle (46) in ogni insieme chiuso interno a τ , in virtù della loro convergenza in media ad $A(M)$ su s ; analogamente si ragiona per le derivate, bastando osservare che il secondo membro di (47) è derivabile sotto il segno per P interno a τ .

Non dovrebbe ora presentare difficoltà notevoli lo studio di formule di maggiorazione dell'errore di pratica applicazione, analogamente a quanto è possibile ottenere per le equazioni di tipo ellittico (si veda ad es. G. FICHERA: *Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica Matematica*. Rend. Accad. Scienze Fis. Mat. della Società Naz. di Scienze e Lettere di Napoli (4), vol. XVII, 1950).