RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO BALDASSARRI

Sugl'insiemi di gruppi di punti generati da serie razionali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 124-135

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__124_0>

SUGL' INSIEMI DI GRUPPI DI PUNTI GENERATI DA SERIE RAZIONALI

Nota (*) *di* MARIO BALDASSARRI (*a Padova*)

Questa Nota è dedicata alla ricerca di condizioni necessarie e sufficienti perchè un' involuzione piana, ∞^3 e d' ordine n, riesca normale in uno S_3, nel senso indicato in un lavoro precedente [1]).

Nei primi numeri (1-6) inizio lo studio degli insiemi $\mathcal{G}_3$ di gruppi di punti del piano, generati da ∞^2 serie razionali ∞^1 σ (in particolare involutorie, ossia g^1_μ), determinando, fra l' altro, una condizione necessaria e sufficiente perchè un siffatto insieme $\mathcal{G}_3$ sia linearmente razionale rispetto alle sue serie σ. Faccio vedere, in particolare, che tale condizione è sempre soddisfatta quando le serie σ siano di equivalenza, e, fra le ∞^2 curve γ', luogo dei gruppi G_μ d' una serie g^1_μ, non ve ne siano infinite spezzate (Teor. 1 e 2).

Affronto quindi il problema proposto dimostrando (n. 7-10) che una $I^3_{n,2}$ — per $n > 2$ — si rappresenta con un' involuzione ∞^3, d' ordine n, su di un insieme del suddetto tipo $\mathcal{G}_3$ con $\mu = n - 1$, e ne deduco una condizione necessaria e sufficiente perchè la $I^3_{n,2}$ sia normale in uno S_3. Rappresentando i $G_{n-1,2}$ residui dei $G_{n,2}$ con i punti d' una V_3, e quindi le ∞^2 g^1_{n-1} in cui si distribuiscono quei resti sulle curve razionali d' una sua congruenza K d' indice uno, tale condizione coincide con la razionalità lineare della V_3 rispetto a K (Teor. 3).

Nel lavoro si trovano anche osservazioni intese a precisare certi aspetti della struttura delle $I^3_{n,2}$.

---

*) Pervenuta in Redazione il 3 giugno 1952.

1) M. BALDASSARRI, *Le* $I^d_{n,h}$ *e le loro proiezioni.* « Rend. Acc. Lincei » (12) 6 (1952).

1. - Siano π e π' due piani (distinti o no) ed indichiamo con (x, y) ed (x', y') coordinate affini su essi [2]). Si associ al generico punto P del piano π una curva algebrica γ' d'ordine m di π', con la condizione che la corrispondenza, così definita, risulti unirazionale: cioè in guisa che i coefficienti della curva γ' risultino funzioni razionali di $P = (x, y)$. [3]).

Per la corrispondenza inversa potranno verificarsi i casi usuali: cioè la generica γ' potrà provenire da un sol punto P, o da un numero finito ν di essi, o addirittura da infiniti punti di π distribuiti su di una certa curva γ. Il secondo caso si può ricondurre al primo approffittando del teorema di CASTELNUOVO sulla razionalità delle involuzioni piane [4]). Infatti quei gruppi G_ν, i cui ν punti generano una stessa γ', descrivono su π un'involuzione ∞^2 d'ordine ν, quindi razionale, e perciò riferibile ai punti d'un nuovo piano $\overline{\pi}$, fra il quale e π' si ristabilisce ora la biunivocità rispetto alla corrispondenza prodotto $\gamma' = \psi(\overline{P})$.

Eccettuata dunque la terza alternativa (in cui le curve γ' e γ formano due sistemi ∞^1 fra loro birazionali), le curve γ' descrivono un sistema ∞^2 birazionale.

Si supponga ora che sulla generica curva γ' sia univocamente individuata una serie di equivalenza g^1_μ [5]) in modo che, se G_μ è il generico gruppo della generica g^1_μ, esso appartenga a quella sola g^1_μ, sicchè dovrà essere $\mu > 1$. E' subito visto che l'insieme dei gruppi così generato è una *varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni*, che diremo $\mathcal{G}_3$.

---

2) L'uso di coordinate affini risponde naturalmente a mere comodità d'esposizione.

3) Se si rappresentano le curve d'ordine m del piano π' con i punti d'uno spazio S_M con $M = m(m+3)/2$, cioè equivale a porre le coordinate di questo spazio eguali ad altrettante funzioni razionali di x, y: con il che si rappresenta sul piano π una superficie birazionale dello S_M, a meno che l'ente rappresentato non riesca una curva.

4) G. CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* « Math. Ann. » 44 (1894), 125-155; riprodotto nelle « *Memorie scelte* » (Bologna, Zanichelli, 1937), p. 273-304.

5) Con ciò si ammette che la generica curva γ' possa anche esser spezzata.

Se, invece, le curve γ' sono ∞^1, si può ancora generare una ∞^3 algebrica ed irriducibile di G_μ, supponendo che la g^1_μ assegnata su γ' varii come funzione univoca del punto P della curva γ corrispondente a γ'. Anche in tal caso ammetteremo che un G_μ appartenga ad una sola g^1_μ.

2. - Si perviene così ad un insieme $\mathcal{G}_3$, triplamente infinito, di gruppi G_μ, distribuiti in ∞^2 serie di equivalenza d'indice uno sui G_μ stessi.

L'insieme $\mathcal{G}_3$ ammette un modello birazionale, privo di eccezioni, in una certa varietà $\mathcal{G}_3^*$ immersa nella varietà di BORDIGA $M_{2\mu}$, immagine di tutti i gruppi non ordinati di μ punti del piano π' [6]). Sulla $\mathcal{G}_3^*$ resta definita una congruenza K, razionale e d'indice uno, di curve razionali g^*: quelle che rappresentano le g^1_μ. Queste curve g^* hanno ordine m, eguale a quello delle curve γ', come si ricava segando una g^* con una sezione iperpiana della $M_{2\mu}$, quale, ad esempio, quella formata da tutti i gruppi G_μ, che hanno un loro punto su di una certa retta r del piano π'. Se poi Φ è la superficie immagine dentro la varietà $M_{2\mu}$ di BORDIGA, delle μ-ple del piano coincidenti, gli spazi osculatori massimi alla Φ, uscenti dai punti d'una g^*, devon segare questa solo in un punto, poichè le g^1_μ sono d'indice uno sulle rispettive curve γ'.

Viceversa, ogni curva razionale g^*, giacente sulla varietà $M_{2\mu}$ di BORDIGA, e che non sia ulteriormente incontrata dagli spazi osculatori suddetti, rappresenta una serie di equivalenza g^1_μ del piano π', e, quindi, una varietà algebrica a tre dimensioni immersa nella $M_{2\mu}$, che contenga una congruenza K, di indice uno, di curve razionali siffatte, d'un certo ordine m, è sempre immagine d'un insieme del tipo in discorso.

3. - Vogliamo ora occuparci di trovare delle condizioni necessarie e sufficienti perchè l'insieme $\mathcal{G}_3$ sia linearmente birazionale rispetto alle sue date g^1_μ: con il che si vuol notoria-

---

[6]) G. BORDIGA, *Sul modello minimo della varietà delle* n*-ple non ordinate dei punti di un piano.* «Ann. di Mat.» (3) 27 (1918), 1-40.

mente intendere che la varietà $\mathcal{G}_3$ dovrà risultare *birazionalmente riferibile ad un S_3 in modo che le sue serie g^1_μ si rappresentino sulle rette d'una stella.*

In questa indagine si può anzi supporre che le serie razionali assegnate alle curve γ' siano d'indice qualsiasi (finito): diremo σ la generica di esse, che si dovrà supporre irriducibile affinchè tale sia anche l'insieme $\mathcal{G}_3$ dei G_μ.

Le condizioni richieste coincidono, evidentemente, con le medesime condizioni riferite alla $\mathcal{G}_3^*$ rispetto alla congruenza K, le quali a lor volta si riducono a quelle, già note [7]), che garantiscono l'esistenza d'una superficie unisecante ciascuna g^*. Basta precisamente considerare quelle curve di K che si spezzano in due componenti [8]): in generale — poichè la generica g^* è irriducibile, come la generica serie σ — ve ne sarà un sistema semplicemente infinito Σ, eventualmente composto da più sistemi irriducibili Σ_1, Σ_2, ..., Σ_q. Orbene, se fra questi sistemi ve n'è qualcuno multiplo d'ordine pari per Σ, esso può escludersi; mentre si dimostra che ciascun altro è tale che le componenti C_1 e C_2 della curva spezzata, che lo descrive, o variano in uno stesso sistema (descrivendovi una involuzione γ^1_2), ovvero descrivono due sistemi distinti in una certa estensione algebrica [9]) del corpo di definizione della varietà $\mathcal{G}_3^*$: le due alternative verificandosi ugualmente rispetto ai sistemi Σ_i, semplici o multipli di molteplicità dispari per Σ. Risulta che

---

[7]) U. MORIN, *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali.* « Rend. Semin. Padova », 9 (1938), 1-17.

[8]) Il caso che le componenti delle curve spezzate sian più di due si riconduce a quello mediante un'opportuna trasformazione birazionale della varietà. Basta, in effetti, passare ad un modello in cui quelle curve razionali si riducano a coniche, il che è sempre possibile: cfr. il lavoro cit. in (7), p. 3, e F. ENRIQUES, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica* $f(x, y, z) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri.* « Math. Ann. » 49 (1897), 1-23, riassunta in « Rend. Acc. Lincei », (5) 4 (1895), 311-316.

[9]) Per quanto si è osservato alla nota [8]) questa estensione avrà, al più, grado due sul corpo in cui è definita la varietà $\mathcal{G}_3$ in discorso. Cfr. ad es.: B. SEGRE, *Lezioni di Geometria Moderna,* (Bologna, Zanichelli, 1948, vol. I, p. 55, n. 67.

nel primo caso non esiste una superficie unisecante le curve K, mentre nel secondo esiste. Pertanto la $\mathcal{G}_3^*$ è o no linearmente birazionale, secondochè si verifica l'una o l'altra delle situazioni descritte. Si può dunque enunciare il seguente:

TEOREMA I. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema algebrico $\mathcal{G}_3$, irriducibile ed ∞^3 di gruppi G_μ di μ punti del piano, contenente un sistema razionale ∞^2 di serie razionali σ, d'indice uno sui G_μ, sia linearmente razionale rispetto a queste serie, è che, in ogni componente di molteplicità dispari (in particolare semplice) del sistema delle ∞^1 serie spezzate in due serie σ_1 e σ_2, queste si muovono in due sistemi distinti su di una certa estensione algebrica del corpo di definizione del sistema $\mathcal{G}_3$ stesso.*

4. - E' il caso d'osservare che la condizione espressa dal teor. I è certo soddisfatta se, fra le ∞^2 serie razionali σ, non ve ne sono ∞^1 spezzate [10]); e, se si torna ad ammettere ch'esse siano di equivalenza, questo sarà certo il caso quando fra le ∞^2 curve γ' non ve ne siano ∞^1 spezzate. Infatti, sulla generica γ' si avrà intanto una serie g_μ^1 non degenere che potrà supporsi segata da un certo fascio lineare di aggiunte [11]); quando γ' tende ad una particolare γ_0', la serie limite della g_μ^1 sarà ancora segata da un determinato fascio lineare che, se γ'_0 è irriducibile, sega sicuramente ancora una serie lineare non degenere [12]). Ciò ha un certo interesse perchè i sistemi ∞^2 di curve piane algebriche d'ordine m e di genere $p > 1$ contenenti curve

---

[10]) Naturalmente in tal caso, nel modello di cui alla nota [8]), le coniche spezzate formano una superficie fondamentale per la trasformazione che intercede fra la $\mathcal{G}_3^*$ ed il modello stesso.

[11]) Precisamente sono quelle (d'un certo ordine l) che passano pel resto di un'aggiunta d'ordine l (conveniente) condotta per un gruppo fissato ad arbitrio nella serie. Cfr. F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, (Roma, Perrella, 1942), p. 123.

[12]) Hanno interesse a questo proposito le considerazioni sulle serie limiti degeneri che si trovano a p. 158 n. 86 dell'opera di F. SEVERI, cit. in [11]).

spezzate (ed a maggior motivo quelli che ne contengono ∞^1) sono particolari. Si può dunque enunciare il

TEOREMA 2. - *Un insieme $\mathcal{G}_3$, del tipo considerato al n. 1, è certo linearmente razionale se fra le ∞^2 curve luogo delle sue serie lineari g^1_μ non ve ne sono ∞^1 spezzate.*

5. - Conviene garantirsi che la condizione espressa nel teor. 1 non sia soddisfatta da tutti gli insiemi $\mathcal{G}_3$, neppure se le serie σ sono lineari. Un esempio al riguardo si costruisce subito, partendo dalla congruenza delle coniche segate su di una V^3_3 generale dello S_4 dai piani per una sua retta, e trasformandola mediante la corrispondenza simmetrica associata ad una $I^4_{\mu+1,4}$ di quell' S_4. Si ottiene una V_3' contenente una congruenza K' di curve, su ognuna delle quali resta individuata una serie lineare g^1_μ, e quindi globalmente un insieme ∞^3 di gruppi G_μ, che potrà, scegliendo opportunamente la $I^4_{\mu+1,4}$ [13]), proiettarsi da una generica retta dello S_4, biunivocamente, in un insieme piano che, pur essendo del tipo $\mathcal{G}_3$, non è tuttavia birazionale, perchè non lo è notoriamente la forma cubica generale dello S_4 [14]).

Con analogo procedimento possono costruirsi esempi di insiemi $\mathcal{G}_3$ birazionali, non però linearmente tali: basta infatti partire da una congruenza di coniche dello S_3, che abbia indice uno e non ammetta una superficie unisecante, e procedere come sopra usando invece una $I^3_{\mu+1,3}$ [15]).

6. - Aggiungiamo qualche osservazione sulla rappresentazione analitica dell' insieme $\mathcal{G}_3$ nel caso — a cui d' ora in poi ci limiteremo — che le serie σ sian lineari.

---

13) La scelta dovrà esser fatta in modo che, se con r s'indica la retta centro di proiezione, le curve trasformate nella $I^4_{\mu+1,4}$, delle sezioni piane per r della V_3, siano solo unisecate dai piani per r che le incontrano: condizione che può sempre esser realizzata.

14) G. FANO, «Comm. Pont. Acc. Sc.», 11 (1947), 635.

15) Esistono notoriamente tipi siffatti di congruenze lineari di coniche; cfr. D. MONTESANO, *Sui vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio*, «Rend. Acc. di Napoli», (1895), 92-110; 155-181.

Intanto i coefficienti dell' equazione della generica curva γ' son funzioni algebriche ad un valore, cioè funzioni razionali del punto $P(x, y)$ e quindi l' equazione di γ' sarà del tipo:

$$f(x', y'; x, y) = 0, \tag{1}$$

in cui f è un polinomio sia in x', y' che in x, y.

Sulla generica curva (1) è univocamente individuata la serie lineare g^1_μ, che potrà pensarsi segata sulla γ' da un certo fascio lineare di curve aggiunte, che, però, in generale, non risulta razionalmente individuato rispetto ai coefficienti del polinomio f nelle variabili x ed y [16]): ed anzi, fissarne una certa rappresentazione analitica equivale in sostanza a fissare un gruppo della g^1_μ, ossia un punto su di una certa curva razionale g^*, razionalmente individuata sul corpo di definizione della curva γ'. Ciò, com' è noto, richiede in generale, ed al più, l' introduzione d' un radicale quadratico sul corpo delle funzioni razionali in x ed y [17]). Quando, invece, sia soddisfatta la condizione espressa nel teor. 1, o, più in particolare, quella espressa nel teor. 2, la serie g^1_μ associata alla (1) può pensarsi segata su di essa all' infuori d' un certo gruppo A di punti fissi, dal fascio lineare ψ d' equazione:

$$f_0(x', y'; x, y) + t f_1(x', y'; x, y) = 0, \tag{2}$$

in cui f_0 ed f_1 sono polinomi nelle loro variabili.

Al variare del punto P su π il gruppo A, in generale, varierà con γ' descrivendo un insieme α di dimensione inferiore a tre, dal quale si dovrà prescindere se si vuole che le (1) e (2) forniscano il nostro $\mathfrak{G}_3$.

A questo proposito convengono alcune spiegazioni. Le (1) e (2) insieme possono pensarsi come equazioni d' una corrispondenza $(1, \mu)$ fra lo spazio $S \equiv (x, y, t)$ ed il piano π': infatti per certi valori generici di x, y e t, quelle due curve si segano, fuori di A, in un gruppo G_μ del nostro insieme, e quindi una

[16]) Basta, come esempio, al riguardo, pensare al caso della g^1_1 dei punti d'una razionale d'ordine pari.

[17]) M. NOETHER, *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen*, « Math. Ann. », 23 (1884), 311-358.

coppia generica di punti variabili di S e di π soddisfacenti a quelle equazioni, è una coppia di punti omologhi in quella corrispondenza. Ma si può precisare fino a qual punto questo succeda. Perciò si osservi che le uniche eccezioni si hanno per quei punti di S in relazione ai quali le curve (1) e (2) abbiano infiniti punti in comune, il che a sua volta accade, oltrechè per il punto improprio dell'asse t, quando: o quelle curve hanno una componente in comune ovvero una delle due svanisce identicamente. Ma ciò, per l'ipotesi fatta quando x, y e t hanno valori generici, può succedere solo per i punti di una sottovarietà α' propria di S, in generale composta di punti isolati, di linee e di superficie, e che, in particolare, conterrà le varietà di S nelle quali s'annullano tutti i coefficienti o della (1) o della (2). Concludendo si può affermare *che le* (1) *e* (2) *insieme rappresentano la corrispondenza* (1, μ) *associata all'insieme* $\mathcal{G}_3$, *o, se si vuole, l'insieme* $\mathcal{G}_3$ *stesso, nel senso che due punti di* S *e di* π *che soddisfino ad esse e che sian esterni ai luoghi* α, α', *sono omologhi in siffatta corrispondenza.*

Le (1) e (2) consentono un'altra interessante interpretazione quando si pensino x, y, x', y', come coordinate affini di punto in uno spazio S_4. La (1) rappresenta in tale ipotesi una forma M_3 di questo S_4 che risulta in corrispondenza birazionale con le coppie di punti estratte rispettivamente dal piano π e da uno dei gruppi G_μ ad esso associati, valendo le ben note eccezioni all'infinito dipendenti dalle eccezioni che s'incontrano nella rappresentazione delle coppie di punti d'un piano su di un S_4. Il sistema delle curve γ' si trasforma sulla M_3 nelle curve della congruenza staccata su di essa dai piani paralleli al piano (x', y') dello S_4, e su ciascuna di queste le forme del fascio (2) segano, fuori d'una certa superficie base, le serie lineari immagini delle g^1_μ date sulle γ'. Si vede così che *l'insieme* $\mathcal{G}_3$, *se è linearmente birazionale, può pensarsi come proiezione piana di una serie d'intersezione parziale, qual'è quella data dalle* (1) *e* (2) *al variare di* x *ed* y. È inoltre evidente la proprietà inversa.

7. - Passiamo ora a considerare un problema relativo alle involuzioni piane $I^3_{n,2}$, nel quale le cose dette trovano una naturale applicazione. Considerata in generale una $I^d_{n,h}$, cioè un' involuzione ∞^d e d'ordine n, d'uno S_k, ho posto, in un altro lavoro [18]), la nozione di spazio normale per essa: con ciò s' intendo uno spazio S_H che contenga qualche $I^d_{n,H}$ di cui la data sia proiezione ($H \leq d$), e tale, per di più, che non esista alcuna $I^d_{n,H'}$ con $H' > H$ che si proietti nella $I^d_{n,k}$. Ora, il più semplice caso che si presenta, in ordine a questo problema, è quello delle involuzioni $I^3_{n,2}$, in senso stretto, del piano: per queste si hanno due sole possibilità; e cioè: o sono normali già nel loro piano, ovvero provengono per proiezione da delle $I^3_{n,3}$ tenendo presente che quest'ultime, come risulta dal lavoro citato [19]), si proiettano di certo biunivocamente in $I^3_{n,2}$, escluso il caso che contengano una stella di rette unite. Si tratta dunque in sostanza di trovare una condizione necessaria e sufficiente perchè una $I^3_{n,2}$ sia normale nel suo piano o in un S_3. A ciò e ad alcune osservazioni complementari sono dedicati in numeri seguenti.

8. - Una $I^3_{n,2}$, in senso stretto, è, secondo la definizione di B. SEGRE [20]), che ha introdotti questi enti, un insieme algebrico ∞^3 di gruppi di n punti, distinti o no, del piano, tale che i residui di essi rispetto ad un generico punto del piano, descrivano una serie di equivalenza g^1_{n-1} su di una certa curva.

Questi gruppi resto formano un sistema algebrico triplamente infinito in corrispondenza $(1, n)$ con la $I^3_{n,2}$. Vedremo che: se $n > 2$, *esso è un insieme del tipo* $\mathcal{G}_3$ *definito al numero 1.*

Infatti, esso è intanto luogo di ∞^2 serie di equivalenza g^1_{n-1}: resta quindi soltanto da constatare l' ulteriore condizione che un $G_{n-1,2}$ appartenga ad un sola g^1_{n-1}. Per veder ciò — se è $n > 2$ e $(P_1, P_2, ..., P_n)$ un $G_{n,2}$ della $I^3_{n,2}$ — si consideri ad esempio, il residuo rispetto a P_1: $(P_2, P_3, ..., P_n)$; se questo residuo appartiene a più d' una serie g^1_{n-1}, vuol dire che esso è

---

[18]) Cfr. loc. cit. in [1]).

[19]) Cfr. teor. 2, loc. cit. in [1]).

[20]) B. SEGRE, *Osservazioni sulle involuzioni piane più volte infinite*, « Bollettino dell'Un. Mat. Ital. », (3) 5 (1948), 196-200, comunicata al terzo congresso dell'Un. Mat. Ital. (Atti, 1951, p. 124).

residuo non solo rispetto a P_1, ma anche rispetto a certi altri punti $P_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, ...)$, cosicchè fra i residui di P_2, ad esempio, compariranno i gruppi $(P_1, P_3, ..., P_n)$ e $(P_1^{(i)}, P_3, ..., P_n)$, il che è assurdo, perchè questi residui devono variare in una serie lineare, e due gruppi di questa non possono avere in comune un punto variabile.

9. - Nel caso attuale, i piani π e π' sono coincidenti e la corrispondenza che associa ai punti P di π i gruppi $G_{n-1,2}$ di π' risulta involutoria. Abbiamo osservato al n. 1 che le curve γ' possono esser ∞^2 o ∞^1. Si può ora approfondire questa alternativa. Infatti, nel secondo caso, una curva γ' contiene intanto gli ∞^1 residui dei punti d'una curva γ: inoltre — stante la relazione d'involutorietà — la curva γ', se $n > 2$, coincide addirittura con la γ, perchè questa deve contenere tutti i residui dei $G_{n,2}$ presi rispetto alle coppie di punti che sono uno su γ e l'altro su γ'; se, invece, $n = 2$, γ e γ' devon esser due curve in involuzione d'uno stesso sistema ∞^1.

Nel primo caso, poichè ciascuna γ contiene tutti i residui presi rispetto a ciascun suo punto, per un punto del piano passa una sola γ, onde le γ formano un fascio lineare e su ogni curva del fascio la $I^3_{n,2}$ subordina un'involuzione ∞^2 che, per un noto teorema di HUMBERT-CASTELNUOVO [21]), o è una serie lineare o è composta con un'involuzione irrazionale ∞^1, e quest'ultima possibilità è qui da escludersi perchè i residui d'un punto devon variare in una serie lineare [22]).

Nel secondo caso, $n = 2$, si ottiene — com'è subito visto — una $I^3_{2,2}$ formata da tutte le coppie di punti estratte dalle coppie di curve in involuzione d'un fascio di curve razionali.

Questi sono dunque i soli tipi d'una $I^3_{n,2}$ tali che le curve γ' siano ∞^1.

---

[21]) Cfr. ad es. F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica* (Bologna, Zanichelli, 1926), p. 277.

[22]) Questo tipo è accettabile quando si considerino, invece, $I^3_{n,2}$ in senso largo, cioè quando si permetta ai residui dei gruppi $G_{n,2}$ rispetto ai punti del piano, di descrivere delle serie algebriche involutorie. Avvertasi anche che le stesse considerazioni di questo numero permettono di risolvere l'analoga questione per le $I^d_{n,2}$ con $d > 3$.

Vale la pena di notare che queste, pensate come varietà astratte a tre dimensioni, contengono un fascio lineare di superficie razionali, che sono, nel primo caso, le immagini delle $\infty^1 g^2_n$, e, nel secondo, le ∞^1 superficie immagini ciascuna del prodotto di due curve razionali. Tutte queste $I^3_{n,2}$ sono, com'è facile vedere, *enti birazionali* [23]).

10. - Prendiamo ora una $I^3_{n,2}$ con $n > 2$, e si supponga che l'insieme $\mathcal{G}^*_3$ ad essa associato sia linearmente birazionale rispetto alle curve g^* immagini delle g^1_{n-1}. Si pensi allora il piano π immerso in uno S_3 che diremo σ, e sia O un punto qualsiasi di σ esterno al piano π. Per l'ipotesi fatta, si può rappresentare ciascuna g^1_{n-1} su di una retta della stella di centro O, e la rappresentazione può pensarsi realizzata in modo che ciascuna g^1_{n-1} si rappresenti precisamente su quella retta che proietta da O il punto P di π associato alla serie stessa. È allora facile vedere che in tal modo i gruppi di punti di σ omologhi degli n residui $G_{n-1,2}$ d'uno stesso $G_{n,2}$ formano una $I^3_{n,3}$ che si proietta da O nella nostra $I^3_{n,2}$. Infatti, preso un punto P' di σ la retta OP' interseca in un punto P il piano π, punto che determina la serie g^1_{n-1} dei suoi resti, e, su questa, al punto P' resta associato un certo $G_{n-1,2}$ che, insieme a P, forma uno ed un solo $G_{n,2}$ e perciò individua un unico gruppo di punti di σ contenente P'. Dunque se l'insieme $\mathcal{G}_3$ è linearmente birazionale la nostra $I^3_{n,2}$ è normale in σ. Viceversa, se questo accade, l'insieme dei $G_{n-1,2}$ residui dei punti P del piano si rappresenta birazionalmente su di un S_3, in modo che ogni g^1_{n-1} si uniformizza sulla retta che proietta il punto P, associato alla g^1_{n-1}, da un generico punto O dello S_3: quindi il $\mathcal{G}_3$ è linearmente birazionale.

Si conclude così col

TEOREMA 3. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè una $I^3_{n,2}$ sia normale in uno spazio S_3, è che l'insieme $\mathcal{G}_3$ dei suoi*

---

[23]) Ciò risulta dal fatto che quelle ∞^1 superficie ammettono sempre una curva unisecante.

resti rispetto ai punti del piano, sia linearmente birazionale rispetto alle sue ∞^2 serie g_{n-1}^1.

Confrontando questo enunciato con quello del teor. I, si ottiene subito la condizione necessaria e sufficiente perchè una $I_{n,2}^3$ sia normale nello S_3 [24]). Il risultato ottenuto non è tuttavia che un primo passo nel problema dello spazio normale per le $I_{n,2}^3$. È infatti probabile che la condizione trovata possa ridursi ad altre più semplici o, almeno, di più agevole applicazione. Rimandiamo comunque ad un altro lavoro delle ulteriori indagini, fra le quali la ricerca di esempi di $I_{n,2}^3$ normali nel piano.

---

[24]) Notiamo che se, più in particolare, si è nella condizione del teor. 2, la $I_{n,2}$ è sempre normale nello S_3. Da questo punto di vista sarebbe interessante indagare la struttura delle curve fondamentali della $I_{n,2}^3$